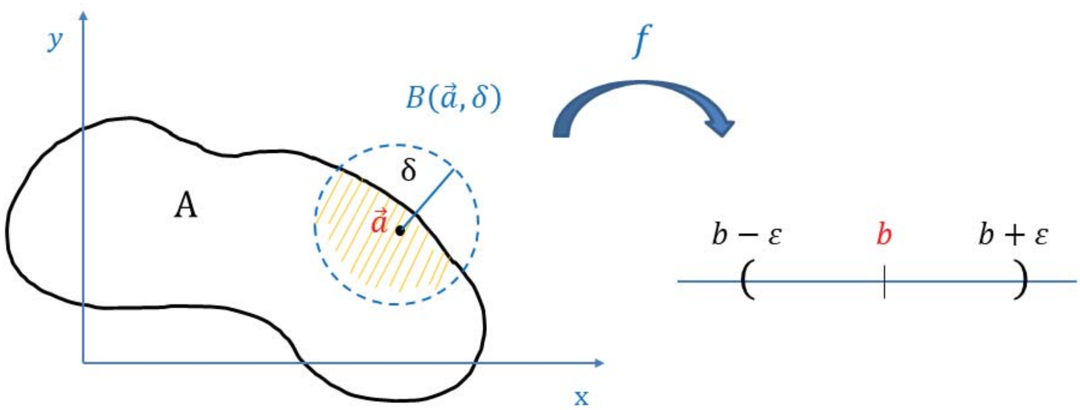
Όρια Πραγματικών Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών

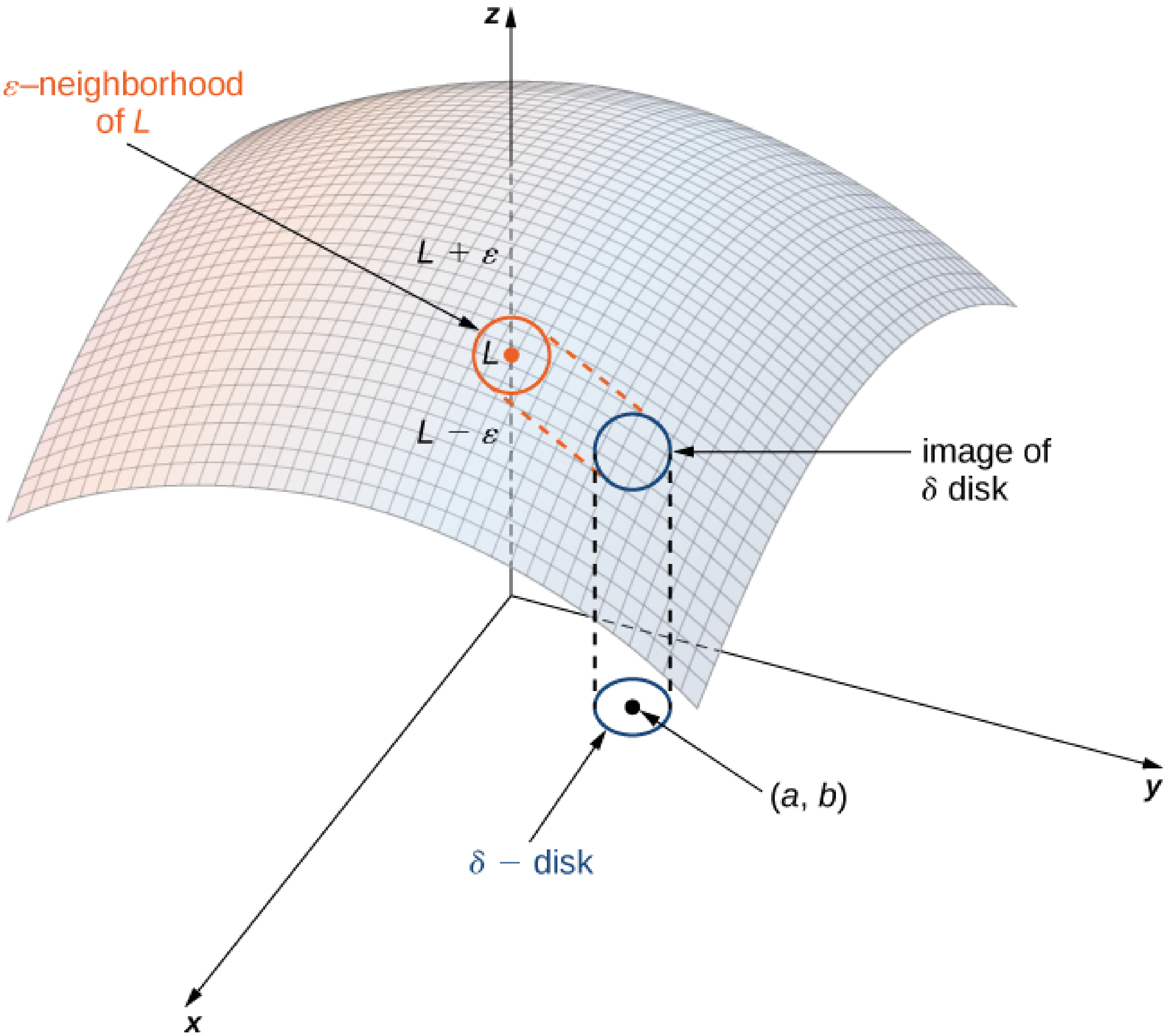
Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το $\overrightarrow{\alpha}$ καλείται σημείο συσσώρευσης του Α και γράφουμε:

