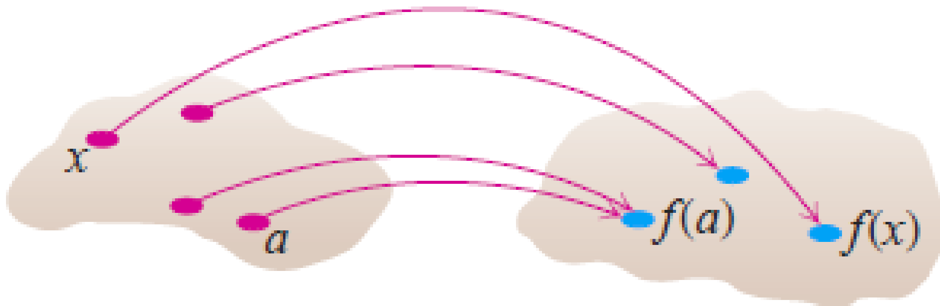
Συναρτήσεις



A = πεδίο ορισμού

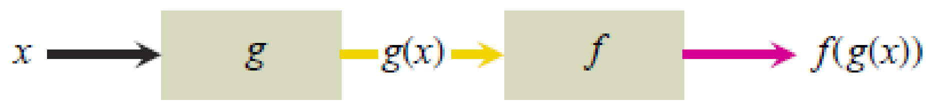
B = σύνολο που περιέχει το σύνολο τιμών f(A)

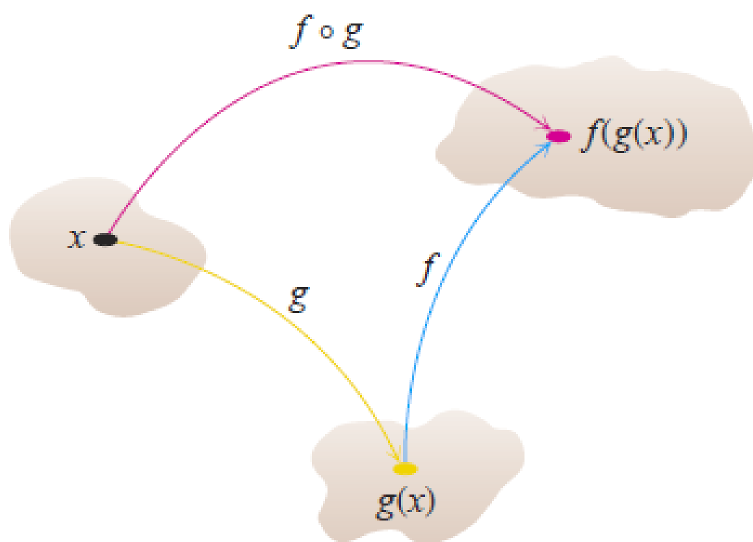
Αν A,B δύο μη κενά σύνολα, τότε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow B$, είναι ένα υποσύνολο G(f) του Καρτεσιανού γινομένου A x B τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ υπάρχει ακριβώς ένα $y \in B$ με $(x,y) \in G(f)$. Τότε $y=f(x)$.

Το σύνολο A λέγεται πεδίο ορισμού της f.

Το σύνολο $f(A) = \{ y \in B : y=f(x)$ για κάποιο $x \in A \}$ λέγεται σύνολο τιμών της f.

Σύνθεση συναρτήσεων





Αν $g : A \to B$ και $f : B \to \Gamma$ δύο συναρτήσεις, τότε η συνάρτηση που απεικονίζει κάθε x∈A στο z=f(g(x)) του Γ λέγεται σύνθεση των f και g και συμβολίζεται με $f \circ g : A \to \Gamma$ όπου $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Όρια Συναρτήσεων

● Έστω A⊆ℝ. Ένα σημείο α∈A ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** (σ.σ.) του A όταν $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει $A \cap ((\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)\setminus\{\alpha\}) \neq \emptyset$, δηλαδή κάθε περιοχή $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ του α περιέχει ένα (τουλάχιστον) σημείο του A διαφορετικό του α, δηλαδή $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ με $0 < |x-\alpha| < \varepsilon$.

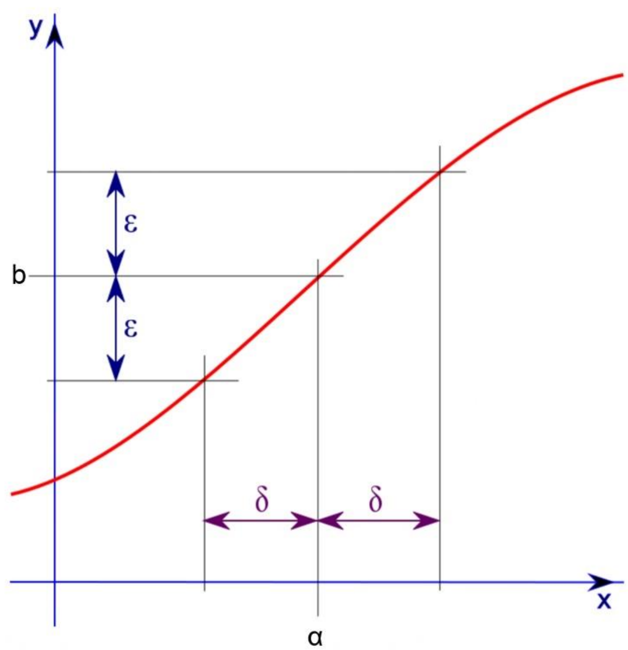
● Έστω A⊆ℝ. Ένα σημείο α∈A ονομάζεται **μεμονωμένο σημείο** του A όταν $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $A \cap (\alpha-\delta,\ \alpha+\delta) = \{\alpha\}$, δηλαδή το α δεν είναι σημείο συσσώρευσης.

