

Πολυωνυμικές Εξισώσεις 1ου και 2ου Βαθμού Μεθοδολογία και Ασκήσεις

Γενική Μεθοδολογία

1. Εξίσωση 1ου Βαθμού (Γραμμική)

- Κανουμε πραξεις, χωριζουμε γνωστους απο αγνωστους
- Γενική μορφή: $ax = \beta$, όπου $a \neq 0$.
- Λύση: $x = \frac{\beta}{a}$.
- Παράδειγμα: $3(x + 1) - 9 = 0 \Rightarrow 3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$.

2. Εξίσωση 2ου Βαθμού (Τετραγωνική)

- Γενική μορφή: $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $a \neq 0$.
- Μέθοδοι επίλυσης:
 1. Παραγοντοποίηση (όταν είναι εφικτή).
 2. Τύπος του τριωνύμου:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{όπου } \Delta = \beta^2 - 4a\gamma.$$

3. Η Διακρίνουσα και η Φύση των Ριζών

Η τιμή της διακρίνουσας (Δ) καθορίζει το πλήθος και το είδος των ριζών:

- $\Delta > 0$: Δύο πραγματικές και **άνισες** ρίζες.
- $\Delta = 0$: Μία **διπλή** πραγματική ρίζα: $x = -\frac{\beta}{2a}$.
- $\Delta < 0$: **Καμία πραγματική ρίζα** (στο $\mathbb{R}$). Οι ρίζες είναι μιγαδικές συζυγείς.

4. Χρήσιμες Ιδιότητες (Τύποι Ίετα)

Για την εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με ρίζες x_1, x_2 :

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}.$$

Αν $\Delta \geq 0$, η παραγοντοποίηση είναι: $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ασκήσεις

A. Εξισώσεις 1ου Βαθμού

1. $5(x - 2) - 3(2x + 1) = 4x - 7$
2. $\frac{2x - 1}{3} - \frac{x + 4}{2} = \frac{5x}{6} + 1$
3. $|2x - 3| = 7$ (εξίσωση με απόλυτη τιμή)
4. $\frac{1}{x - 2} + \frac{3}{x + 1} = \frac{4}{x}$ (προσοχή στους περιορισμούς)
5. $\sqrt{3x + 1} = 2x - 1$ (εξίσωση με ρίζα, επαλήθευση απαραίτητη)
6. Λύστε ως προς x : $a(x + b) = c(x - d)$, με $a \neq c$.
7. $2^{x-1} = 8$ (εκθετική που ανάγεται σε γραμμική)
8. $\log_2(x + 3) = 4$ (λογαριθμική που ανάγεται σε γραμμική)
9. $\frac{x}{x - 1} + \frac{x - 1}{x} = \frac{5}{2}$
10. $|x + 2| + |x - 1| = 5$

B. Εξισώσεις 2ου Βαθμού - Βασικές

11. $3x^2 - 7x + 2 = 0$
12. $x^2 - 5x = 0$ (ατελής, λύση με παραγοντοποίηση)
13. $4x^2 - 9 = 0$ (ατελής, διαφορά τετραγώνων)
14. $x^2 - 6x + 9 = 0$ (τριώνυμο τέλειου τετραγώνου, διπλή ρίζα)
15. $x^2 + 4x + 5 = 0$ ($\Delta < 0$, μιγαδικές ρίζες)

Γ. Εξισώσεις 2ου Βαθμού - Δύσκολες

16. $(x - 2)(x + 3) = 14$ (απλοποίηση πρώτα)
17. $x^2 - |x| - 6 = 0$ (περίπτωση για $x \geq 0$ και $x < 0$)
18. $\frac{x}{x + 1} + \frac{x + 1}{x} = \frac{13}{6}$ (ανάγεται σε δευτεροβάθμια)
19. $\sqrt{x + 3} = x + 1$ (τετραγωνισμός, επαλήθευση υποχρεωτική)
20. $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ (εκθετική, θέτουμε $y = 2^x$)

Δ. Εξισώσεις με Παράμετρο

21. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $\lambda x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda + 2 = 0$ έχει διπλή ρίζα;
22. Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση $x^2 - \mu x + \mu - 1 = 0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες;
23. Αν οι ρίζες της $x^2 - \kappa x + 2\kappa - 3 = 0$ είναι x_1, x_2 με $x_1^2 + x_2^2 = 4$, βρείτε το κ .
24. Βρείτε το m ώστε οι ρίζες της $x^2 + mx + 8 = 0$ να έχουν λόγο $2 : 1$.
25. Για ποιο α η εξίσωση $(\alpha - 2)x^2 - 4x + (\alpha - 3) = 0$ έχει ρίζες αντίστροφες;

Ε. Οικονομικές Εφαρμογές

26. **Κόστος-Έσοδο-Κέρδος:** Το κόστος παραγωγής x μονάδων δίνεται από $C(x) = 2x^2 - 100x + 5000$ και η τιμή πώλησης ανά μονάδα είναι $p = 300$. Για ποιο x το κέρδος είναι μηδέν ($R(x) = C(x)$), όπου $R(x) = 300x$.
27. **Μεγιστοποίηση Κέρδους:** Η συνάρτηση κέρδους είναι $P(x) = -x^2 + 200x - 5000$. Σε ποιο x (ποσότητα) επιτυγχάνεται το μέγιστο κέρδος;
28. **Ισορροπία Αγοράς:** Συναρτήσεις Ζήτησης και Προσφοράς: $Q_D = 100 - 2P$, $Q_S = P^2 - 10$. Βρείτε την τιμή ισορροπίας ($Q_D = Q_S$).
29. **Αποτίμηση Περιουσιακών Στοιχείων:** Η αξία ενός μηχανήματος μετά από t έτη είναι $V(t) = 20000 - 1500t + 25t^2$. Σε πόσα έτη φθάνει στην ελάχιστη αξία του.
30. **Οριακό Έσοδο:** Η συνάρτηση εσόδων είναι $R(x) = 50x - 0.1x^2$. Βρείτε την ποσότητα x για την οποία το οριακό έσοδο ($MR = R'(x)$) μηδενίζεται. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε παραγώγιση ή την ιδιότητα της κορυφής της παραβολής).