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) = b, \quad b \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0 \ : \ |f(\overrightarrow{x}) - b| < \varepsilon,$$
$$\text{για κάθε } \overrightarrow{x} \in A \text{ με } 0 < ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\alpha}|| < \delta.$$

Γεωμετρική Ερμηνεία της Έννοιας του Ορίου Πραγματικής Συνάρτησης




z
ε–neighborhood
of L
L + ε
L
L − ε
image of
δ disk
(a, b)
δ − disk
x
y

Μοναδικότητα του Ορίου

Το όριο όταν υπάρχει, είναι *μοναδικό*.

Αλγεβρικές Ιδιότητες Ορίων

Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και το $\overrightarrow{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A. Επίσης, έστω ότι υπάρχουν και τα όρια:

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) \; \kappa\alpha\iota \; \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x})$$

. Τότε υπάρχουν και τα παρακάτω όρια:

- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} (f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x})) = \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) + \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x})$$
- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} \lambda f(\overrightarrow{x}) = \lambda \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x})$$
- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} (f(\overrightarrow{x}) g(\overrightarrow{x})) = \left(\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) \right) \left(\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x}) \right)$$
- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} \frac{(f(\overrightarrow{x}))}{(g(\overrightarrow{x}))} = \frac{\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x})}{\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x})}, \quad \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x}) \neq 0$$

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 \ .$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή $x = rcos\theta, y = rsin\theta$. Με αντικατάσταση πάνω στο όριο προκύπτει το εξής:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3cos^2\theta sin\theta}{r^2(cos^2\theta + sin^2\theta)} = \lim_{r\to 0} rcos^2\theta sin\theta = 0 \ ,$$

διότι $r \to 0$ (μηδενική) και $cos^2\theta sin\theta$ φραγμένη, άρα όλη η ποσότητα τείνει στο μηδέν (μηδενική επί φραγμένη είναι μηδενική). Τέλος, αφού το όριο είναι μοναδικό ισχύει το ζητούμενο.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + ysin\frac{1}{x} \right) = 0, \quad x \neq 0$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\left| x + ysin\frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \left| sin\frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \to 0$$

καθώς τα x και y τείνουν στο μηδέν. Δηλαδή

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + ysin\frac{1}{x} \right) \leq 0$$

Επομένως,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + ysin\frac{1}{x} \right) = 0$$