Ορισμός ορίου: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και α σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η συνάρτηση f(x) έχει όριο τον πραγματικό αριθμό b καθώς το x τείνει στο α και γράφουμε

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = b$$

αν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \equiv \delta(\varepsilon,\alpha) > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x)-b| < \varepsilon \quad \forall x \in A \text{ με } 0 < |x-\alpha| < \delta.$$



Γεωμετρική ερμηνεία της έννοιας του ορίου πραγματικής συνάρτησης

Θεώρημα: Το όριο μίας συνάρτησης σε ένα σημείο, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Θεώρημα: Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, α σημείο συσσώρευσης του A και b,m ∈ $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x\to\alpha} f(x) = b$ και $\lim_{x\to\alpha} g(x) = m$. Τότε

i) $\lim_{x\to\alpha}\big(f(x) + g(x)\big) = b + m$

ii) $\lim_{x\to\alpha} \lambda f(x) = \lambda b$, $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = bm$

iv) $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{m}$, $m \neq 0$

v) $\lim_{x\to\alpha} |f(x)| = |b|$

vi) $\lim_{x\to\alpha} \sqrt[n]{|f(x)|} = \sqrt[n]{|b|}$

vii) Αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in A \cap (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ τότε $b \leq m$.

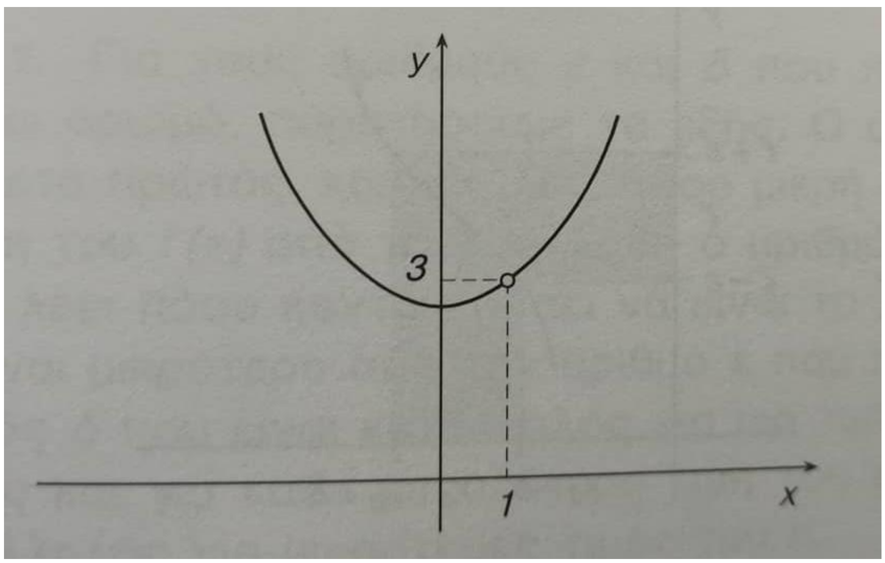
viii) Αν $b > 0$, τότε $\exists \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0\ \forall x \in A \cap (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.

Παράδειγμα 1: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, $x \neq 1$.

Η συνάρτηση f(x) ορίζεται παντού εκτός από το σημείο x=1.

Το όριο της συνάρτησης f(x) καθώς το x τείνει στο 1 είναι ίσο με 3 και γράφουμε $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$. Συγκεκριμένα

$$\operatorname{Lim}_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3.$$



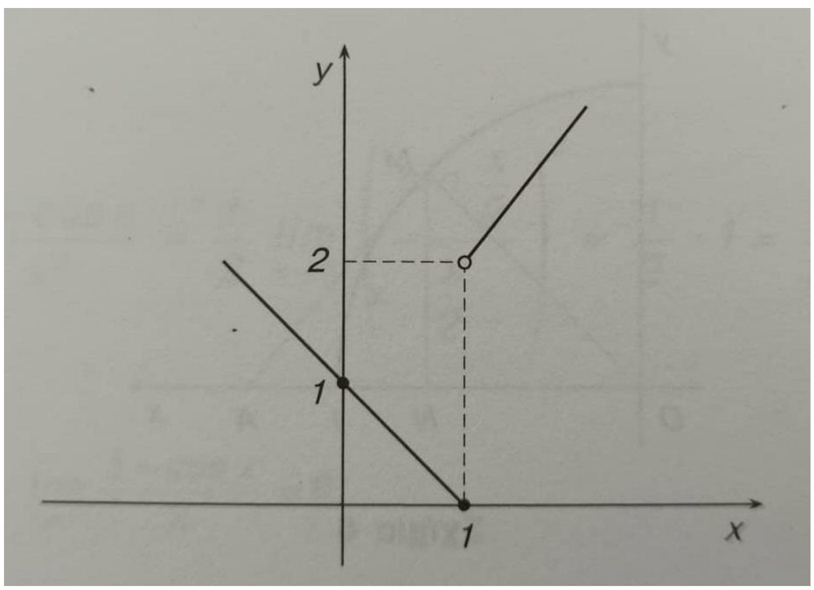
Παράδειγμα 2: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$.

Η συνάρτηση ορίζεται παντού. Είναι δίκλαδη και ο τύπος της αλλάζει στο σημείο x=1.

Τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f(x) καθώς το x τείνει στο 1 υπάρχουν και είναι διαφορετικά.

