# Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

# Συναρτήσεις πιθανότητας συνεχών τυχαίων μεταβλητών

- Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X. Τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας συμβολίζεται με f(x) και ισχύει:
- $0 \leq \mathrm{f(x)} \leq 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f(x)dx} = 1$

- Η συνάρτηση παίρνει τιμές στο [0,1] και το ορισμένο ολοκλήρωμά της στο πεδίο ορισμού της ισούται με μονάδα. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αποκτά έτσι ιδιότητες που προσιδιάζουν στον ορισμό της πιθανότητας.

# Συναρτήσεις πιθανότητας συνεχών τυχαίων μεταβλητών

- Για δύο τιμές της X, τις $x_1$ και $x_2$, η πιθανότητα της X στο διάστημα $[x_1,x_2]$ ισούται με

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

- Αθροιστική Συνάρτηση πιθανότητας ή Συνάρτηση Κατανομής μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

# Μέση τιμή, Διασπορά και Τυπική Απόκλιση συνεχών τυχαίων μεταβλητών

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$Var(X) = \sigma^2 = E[X - E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

# Παράδειγμα

- Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } X < 0 \text{ ή } X > 1 \\ 4x^3 & \text{για } 0 \leq X \leq 1 \end{cases}$$

i. Να αιτιολογηθεί ότι αυτή είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

ii. Να υπολογιστούν οι μέση τιμή της, η διασπορά και η τυπική της απόκλιση.

iii. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(0 \leq X \leq 0{,}1)$.

# Παράδειγμα

i. Για την f(x) ισχύει ότι $0 \leq f(x) \leq 1$. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Πράγματι, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα από 0 έως 1 επειδή οπουδήποτε αλλού η τιμή της f(x) είναι μηδέν:

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} 4x^3 dx = 4\int_{0}^{1} x^3 dx = 4\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = [x^4]_0^1 = 1^4 - 0^4$$
$$= 1$$

# Παράδειγμα

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$= \int_{0}^{1} x4x^{3}dx = 4\int_{0}^{1} x^{4}dx = 4\left[\frac{x^{5}}{5}\right]_{0}^{1} = \frac{4 \cdot 1^{5}}{5}$$

$$- \frac{4 \cdot 0^{5}}{5} = \frac{4}{5}$$

# Παράδειγμα

- $\sigma^2 = E[X - E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 4x^3 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{16}{25}\right) 4x^3 dx = \left[\frac{4x^6}{6}\right]_0^1 - \left[\frac{32x^5}{25}\right]_0^1 + \left[\frac{16x^4}{25}\right]_0^1 = \frac{4 \cdot 1^6}{6} - \frac{32 \cdot 1^5}{25} + \frac{16 \cdot 1^4}{25} = \frac{3}{5} - \frac{18}{16} + \frac{27}{48} = 0{,}027$

- $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}027} = 0{,}16$

# Παράδειγμα

iii. $P(0 \leq X \leq 0{,}1) = \int_0^{0{,}1} f(x)dx = [x^4]_0^{0{,}1} =$
$= 0{,}1^4 - 0^4 = 0{,}0001$

# Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Οι κατανομές που χρησιμοποιούνται περισσότερο είναι:

- Η Κανονική κατανομή
- Η κατανομή t του Student
- Η $\chi^2$ κατανομή
- Η F κατανομή