Αρχή της Μεταφοράς ή Ακολουθιακό Κριτήριο

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και το $\overrightarrow{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Υπάρχει το $\lim\limits_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) = b$
- Για κάθε ακολουθία $(\overrightarrow{x_\nu})$ του A με $\overrightarrow{x_\nu} \neq \overrightarrow{\alpha}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\overrightarrow{x_\nu} \to \overrightarrow{\alpha}$ έχουμε $f(\overrightarrow{x_\nu}) \to b$

Άσκηση 3

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} x sin\frac{1}{y} \ .$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή της Μεταφοράς. Θέτουμε

$$f(x,y) = x sin\frac{1}{y}, \quad y \neq 0$$

. Θεωρούμε τις ακολουθίες $(\overrightarrow{v_\nu})$ και $(\overrightarrow{w_\nu})$ ως εξής:

$$(\overrightarrow{v_\nu}) = \left(1, \frac{1}{2\nu\pi}\right) \to (1,0)$$

$$(\overrightarrow{w_\nu}) = \left(1, \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \to (1,0)$$

Θεωρούμε τις αντίστοιχες ακολουθίες των τιμών της συνάρτησης

$$f(\overrightarrow{v_\nu}) = f\left(1, \frac{1}{2\nu\pi}\right) = sin(2\nu\pi) = 0 \to 0$$

$$f(\overrightarrow{w_\nu}) = f\left(1, \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$$

Επομένως από την Αρχή της Μεταφοράς, δεν υπάρχει το όριο.

Κριτήριο Μή - Ύπαρξης του Ορίου

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ σ.σ του A. Τότε αν δύο διαφορετικές καμπύλες (δρόμοι) οδηγούν σε διαφορετικά όρια, λόγω της μοναδικότητας του ορίου συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει το όριο.

Άσκηση 4

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + (x-y)^8}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- $y -$ άξονας (δηλαδή $x = 0$).

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0 + (0-y)^8} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^8} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

(Σχόλιο: Η πράξη μέσα στο όριο προηγείται. Μετά βάζουμε το όριο).

- $x = y$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + 0} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x,y)$ για $(x,y) \to (0,0)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 5

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- $y-$ άξονας $(x=0)$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

- $x-$ άξονας $(y=0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x,y)$ για $(x,y)\to(0,0)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 6

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- $y-$ άξονας $(x=0)$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

- $x=y$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Επομένως το όριο της $f(x, y)$ για $(x, y) \to (0, 0)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 7
Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3 + y^3}$$

Λύση
Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- $y -$ άξονας $(x = 0)$

$$\lim_{y\to 0} f(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^3} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

- $x = y^2$

$$\lim_{y\to 0} f(y^2, y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^6 + y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^3(y^3 + 1)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^3 + 1} = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x, y)$ για $(x, y) \to (0, 0)$ δεν υπάρχει.

Συνεχείς Πραγματικές Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f ονομάζεται συνεχής στο $\overrightarrow{\alpha} \in A$ αν υπάρχει το $\lim\limits_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x})$ και είναι ίσο με $f(\overrightarrow{\alpha})$

Παρατήρηση:
1) Η f ειναι συνεχής στο A όταν ειναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.
2) Αν η f δεν είναι συνεχής στο $\overrightarrow{\alpha}$ τότε το $\overrightarrow{\alpha}$ ονομάζεται σημείο ασυνέχειας.

Άσκηση 8

Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο (0,0) η συνάρτηση:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση f στο σημείο (0,0) πρέπει να υπάρχει το όριό της στο σημείο αυτό και να είναι ίσο με $f(0,0)$. Αρχικά λοιπόν θα μελετήσουμε αν υπάρχει το όριο της για $x \to 0,\ y \to 0$ (δηλαδή το όριο του πρώτου κλάδου της όπου $(x,y) \neq (0,0)$). Θα υπολογίσουμε το όριο αυτό:

Α΄ τρόπος (με χρήση πολικών συντεταγμένων):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 cos^2\theta sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r cos^2\theta sin\theta = 0$$

όμοια με την Άσκηση 1.