Συγκεκριμένα $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ και $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

Επομένως το όριο της συνάρτησης f(x) καθώς το x τείνει στο 1 δεν υπάρχει και γράφουμε $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$.

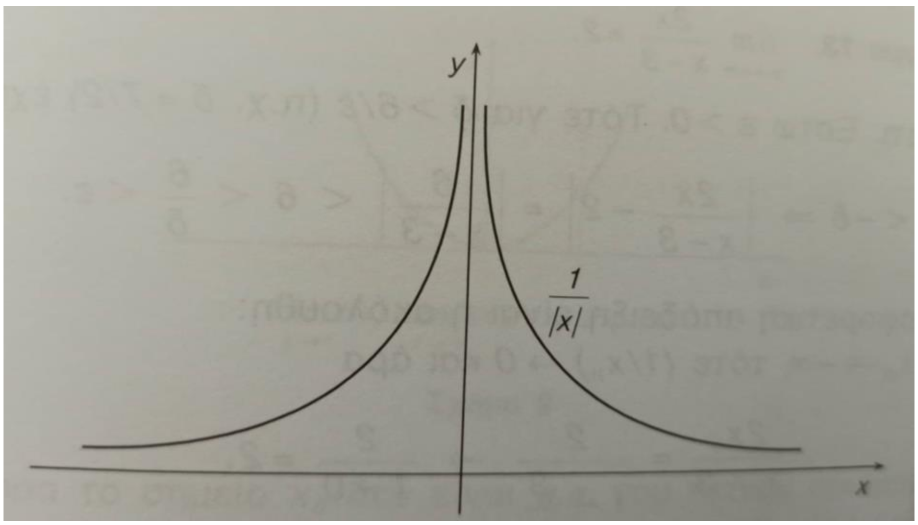


Παράδειγμα 3: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$.

Η συνάρτηση f(x) ορίζεται παντού εκτός από το σημείο x=0.

Η συνάρτηση f(x) έχει όριο το $+\infty$ καθώς το x τείνει στο 0,

το οποίο συμβολίζουμε με $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

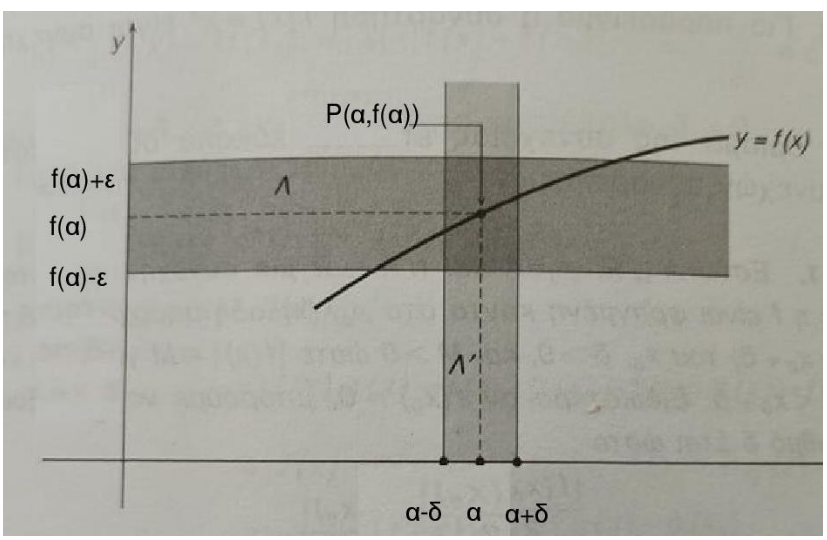


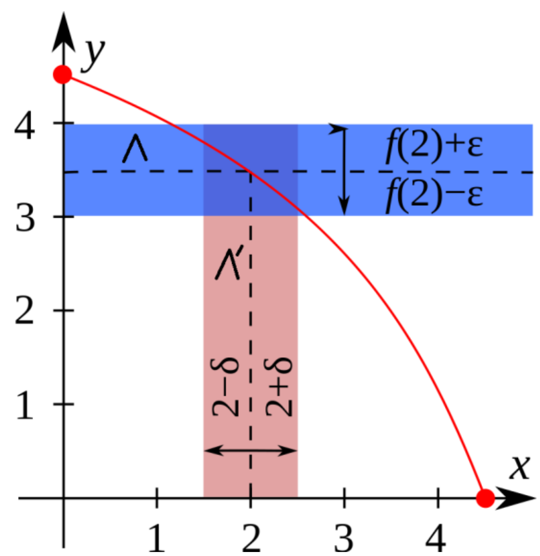
Συνέχεια Συναρτήσεων

Ορισμός: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η συνάρτηση f(x) είναι **συνεχής** σε ένα σημείο α του πεδίου ορισμού της ($\alpha \in A$)

αν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ με $|x - \alpha| < \delta$.

- Έστω α σημείο συσσώρευσης του Α. Αν η f(x) είναι συνεχής στο σημείο α, τότε υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ και είναι ίσο με $f(\alpha)$, δηλαδή $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$. Αντίστροφα, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ και είναι ίσο με $f(\alpha)$, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο α.
- Επομένως, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ και δεν είναι ίσο με $f(\alpha)$, τότε η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο α.
- Έστω α μεμονωμένο σημείο του Α. Τότε η f είναι συνεχής στο α.





