Διανυσματική Ανάλυση

Κλίση-Απόκλιση-Στροβιλισμός

Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία βαθμωτή συνάρτηση και $\overrightarrow{f} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μία διανυσματική συνάρτηση. Εισάγουμε τον διαφορικό τελεστή :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial x_2}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial x_3}\overrightarrow{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

Οι δράσεις του παραπάνω τελεστή πάνω σε μία διαφορίσιμη βαθμωτή ή σε μία διαφορίσιμη διανυσματική συναρτήση είναι οι εξής :

i) Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη βαθμωτή συνάρτηση, όπου $f(\overrightarrow{x}) \equiv f(x_1, x_2, x_3)$. Η **κλίση** (ανάδελτα, *gradient*) της f συμβολίζεται με ∇f ή $gradf$ και είναι μία διανυσματική συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο :

$$gradf \equiv \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\overrightarrow{k} \equiv (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3})$$

ii) Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μία διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση, όπου $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \equiv (f_1(\overrightarrow{x}), f_2(\overrightarrow{x}), f_3(\overrightarrow{x}))$. Η **απόκλιση** (*divergence*) της $\overrightarrow{f}$ συμβολίζεται με $\nabla \cdot f$ ή $divf$ και είναι μία βαθμωτή συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο :

$$div\overrightarrow{f} \equiv \nabla \cdot \overrightarrow{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

Μία συνάρτηση που έχει απόκλιση μηδέν ονομάζεται **ασυμπίεστη**.

$iii)$ Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μία διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση, όπου $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \equiv (f_1(\overrightarrow{x}), f_2(\overrightarrow{x}), f_3(\overrightarrow{x}))$. Ο **στροβιλισμός** (*curl* ή περιστροφή ή *rotation*) της $\overrightarrow{f}$ συμβολίζεται με $\nabla \times f$ ή $curl f$ ή $rot f$ και είναι μία διανυσματική συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο:

$$curl\overrightarrow{f} \equiv \nabla \times \overrightarrow{f} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\overrightarrow{k}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, -\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

Μία συνάρτηση που έχει στροβιλισμό μηδέν ονομάζεται **αστρόβιλη**.

Λαπλασιανή

Ορίζουμε τον τελεστή *Laplace* : $\triangle \equiv \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$

$a)$ Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία δυό φορές διαφορίσιμη βαθμωτή συνάρτηση. Η **Λαπλασιανή** της f συμβολίζεται με $\triangle f$ ή $\nabla^2 f$ και είναι μία βαθμωτή συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο :

$$\triangle f \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

$b)$ Έστω $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, f_3) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μία δυό φορές διαφορίσιμη διανυσματική συάρτηση. Η **Λαπλασιανή** της $\overrightarrow{f}$ συμβολίζεται με $\triangle\overrightarrow{f}$ ή $\nabla^2\overrightarrow{f}$ και είναι μία διανυσματική συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο :

$$\triangle\overrightarrow{f} \equiv \nabla^2\overrightarrow{f} = \triangle f_1\overrightarrow{i} + \triangle f_2\overrightarrow{j} + \triangle f_3\overrightarrow{k} = (\triangle f_1, \triangle f_2, \triangle f_3),$$

όπου κάθε συντεταγμένη της δίνεται από τον τύπο $a)$.
Μία συνάρτηση που έχει Λαπλασιανή μηδέν ονομάζεται **αρμονική**.

Θεώρημα Α

Έστω $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ δύο διαφορίσιμα βαθμωτά πεδία και $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ δύο διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\begin{aligned}
\nabla(f+g) &= \nabla f + \nabla g \\
\nabla(\lambda f) &= \lambda \nabla f \ , \ (\lambda \in \mathbb{R}) \\
\nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g \\
\nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2} \\
\nabla \cdot (\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) &= \nabla \cdot \overrightarrow{F} + \nabla \cdot \overrightarrow{G} \\
\nabla \cdot (f\overrightarrow{F}) &= f(\nabla \cdot \overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \cdot \nabla f \\
\nabla \times (\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) &= \nabla \times \overrightarrow{F} + \nabla \times \overrightarrow{G} \\
\nabla \times (f\overrightarrow{F}) &= f(\nabla \times \overrightarrow{F}) + \nabla f \times \overrightarrow{F}
\end{aligned}$$

Θεώρημα Β

Έστω $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ δύο διαφορίσιμα βαθμωτά πεδία και $\overrightarrow{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla f) &= \overrightarrow{\mathbf{0}} \\
\nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{F}) &= 0 \\
\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{F}) &= \nabla(\nabla \cdot \overrightarrow{F}) - \triangle \overrightarrow{F} \\
\triangle(fg) &= g\triangle f + f\triangle g + 2(\nabla f \cdot \nabla g)
\end{aligned}$$

Σχόλιο: Στα παρακάτω θα αντικατασταθεί ο συμβολισμός (x_1, x_2, x_3) με (x, y, z) και ο συμβολισμός (f_1, f_2, f_3) με (P, Q, R).

Συντηρητικό διανυσματικό πεδίο

Ένα διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} = (P, Q, R) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ονομάζεται **συντηρητικό** όταν υπάρχει ένα διαφορίσιμο βαθμωτό πεδίο $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει :

$$\overrightarrow{F} = \nabla\phi$$

δηλαδή

$$P = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,,\; Q = \frac{\partial\phi}{\partial y}\,,\; R = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Το βαθμωτό πεδίο ϕ ονομάζεται δυναμικό του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}$.

Θεώρημα 1

Έστω μία συνεχώς διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση $\overrightarrow{F} = (P, Q, R) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, όπου το D είναι ένα ανοικτό και απλά συνεκτικό χωρίο. Τότε αν ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,,\; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}\,,\; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι συντηρητικό.