Β′ τρόπος:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2|y|}{x^2} = |y| \to 0$$

Επομένως το όριο της f για $(x,y) \to (0,0)$ υπάρχει και είναι ίσο με μηδέν. Επιπλέον, για να είναι συνεχής στο (0,0), πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = f(0,0)$$

το οποίο προφανώς ισχύει εφόσον απο τον τύπο της f στο σημείο (0,0) (δηλαδή τον δεύτερο κλάδο της) έχουμε $f(0,0) = 0$. Επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (0,0).

Άσκηση 9

Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο (0,0) η συνάρτηση:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Λύση:

Για να είναι η συνάρτηση $f(x,y)$ συνεχής στο σημείο (0,0) πρέπει να υπάρχει το όριο της για $(x,y) \to (0,0)$ και να είναι ίσο με $f(0,0)$. Από Ασκηση 6, το όριο της συνάρτησης $\frac{xy}{x^2+y^2}$ για $(x,y) \to (0,0)$ δεν υπάρχει, επομένως η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο (0,0).

Άσκηση 10

Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια στα σημεία $(\alpha, 0)$ η παρακάτω συνάρτηση.

$$f(x,y) = \begin{cases} x sin\dfrac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $f(\alpha, 0) = 0 \quad (\forall \alpha)$.

Παίρνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Για $\alpha \neq 0$, θεωρούμε τις ακολουθίες:

$$\left(\alpha, \frac{1}{2n\pi}\right) \to (\alpha, 0)$$

$$\left(\alpha, \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \to (\alpha, 0)$$

Στη συνέχεια παίρνουμε τις f τους και έχουμε:

$$f\left(\alpha, \frac{1}{2n\pi}\right) = \alpha sin(2n\pi) = 0 \to 0$$

$$f\left(\alpha, \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \alpha sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \alpha sin\frac{\pi}{2} = \alpha \to \alpha \neq 0$$

και άρα από την Αρχή της Μεταφοράς δεν υπάρχει το όριο.

Επομένως η f δεν είναι συνεχής στα σημεία $(\alpha, 0)$ για $\alpha \neq 0$ εφόσον δεν υπάρχει καν το όριό της σε αυτά τα σημεία.

Για $\alpha = 0$ έχουμε:

$$\left|\alpha sin\frac{1}{y}\right| \leq |\alpha| \left|sin\frac{1}{y}\right| \leq |\alpha| = 0 \to 0$$

Δηλαδή στο σημείο (0,0) υπάρχει το όριο της f και επιπλέον είναι ίσο με $f(0,0)$ (από τον δεύτερο κλάδο του τύπου της). Επομένως η f είναι συνεχής στο (0,0).

Μερικές Παράγωγοι

Ορισμός: Έστω $f(x, y) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση δύο μεταβλητών και (a, b) ένα σημείο του A. Θεωρώντας ότι μεταβάλλεται μόνο το x (ένω το y παραμένει σταθερό σε μία τιμή $y = b$) θέτουμε $g(x) = f(x, b)$ η οποία είναι μία συνάρτηση μίας μεταβλητής (του x). Η παράγωγος $g'(a)$ όταν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, ονομάζεται **μερική παράγωγος της συνάρτησης f ως προς το x στο σημείο** (a, b) και συμβολίζεται με $f_x(a, b)$. Επομένως, ορίζουμε:

$$f_x(a,b) := g'(a) \ , \ \text{όπου } g(x) = f(x,b) \ ,$$

με τύπο

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \ ,$$

το οποίο μας δίνει τον παρακάτω τύπο:

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \ .$$

Αντίστοιχα, θεωρώντας ότι μεταβάλλεται μόνο το y (και ότι το x παραμένει σταθερό σε μία τιμή $x = a$) ορίζουμε μία συνάρτηση $q(y)$ και θέτουμε $q(y) = f(a, y)$ η οποία είναι μία συνάρτηση μίας μεταβλητής (του y). Επομένως, η παράγωγος $q'(b)$ όταν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, ονομάζεται **μερική παράγωγος της συνάρτησης f ως προς το y στο σημείο** (a, b) και συμβολίζεται με $f_y(a, b)$. Έτσι, ορίζουμε:

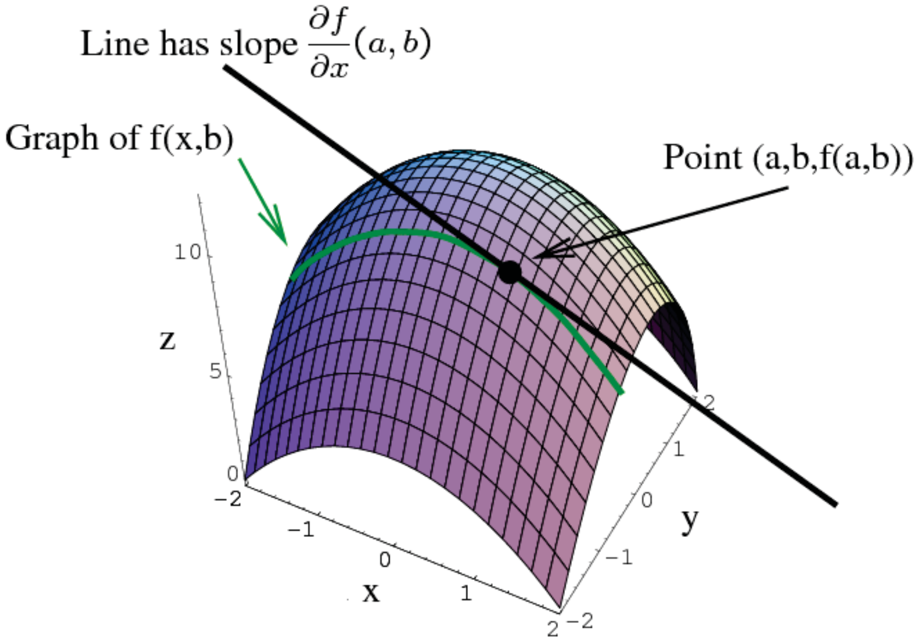
$$f_y(a,b) := q'(b) \ , \ \text{όπου } q(y) = f(a,y) \ ,$$

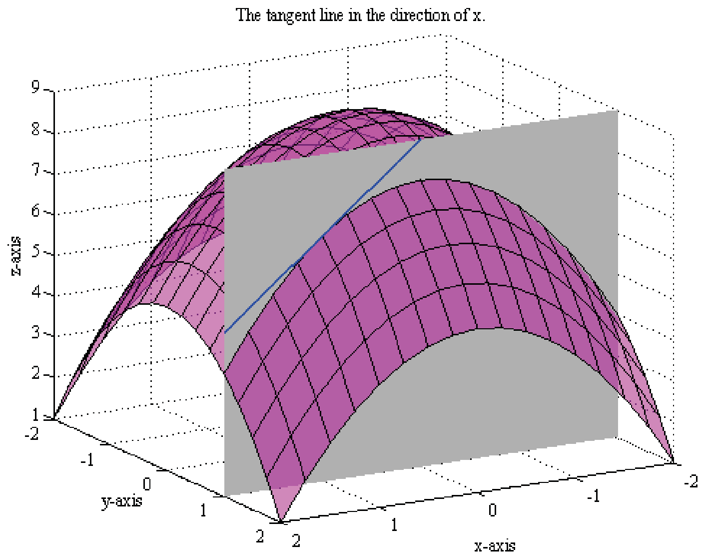
με τύπο

$$q'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{q(b+h) - q(b)}{h} \ ,$$

το οποίο μας δίνει τον παρακάτω τύπο:

$$f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} \ .$$





Στα παραπάνω σχήματα βλέπουμε ότι η μερική παράγωγος $f_x(a,b) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ *είναι η κλίση* (*slope*) *της εφαπτόμενης της καμπύλης* $f(x,b)$ *στο σημείο* (a,b).

Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών. Τότε οι **μερικές παράγωγοι της f ως προς x και ως προς y** αντίστοιχα είναι οι πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών f_x και f_y αντίστοιχα, με τύπους:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \ ,$$
$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \ .$$

(**Συμβολισμός:** $f_x \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $f_y \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y}$).