Γεωμετρική ερμηνεία της συνέχειας της f στο σημείο α:

Τα σημεία (x,y) με $f(\alpha) - \varepsilon < y < f(\alpha) + \varepsilon$ *σχηματίζουν μία οριζόντια ζώνη (λωρίδα) Λ που περιέχει το σημείο* $P(\alpha, f(\alpha))$. *Η συνέχεια της f στο α σημαίνει ότι για οσοδήποτε λεπτή ζώνη Λ, μπορούμε να βρούμε μία κάθετη ζώνη Λ' με* $\alpha - \delta < x < \alpha + \varepsilon$ *τόσο λεπτή ώστε κάθε σημείο του γραφήματος της f που βρίσκεται στην Λ' επίσης ορίζεται στην Λ.*

Πρόταση: Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις σε ένα σημείο $\alpha \in A$. Τότε οι συναρτήσεις

i) f+g

ii) λf , $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) fg

iv) $\frac{f}{g}$, $g \neq 0$

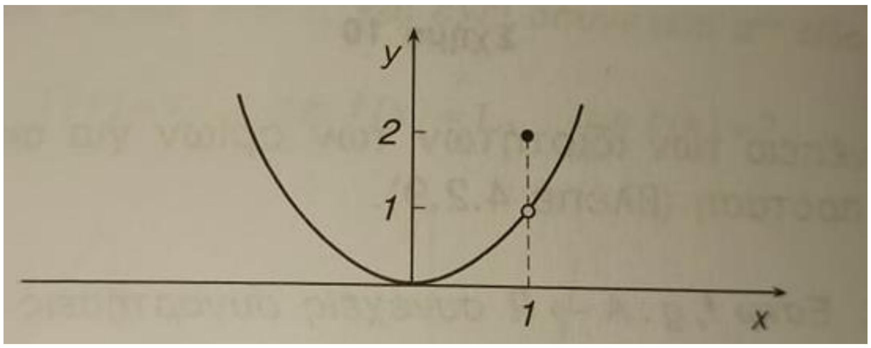
είναι επίσης συνεχείς στο α.

Πρόταση: Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\alpha \in A$. Έστω επίσης $f : A \to B$ συνεχής συνάρτηση στο α και $g : B \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο $b = f(\alpha)$. Τότε η συνάρτηση $(g \circ f): A \to \mathbb{R}$ είναι επίσης συνεχής στο α.

Παράδειγμα 1: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$.

Η συνάρτηση f(x) είναι ασυνεχής στο σημείο x=1 του πεδίου ορισμού της, διότι

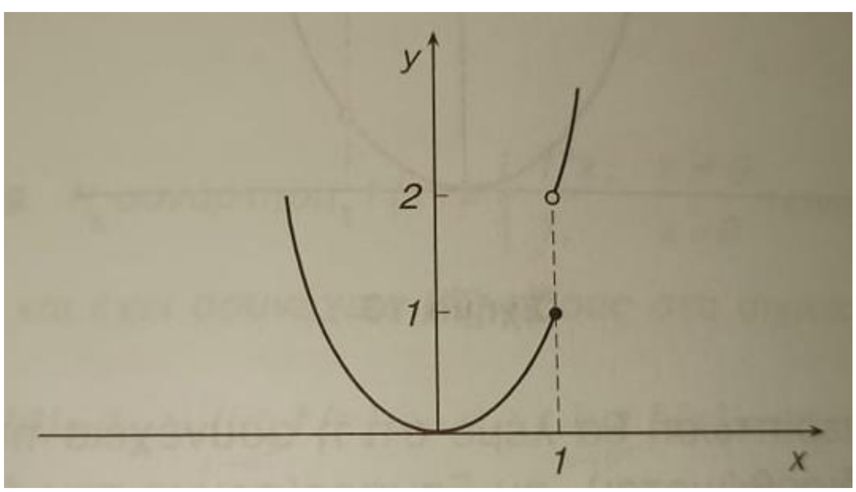
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1 \neq 2 = f(1)$$



Παράδειγμα 2: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x^2+1, & x > 1 \end{cases}$.

Η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \neq 1$ αλλά είναι ασυνεχής στο σημειο $x = 1$ διότι

$$f(1) = 1, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$



Παράγωγος

Ορισμός: Έστω $f: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$. Η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη)** στο σημείο x_0 αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

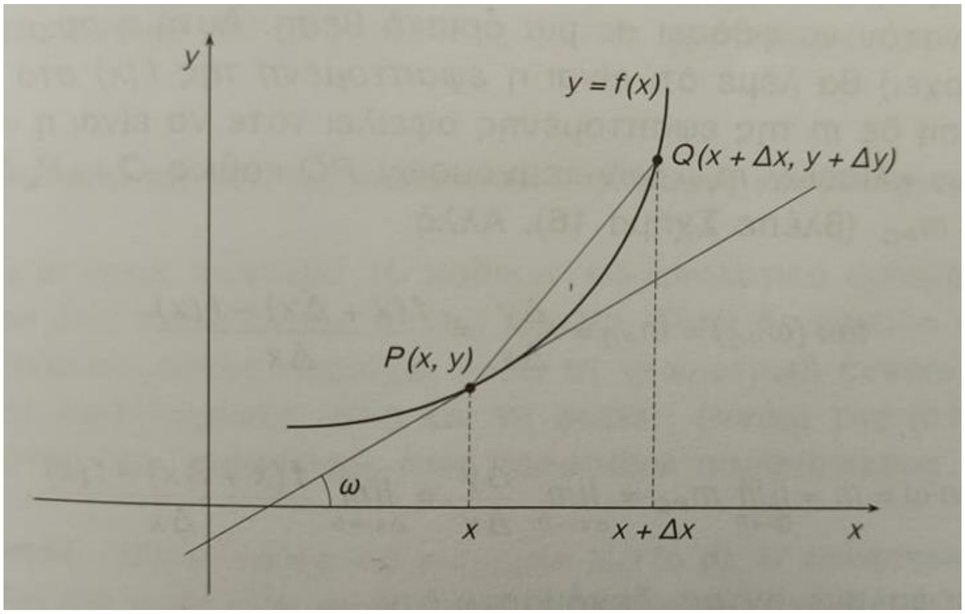
Το όριο αυτό αν υπάρχει είναι η **παράγωγος** της f(x) στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$ ή $\frac{df}{dx}(x_0)$ ή $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

(όπου $h = \Delta x = x - x_0$).



Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου: Έστω ένα σημείο P(x,y) και ένα σημείο Q(x+Δx,y+Δy) πάνω στο γράφημα της f(x). Έστω επίσης η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία P και Q η οποία ονομάζεται τέμνουσα. Αν αφήσουμε το σημείο Q να κινηθεί πάνω στο γράφημα της f(x) προς το σημείο P τότε η τέμνουσα είναι δυνατόν να φτάσει σε μία οριακή θέση. Αυτή η θέση, αν υπάρχει, θα λέμε ότι είναι η εφαπτόμενη της f(x) στο σημείο P. Η κλίση της εφαπτόμενης της καμπύλης στο σημείο P(x,f(x)) είναι η παράγωγος της f στο σημείο αυτό.

Φυσικό παράδειγμα: Έστω ένα υλικό σημείο που κινείται πάνω σε μία ευθεία και s=f(t) η θέση του σημείου συναρτήσει του χρόνου t. Τότε η στιγμιαία ταχύτητα u(t) τη χρονική στιγμή t ή ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης τη χρονική στιγμή t δίνεται από

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\,(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) = u(t)\,.$$

Θεώρημα: Αν f(x),g(x) παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα τότε οι συναρτήσεις f+g, λf (για $\lambda \in \mathbb{R}$), fg, $\frac{f}{g}$ (για $g \neq 0$) είναι επίσης παραγωγίσιμες και ισχύουν:

i) $(f+g)' = f' + g'$

ii) $(\lambda f)' = \lambda (f)'$

iii) $(fg)' = f'g + fg'$

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg\prime}{g^2}$

Θεώρημα: Αν $f : A \to B$ παραγωγίσιμη στο σημείο x και $g : B \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο σημείο $y = f(x)$. Τότε η συνάρτηση $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει $(g \circ f)'(x) = g'(y)f\,'(x)$.

Ορισμός: Συνάρτηση είναι μια μονοσήμαντη απεικόνιση από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y, την οποία και συμβολίζουμε με $f: X \to Y$. Μονοσήμαντη συνάρτηση σημαίνει ότι για κάθε $x \in X$ το $f(x)$ είναι ένα ΜΟΝΑΔΙΚΟ σημείο του Y. Το σύνολο X καλείται πεδίο ορισμού της f. Το πεδίο τιμών της f είναι το Y. Η εικόνα της f είναι $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.

Αν A υποσύνολο του X τότε η εικόνα του A μέσω της f είναι το υποσύνολο του Y, $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$

Μια συνάρτηση $f: X \to Y$ καλείται επί αν $f(X) = Y$ (γενικά ισχύει ότι $f(X) \subseteq Y$)
Μια συνάρτηση f καλείται "1-1" αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in X$ και $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει ότι $x_1 = x_2$. Ισοδύναμα, αυτό σημαίνει ότι $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Σύνθεση συναρτήσεων: Έστω $f: X \to Y$ και $g: W \to Z$ τέτοιες ώστε $f(X) \subseteq W$. Η σύνθεση $g \circ f: X \to Z$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται με $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$.

Αν $f: X \to Y$ και B υποσύνολο του Y, τότε η αντίστροφη εικόνα του B μέσω της f είναι το υποσύνολο του X που συμβολίζεται με $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$
π.χ. Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ τότε $f^{-1}([-1,1]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-1,1]\} = \mathbb{R}$
και $f^{-1}([1,2]) = \emptyset$

Συναρτήσεις με πραγματικές τιμές: Έστω $f: X \to \mathbb{R}$ και $g: X \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με πραγματικές τιμές.
(1) Η συνάρτηση $f+g: X \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in X$.
(2) Η συνάρτηση $f \cdot g: X \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in X$.
(3) Αν $g(x) \neq 0$ τότε, $\forall x \in X$, η $\frac{f}{g}: X \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Αν $f: X \to \mathbb{R}$ τότε: (1) Η f καλείται άνω φραγμένη αν το $f(X)$ είναι άνω φραγμένο.
(2) Η f καλείται κάτω φραγμένη αν το $f(X)$ είναι κάτω φραγμένο.
(3) Η f καλείται φραγμένη αν το $f(X)$ είναι φραγμένο.

<u>Μονότονες συναρτήσεις:</u> Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \to \mathbb{R}$

(1) Η f καλείται αύξουσα αν για οποιοδήποτε ζεύγος $x,y \in A$ με $x \leq y$ ισχύει ότι $f(x) \leq f(y)$.
(2) Η f καλείται γνησίως αύξουσα αν για οποιοδήποτε ζεύγος $x,y \in A$ με $x \leq y$ ισχύει ότι $f(x) < f(y)$.
(3) Η f καλείται φθίνουσα αν για οποιοδήποτε ζεύγος $x,y \in A$ με $x \leq y$ ισχύει ότι $f(y) \leq f(x)$.
(4) Η f καλείται γνησίως φθίνουσα αν για οποιοδήποτε ζεύγος $x,y \in A$ με $x \leq y$ ισχύει ότι $f(y) < f(x)$.
(5) Η f καλείται μονότονη (ή γνησίως μονότονη) αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα (ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα).

