

Θέματα Συνδυαστικής Ανάλυσης

Καθηγητής Χρήστος Γ. Μασούρος

Διατάξεις - Μεταθέσεις

Έστω E ένα σύνολο με n στοιχεία και έστω ένας θετικός ακέραιος k μικρότερος ή ίσος του n ($k \leq n$). Κάθε διατεταγμένη k -αδα:

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

διαφορετικών μεταξύ τους στοιχείων του E ονομάζεται **διάταξη** k στοιχείων του E ή όταν θέλουμε να είμαστε πιο ακριβείς **διάταξη των n στοιχείων ανά k** .

Στην περίπτωση που $n = k$ χρησιμοποιούμε τον όρο **μετάθεση** των n στοιχείων.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

Πρόταση: Ο αριθμός $(v)_k$ των διατάξεων v στοιχείων ανά k δίνεται από τον τύπο:

$$(v)_k = v(v-1)\cdots(v-k+1), \quad 1 \leq k \leq v$$

Πόρισμα: Ο αριθμός των μεταθέσεων v στοιχείων δίνεται από τον τύπο:

$$v! = 1 \cdot 2 \cdots v$$

Πόρισμα: Ο αριθμός $(v)_k$ των διατάξεων v στοιχείων ανά k δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{v}{k} = \frac{v!}{(v-k)!}$$

Διατάξεις - Μεταθέσεις

Παράδειγμα. Σε ένα supermarket υπάρχουν τρία ταμεία T_1, T_2, T_3 . Αν στα ταμεία αυτά μπορούν να εργασθούν 6 διαφορετικοί υπάλληλοι με πόσους τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν τα ταμεία; Ποια θα ήταν η απάντηση αν η εταιρεία διέθετε 6 ταμεία;
Απάντηση.

T_1	T_2	T_3
6	5	4

$$(6)_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
6	5	4	3	2	1

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Διατάξεις με επανάληψη

Έστω E ένα σύνολο με n στοιχεία και έστω ένας θετικός ακέραιος k . Κάθε διατεταγμένη k -αδα:

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

όχι κατ' ανάγκη διαφορετικών στοιχείων του E ονομάζεται **διάταξη** k στοιχείων του E με επανάληψη ή όταν θέλουμε να είμαστε πιο ακριβείς **διάταξη με επανάληψη των n στοιχείων ανά k** .

Έτσι στις διατάξεις με επανάληψη ανήκουν διατεταγμένες k -αδας της μορφής

$$(a_1, a_1, \dots, a_1) (a_1, a_2, \dots, a_2) \text{ κλπ}$$

Διατάξεις με επανάληψη

Πρόταση: Ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων v στοιχείων ανά k είναι ίσος με v^k .

Παράδειγμα. Όταν συμπληρώνουμε ένα δελτίο ΠΡΟ-ΠΟ σχηματίζουμε μια διατεταγμένη 13-αδα, η οποία δίνει μια στήλη του δελτίου, χρησιμοποιώντας τα σύμβολα 1, 2, X. Όλες οι διαφορετικές στήλες που μπορούμε να συμπληρώσουμε στο είναι όσες οι διατάξεις με επανάληψη των 3 συμβόλων ανά 13. Δηλαδή μπορούμε να συμπληρώσουμε

$$3^{13} = 1594323 \quad \text{στήλες}$$

Συνδυασμοί

Έστω E ένα σύνολο με n στοιχεία και έστω ένας θετικός ακέραιος k μικρότερος ή ίσος του n ($k \leq n$).

Συνδυασμός των n στοιχείων ανά k λέγεται κάθε (μη διατεταγμένη) συλλογή k **διαφορετικών** μεταξύ τους στοιχείων του E .

Δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι **συνδυασμός** των n στοιχείων ενός συνόλου E ανά k είναι κάθε υποσύνολο του E με k στοιχεία.

Το πλήθος των συνδυασμών των n στοιχείων ανά k

συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$

Συνδυασμοί

Πρόταση: Ο αριθμός $\binom{v}{k}$ των συνδυασμών v στοιχείων ανά k δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{v}{k} = \frac{v!}{k!(v-k)!}, \quad 1 \leq k \leq v$$

Για $k=0$ θέτουμε από σύμβαση:

$$\binom{v}{0} = 1$$

Συνδυασμοί

Στην περίπτωση που $k > n$ δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε κανένα συνδυασμό των n στοιχείων ανά k , αφού δεν υπάρχουν k διαφορετικά στοιχεία για να χρησιμοποιηθούν. Έτσι θέτουμε:

$$\binom{n}{k} = 0, \text{ για } k > n$$

Για $n=k$ έχουμε:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα. Σε μια υπηρεσία εργάζονται 7 γυναίκες και 8 άνδρες. Να υπολογιστούν πόσες διαφορετικές πενταμελείς ομάδες εργασίας μπορούν να σχηματισθούν, αποτελούμενες από 2 γυναίκες και 3 άνδρες.

Απάντηση. Η επιλογή των γυναικών μπορεί να γίνει κατά

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 5!} = 21$$

τρόπους. Η επιλογή των ανδρών μπορεί να γίνει κατά

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 5!} = 56$$

τρόπους. Επομένως ο ζητούμενος αριθμός ομάδων εργασίας θα είναι

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{8}{3} = 21 \cdot 56 = 1176$$