Ορισμός : Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών, όπου $f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Τότε η **μερική παράγωγος της f ως προς τη μεταβλητή** x_i $(1 \leq i \leq n)$ είναι μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών f_{x_i} με τύπο:

$$f_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h}$$

(υπό την προυπόθεση ότι υπάρχει το παραπάνω όριο στο $\mathbb{R}$).

Το παραπάνω όριο μπορεί να γραφτεί σε διανυσματική μορφή και ώς :

$$f_{x_i}(\overrightarrow{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{x} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{x})}{h} \ ,$$

όπου $\overrightarrow{e_i}$ είναι το διάνυσμα που έχει όλες τις συντεταγμένες ίσες με μηδέν εκτός από την i-οστή συντεταγμένη που είναι ίση με ένα.

(**Συμβολισμός:** $f_{x_i} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$).

Θεώρημα 1: Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δύο πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών, για τις οποίες υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $f_{x_i}(\overrightarrow{x})$ και $g_{x_i}(\overrightarrow{x})$ ως προς τη μεταβλητή x_i, για $1 \leq i \leq n$, στο σημείο $\overrightarrow{x}$. Τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι:

$$1)\ (f+g)_{x_i}(\overrightarrow{x}) = f_{x_i}(\overrightarrow{x}) + g_{x_i}(\overrightarrow{x})\ ,$$

$$2)\ (\lambda f)_{x_i}(\overrightarrow{x}) = \lambda f_{x_i}(\overrightarrow{x})\ , \quad \text{για } \lambda \in \mathbb{R}\ ,$$

$$3)\ (fg)_{x_i}(\overrightarrow{x}) = f_{x_i}(\overrightarrow{x}) g(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x}) g_{x_i}(\overrightarrow{x})\ ,$$

$$4)\ \left(\frac{f}{g}\right)_{x_i}(\overrightarrow{x}) = \frac{f_{x_i}(\overrightarrow{x}) g(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x}) g_{x_i}(\overrightarrow{x})}{(g(\overrightarrow{x}))^2}\ ,$$

όπου στην τελευταία περίπτωση πρέπει $g(\overrightarrow{y}) \neq 0$ για κάθε $\overrightarrow{y} \in B_\delta(\overrightarrow{x}) \subseteq A$ για κάποιο $\delta > 0$.
(**Συμβολισμός:** $B_\delta(\overrightarrow{x}) \equiv B(\overrightarrow{x}, \delta)$ μπάλα κέντρου $\overrightarrow{x}$ και ακτίνας δ).

Άσκηση 1

Εξετάστε αν υπάρχούν οι μερικές παράγωγοι $f_x(1,0)$ και $f_y(1,0)$ της συνάρτησης

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} \ , \ y \neq 0 \\ 0 \ , \ y = 0 \end{cases} .$$

Λύση

Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \ ,$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1,0+h)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\sin\frac{1}{h}\right) \ ,$$

όπου όμως το $\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\sin\frac{1}{h}\right)$ δεν υπάρχει

(π.χ. θεωρούμε τις ακολουθίες $h_n = \dfrac{1}{2n\pi} \to 0$ και $h_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$ και εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς).

Επομένως από τα παραπάνω και τους ορισμούς των μερικών παραγώγων βλέπουμε ότι υπάρχει η μερική παράγωγος $f_x(1,0)$ αλλά δεν υπάρχει η $f_y(1,0)$.

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $f_x(1,2)$ και $f_y(1,2)$ της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^4y + 2e^{-xy} - 2y^2 + 5\ .$$

Λύση

$$f_x(x,y) = 4x^3y - 2ye^{-xy} \Rightarrow f_x(1,2) = 8 - 4e^{-2}$$
$$f_y(x,y) = x^4 - 2xe^{-xy} - 4y \Rightarrow f_y(1,2) = 1 - 2e^{-2} - 8$$

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης

$$f(x,y) = sin\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)$$

Λύση

$$f_x(x,y) = cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right) = cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{3+2x}{1-y}$$
$$f_y(x,y) = cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right) = cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{3x+x^2}{(1-y)^2}$$