<u>Συνέχεια συνάρτησης:</u> Ορισμός = Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \to \mathbb{R}$. Έστω $x_0 \in A$. Η f καλείται συνεχής σο x_0 αν ισχύουν τα ακόλουθα, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ τέτοιος ώστε $\forall y \in A$ αν $|x_0 - y| < \delta$ τότε θα ισχύει ότι $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Π.χ. (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω $\varepsilon > 0$ τυχαίο. Αν θέσω $\delta(x_0, \varepsilon) = \varepsilon$ τότε, αν $y \in \mathbb{R}$ με $|x_0 - y| < \delta = \varepsilon$ τότε $|f(x_0) - f(y)| = |x_0 - y| < \delta = \varepsilon$, άρα η f είναι μια συνεχής συνάρτηση.

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

Στο σημείο $x_0 = 0$ η f ΔΕΝ είναι συνεχής.

Πράγματι, για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ έχουμε ότι όποιο $\delta > 0$ και αν επιλέξουμε πάντα υπάρχει $y \in (-\delta, \delta)$ με το $|f(y)| > \dfrac{1}{2}$ (αρκεί το $y > 0$).

(3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^2 - 1$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, θα δειχθεί ότι η f είναι συνεχής σο x_0. Έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε ένα $\delta > 0$ ώστε αν $|x_0 - y| < \delta$ τότε $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|(2x_0^2 - 1) - (2y^2 - 1)\right| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |2x_0^2 - 2y^2| < \varepsilon$$

Κατ' αρχάς μπορούμε να επιλέξουμε το $\delta > 0$ ώστε να ισχύει και $\delta < 1$.

Επιπλέον $|2x_0^2 - 2y^2| = 2|x_0 + y||x_0 - y|$, αλλά $|y + x_0| = |y - x_0 + 2x_0| \leq |y - x_0| + |2x_0|$

$\xrightarrow[\text{ΕΔΩ}]{\text{ΣΥΝΕΧΕΙΑ}}$ $\leq \delta + |2x_0| \leq 1 + |2x_0|$

Επομένως, $|2x_0^2-2y^2| = 2|x_0+y||x_0-y| \leq 2(1+|2x_0|)\cdot\delta < \varepsilon$

Άρα, για $\delta(x_0,\varepsilon) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2(1+|x_0|)}\right\}$ έχουμε ότι $|y-x_0| < \delta(x_0,\varepsilon)$

$\Longrightarrow |f(y)-f(x_0)| < \varepsilon$.

Αρχή μεταφοράς: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to x_0$ έχουμε ότι το $f(x_n) \to f(x_0)$.

π.χ. ② Η f δεν είναι συνεχής στο 0 γιατί η $\frac{1}{n} \to 0$ αλλά $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \to 1 \neq 0 = f(0)$.

(Αναφερόμαστε στο αμέσως προηγούμενο παράδειγμα ②).

Πράξεις συνεχών συναρτήσεων: Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ τέτοιες ώστε f, g συνεχείς στο x_0.

① Οι $f+g$, $f\cdot g$ είναι συνεχείς στο x_0.

② Αν $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A$, τότε ορίζεται η $\frac{f}{g}$ και είναι συνεχής στο x_0.

Σύνθεση και συνέχεια: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ με $g(A) \subseteq B$.

Έστω $x_0 \in A$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η $g \circ f$ θα είναι συνεχής στο x_0.

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων: ① Όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς.

② Οι $\cos: \mathbb{R} \to [-1,1]$ και $\sin: \mathbb{R} \to [-1,1]$ είναι συνεχείς.

③ Για κάθε $\alpha > 0$ η $f_x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_x(x) = \alpha^x$ είναι συνεχής.

④ $\forall x \in \mathbb{R}$ η $g_x: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ με $g_x(x) = \alpha^x$ είναι συνεχής.

Βασικές ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων: ① Έστω $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχουν $m \leq M$ πραγματικοί ώστε για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ να έχουμε $m \leq f(x) \leq M$. Δηλαδή η f είναι φραγμένη.

Παρατήρηση: Δεν ισχύει αν το διάστημα είναι ανοιχτό, π.χ. $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

② Έστω $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχουν $y_1, y_2 \in [\alpha,\beta]$ ώστε για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ να ισχύει $f(y_1) \leq f(x) \leq f(y_2)$. Δηλαδή η f έχει μέγιστο και ελάχιστο. Τα y_1 και y_2 ΔΕΝ είναι μοναδικά.

Απόδειξη: Αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, από προηγούμενη πρόταση είναι και φραγμένη, δηλαδή η εικόνα αυτής $(f([\alpha,\beta]))=A$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η f έχει max (για το min το επιχείρημα είναι το ίδιο αλλά για την $-f$). Το $f([\alpha,\beta])$ είναι φραγμένο και άνω φραγμένο άρα έχει sup. Έστω $\rho=\sup A$.

Παρατήρηση: Αν υπάρχει $y\in[\alpha,\beta]$ με $f(y)=\rho$ τότε $\forall x\in[\alpha,\beta]$ $f(x)\leq\rho=f(y)$.

Έστω ότι δεν υπάρχει $y\in[\alpha,\beta]$ με $f(y)=\rho$, δηλαδή για οποιοδήποτε $y\in(\alpha,\beta)$ ισχύει $f(y)<\rho$.