Στην περίπτωση διανυσματικού πεδίου στο $\mathbb{R}^2$ το παραπάνω Θεώρημα 1 γράφεται ως εξής: Έστω μία συνεχώς διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση $\overrightarrow{F} = (P, Q) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, όπου το D είναι ένα ανοικτό και απλά συνεκτικό χωρίο. Τότε αν ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι συντηρητικό.

Θεώρημα 2

Κάθε συντηρητικό διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} = (P, Q, R) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι αστρόβιλο δηλαδή $curl\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$. (Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή ένα αστρόβιλο πεδίο δεν είναι πάντα συντηρητικό).

Άσκηση 1 : Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός της διανυσματικής συνάρτησης $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x, xy, x^2z^2)$.
Λύση:

$$div\overrightarrow{F} = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2z^2)}{\partial z} = 1 + x + 2x^2z$$

$$curl\overrightarrow{F} =$$

$$= \left(\frac{\partial(x^2z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(xy)}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial(x^2z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

$$= 0\,\overrightarrow{i} - 2xz^2\,\overrightarrow{j} + y\,\overrightarrow{k} = (0, -2xz^2, y)$$

Άσκηση 2 : Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός της διανυσματικής συνάρτησης $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (sin(x+y), 2e^z, e^{xz})$.
Λύση:

$$div\overrightarrow{f} = \frac{\partial(sin(x+y))}{\partial x} + \frac{\partial(2e^z)}{\partial y} + \frac{\partial(e^{xz})}{\partial z} = cos(x+y) + xe^{xz}$$

$$curl\overrightarrow{f} = (0 - 2e^z)\,\overrightarrow{i} - (ze^{xz} - 0)\,\overrightarrow{j} + (0 - cos(x+y))\,\overrightarrow{k}$$

$$= (-2e^z, -ze^{xz}, -cos(x+y))$$

Άσκηση 3 : Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(x,y,z) = xe^y sinz$ είναι αρμονική.
Λύση: Θα βρούμε τη Λαπλασιανή για να δούμε αν είναι ίση με μηδέν ή όχι.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y sinz \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(e^y sinz)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y sinz \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(xe^y sinz)}{\partial y} = xe^y sinz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xe^y cosz \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(xe^y cosz)}{\partial y} = -xe^y sinz$$

Άρα

$$\triangle\, f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = xe^y sinz - xe^y sinz = 0.$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι αρμονική.

Άσκηση 4 : Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y,z) = e^x siny + xy^2 - z^2$ είναι αρμονική.
Λύση:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^x siny + y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x siny \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= e^x cosy + 2xy \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x siny + 2x \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= -2z \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2
\end{aligned}$$

Άρα

$$\triangle\, f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = e^x siny - e^x siny + 2x - 2 = 2x - 2$$

Επομένως η συνάρτηση f δεν είναι αρμονική (αφού η Λαπλασιανή της δεν είναι μηδέν για όλα τα (x,y,z) του πεδίου ορισμού της).

Άσκηση 5 : Να εξεταστεί αν το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y, x+e^z, ye^z)$ είναι αστρόβιλο.
Λύση: Θα βρούμε το στροβιλισμό του $\overrightarrow{F}$ για να δούμε αν είναι μηδέν ή όχι.

$$curl\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x+e^z & ye^z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(ye^z)}{\partial y} - \frac{\partial(x+e^z)}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial(ye^z)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial(x+e^z)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$
$$= 0\,\overrightarrow{i} - 0\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} = (0,0,0)$$

Επομένως το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο.

Άσκηση 6 : Να εξεταστεί αν το διανυσματικό πεδίο
$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xe^{xy}, e^z - ye^{xy}, siny)$ είναι ασυμπίεστο.
Λύση: Θα βρούμε την απόκλιση του $\overrightarrow{F}$ για να δούμε αν είναι μηδέν ή όχι.

$$\begin{aligned} div\overrightarrow{F} &= \frac{\partial(xe^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(e^z - ye^{xy})}{\partial y} + \frac{\partial siny}{\partial z} \\ &= (e^{xy} + xye^{xy}) + (0 - (e^{xy} + xye^{xy})) + 0 = 0 \end{aligned}$$

Επομένως το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι ασυμπίεστο.

Άσκηση7 : Να εξεταστεί αν το διανυσματικό πεδίο
$\overrightarrow{F}(x,y) = (2xe^{xy} + x^2ye^{xy}, x^3e^{xy} + 2y)$ είναι συντηρητικό.

Λύση: Έχουμε $P = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}$ και $Q = x^3e^{xy} + 2y$.
Θα υπολογίσουμε τις ποσότητες $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ για να δούμε αν είναι ίσες.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(2xe^{xy} + x^2ye^{xy})}{\partial y} = 2x^2e^{xy} + x^2e^{xy} + x^3ye^{xy} = 3x^2e^{xy} + x^3ye^{xy}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x^3e^{xy} + 2y)}{\partial x} = 3x^2e^{xy} + x^3e^{xy}$$

Επομένως ισχύει οτι $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ και άρα από το Θεώρημα 1 το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι συντηρητικό.

Άσκηση 8 : Να εξεταστεί αν το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^2 - yx, y^2 - xy)$ είναι συντηρητικό.
Λύση: Έχουμε $\overrightarrow{F} = (P,Q) = (x^2 - yx, y^2 - xy)$, δηλαδή $P = x^2 - yx$ και $Q = y^2 - xy$. Θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 - yx)}{\partial y} = -x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(y^2 - xy)}{\partial x} = -y$$

Άρα $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ και επομένως από το Θεώρημα 1 το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ δεν είναι συντηρητικό.