Ορίζουμε $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $g(y)=\dfrac{1}{\rho-f(y)}$

Τότε, ① Η g είναι καλώς ορισμένη γιατί $\rho-f(y)\neq 0$ και μάλιστα $\rho-f(y)>0$ $\forall y$, ② Η g είναι συνεχής.

Άρα, η g είναι φραγμένη, ειδικότερα άνω φραγμένη, δηλαδή $\exists M>0$ ώστε $g(y)<M$ (*) για κάθε $y\in[\alpha,\beta]$.

Αλλά: Το ρ είναι το $\sup A$, άρα για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $\vartheta_n\in(\rho-\frac{1}{n},\rho)\cap A$, δηλαδή για κάθε $n\in\mathbb{N}$ $\exists x_n\in[\alpha,\beta]$ ώστε $\rho-\frac{1}{n}<f(x_n)<\rho$.

- $\rho-\frac{1}{n}<f(x_n) \iff \rho-f(x_n)<\frac{1}{n} \iff \dfrac{1}{\rho-f(x_n)}>n \iff g(x_n)>n$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} M>n$, το οποίο είναι ΑΤΟΠΟ.

Ορισμός: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ και $x_0\in A$. Το x_0 καλείται σημείο συσσώρευσης του A αν $\forall\delta>0$ $\exists x\in A$ με $0<|x_0-x|<\delta$ δηλαδή $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap A$ και $x\neq x_0$. Τα στοιχεία του A που δεν είναι σημεία συσσώρευσης καλούνται μεμονωμένα.

Όριο συνάρτησης: Ορισμός = Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $x_0\in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $\ell\in\mathbb{R}$.

① Λέμε ότι το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 είναι το ℓ αν $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon,x_0)>0$ ώστε $\forall x\in A$ αν $0<|x-x_0|<\delta$ τότε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Αν υπάρχει τέτοιο ℓ τότε είναι μοναδικό και το συμβολίζουμε με $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

② Λέμε ότι η f τείνει στο $+\infty$ καθώς $x\to x_0$ αν $\forall M>0$ $\exists\delta(x_0,M)>0$ $\forall x\in A$ $0<|x-x_0|<\delta$ τότε $f(x)>M$.

③ Λέμε ότι η f τείνει στο $-\infty$ καθώς $x\to x_0$ αν $\forall M<0$ $\exists\delta(x_0,M)>0$ $\forall x\in A$ αν $0<|x-x_0|<\delta$ τότε $f(x)<M$.

Παραδείγματα: ① $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$

② $f(x) = \begin{cases} x^2, & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Παρατηρείστε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

③ Αν $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

④ Αν $g: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{1}{x}$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ

<u>Ιδιότητες ορίων:</u> Έστω $f, g: A\to\mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχουν, τότε:

① $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

② $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Αρχή μεταφοράς για όριο συνάρτησης: Έστω $f: A\to\mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A, και $\ell\in\mathbb{R}$. Τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν $\forall (x_n)$ στο A με $x_n \neq x_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ με $x_n\to x_0$ έχουμε $f(x_n)\to\ell$.

Πρόταση: Έστω $f: A\to\mathbb{R}$ και $x_0\in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ της μορφής $[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$, (α,β), $(\alpha,+\infty)$, $[\alpha,+\infty)$, $(-\infty,\alpha)$, $(-\infty,\alpha]$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: I\to\mathbb{R}$ συνεχής και 1-1. Τότε η $f^{-1}: f(I)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

<u>Λογαριθμικές συναρτήσεις:</u> Έστω $\alpha\in(0,+\infty)$ με $\alpha\neq 1$, τότε η συνάρτηση $f_\alpha: \mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με $f_\alpha(x) = \alpha^x$ είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται. Η αντίστροφή της συνάρτηση συμβολίζεται με $\log_\alpha(x)$ και είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

<u>Άσκηση 7α σελ. 101:</u> Αν $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{Q}$ τότε $f(y)=0$ $\forall y\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{ΛΥΣΗ}}$ Έστω $y\in\mathbb{R}$ τυχαίο. Παρατηρούμε ότι: $f(y)=0 \iff \forall\varepsilon>0 \ |f(y)|<\varepsilon$

Άρα, αρκεί να δείξω ότι $\forall \varepsilon>0 \ |f(y)|<\varepsilon$.

Έστω λοιπόν $\varepsilon>0$ τυχαίο. Από τον ορισμό της συνέχειας, αφού η f συνεχής στο y, για το δεδομένο $\varepsilon>0 \ \exists \delta(y,\varepsilon)>0$ ώστε $\forall x\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta$ έχουμε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Αλλά, $(y-\delta, y+\delta)\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$, οπότε υπάρχει $q\in\mathbb{Q}$ με $|q-y|<\delta \Rightarrow |f(q)-f(y)|<\varepsilon$ $\Rightarrow |f(y)|<\varepsilon$.

Ορισμός: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Ισοδύναμα ισχύει: Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει.

Παρατήρηση: Αν η f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ τότε η f καλείται παραγωγίσιμη στο α (αντίστοιχα στο β) αν $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ $\left(\text{ή} \lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right)$ υπάρχει.

Παραδείγματα:
1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=c$ (σταθερή) είναι παραγωγίσιμη $\forall x\in\mathbb{R}$ και $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη $\forall x\in\mathbb{R}$ και $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$
3. Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
   Πράγματι, $\frac{f(h)-f(0)}{h}=\begin{cases}1, & h\geq 0\\ -1, & h<0\end{cases}$, άρα $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=1\neq -1=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$.
4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ είναι παραγωγίσιμη $\forall x_0\in\mathbb{R}$ με $f'(x_0)=2x_0$.
5. Οι $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες και $\forall x_0\in\mathbb{R}$, $(\sin(x_0))'=\cos(x_0)$ ενώ $(\cos(x_0))'=-\sin(x_0)$.
6. Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται με $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geq 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη $\forall x_0\in\mathbb{R}$.
   Πράγματι, αν $x\neq 0$ τότε $f'(x_0)=\begin{cases}3x_0^2, & x\geq 0\\ 2x_0, & x<0\end{cases}$. Για το σημείο $x_0=0$ έχουμε:
   $$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\begin{cases}h^2, & h\geq 0\\ h, & h<0\end{cases}.$$ Άρα, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$. Συνεπώς $f'(0)=0$.

Θεώρημα: Έστω $f(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f συνεχής στο x_0.

Παρατήρηση: Το αντίστροφο δεν ισχύει, π.χ. $f(x)=|x|$ στο $x_0=0$.

Κανόνες παραγώγισης: Έστω $f,g:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Υποθέτουμε ότι η f,g είναι παρ/μες στο x_0.

Τότε, ① Η $f+g$ είναι παρ/μη στο x_0 και $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

② $\forall t\in\mathbb{R}$ η $t\cdot f$ είναι παρ/μη στο x_0 και $(t\cdot f)'(x_0)=t\cdot f'(x_0)$.

③ Η $f\cdot g$ είναι παρ/μη στο x_0 και $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$

④ Αν $g(x)\neq 0$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$ τότε η $\frac{f}{g}$ είναι παρ/μη στο x_0 και ισχύει ότι

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

⑤ Αν $f(x)\neq 0$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$ τότε η $\frac{1}{f}$ είναι παρ/μη στο x_0 και ισχύει

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)=\frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

Κανόνας αλυσίδας: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to(\gamma,\delta)$ και $g:(\gamma,\delta)\to\mathbb{R}$. Έστω $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αν η f παρ/μη στο x_0 και η g παρ/μη στο $f(x_0)$, τότε η $(g\circ f)$ είναι παρ/μη στο x_0 και ισχύει ότι $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

Παράγωγοι ανώτερης τάξεως: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παρ/μη $\forall x\in(\alpha,\beta)$ άρα ορίζεται η $f':(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$. Η δεύτερη παράγωγος της f είναι $(f')'$ την οποία συμβολίζουμε με $f^{(2)}$. Γενικά ορίζουμε τη n-οστή παράγωγο της f, συμβολίζεται με $f^{(n)}$ και είναι η $\left(f^{(n-1)}\right)'$.

Παραδείγματα: ① Αν $P(x)=a_n\cdot x^n+\ldots+a_1\cdot x+a_0$ είναι πολυώνυμο, τότε η P είναι απεριορίστως παρ/μη, π.χ. $P'(x)=a_m\cdot m\cdot x^{m-1}+\ldots+a_1$

$P^{(2)}(x)=a_m\cdot m\cdot(m-1)\cdot x^{m-1}+\ldots+2a_2$

② Η $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geq 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x\geq 0\\ 2x, & x<0\end{cases}$, $f''(x)=\begin{cases}6x, & x\geq 0\\ 2, & x<0\end{cases}$

Η f'' δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, 1-1, συνεχής. Υποθέτουμε ότι η f είναι παρ/μη στο $x_0\in(\alpha,\beta)$ και η $f'(x_0)\neq 0$. Τότε η f^{-1} είναι παρ/μη στο $f(x_0)$ και

$$(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης: (1) Έστω $\exp: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\exp(x)=e^x$. Τότε $\exp'(x_0)=\exp(x_0)$ $\forall x_0\in\mathbb{R}$

(2) Έστω $\ln: (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $\ln(x)=\exp^{-1}(x)$. Τότε $\ln'(x_0)=\frac{1}{x_0}$ $\forall x_0\in\mathbb{R}$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις: (1) Τόξο ημιτόνου (arcsin): Η $\sin: \mathbb{R}\to[-1,1]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ άρα και 1-1. Άρα, ορίζεται η αντίστροφη της $\sin: \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ την οποία τη συμβολίζουμε με $\arcsin: [-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Η arcsin είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παρ/μη στο $(-1,1)$ και

$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$.

Αν $y=\sin x$ και χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $\sin^2x+\cos^2x=1$ έχουμε $\arcsin'(y)=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ $\forall y\in(-1,1)$.

(2) Τόξο συνημιτόνου (arccos): Η $\cos: \mathbb{R}\to[-1,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$, άρα 1-1. Άρα ορίζεται η αντίστροφη της $\cos: [0,\pi]\to[-1,1]$ την οποία συμβολίζουμε με $\arccos: [-1,1]\to[0,\pi]$. Η arccos είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(x)} = \frac{-1}{\sin(x)}$.

Αν θέσουμε $y=\cos x$ και χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $\sin^2x+\cos^2x=1$ έχουμε $\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ $\forall y\in(-1,1)$.

(3) Τόξο εφαπτομένης (arctan): Η $\tan: \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και επί στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, άρα συνεχής. Άρα ορίζεται η αντίστροφη της $\tan: \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ την οποία τη συμβολίζουμε με $\arctan: \mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Η arctan είναι παρ/μη $\forall x\in\mathbb{R}$ και

$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2x}$ και για $y=\tan x$ έχουμε

$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ $\forall y\in\mathbb{R}$.