

Εκθετικές Εξισώσεις

20 Ασκήσεις Διαφόρων Επιπέδων

Μέθοδοι Επίλυσης Εκθετικών Εξισώσεων

1. Μέθοδος Ισοδυνάμων Βάσεων

Αν $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, τότε $f(x) = g(x)$, με $a > 0$ και $a \neq 1$.

Παράδειγμα: $2^{x+1} = 8$

$$2^{x+1} = 2^3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

2. Μέθοδος Παραγοντικής Απαλλαγής

Εξάγουμε κοινό παράγοντα.

Παράδειγμα: $2^{x+1} + 2^x = 12$

$$2^x \cdot 2 + 2^x = 12 \Rightarrow 2^x(2 + 1) = 12 \Rightarrow 3 \cdot 2^x = 12 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

3. Μέθοδος Αντικατάστασης

Θέτουμε $y = a^x$ και λύνουμε δευτεροβάθμια εξίσωση.

Παράδειγμα: $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

$$(2^2)^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

Θέτουμε $y = 2^x$:

$$y^2 - 6y + 8 = 0 \Rightarrow (y - 2)(y - 4) = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ή } y = 4$$

$$2^x = 2 \Rightarrow x = 1, \quad 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

4. Μέθοδος Λογαρίθμησης

Χρήσιμη όταν δεν μπορούμε να φέρουμε ίδιες βάσεις.

Παράδειγμα: $2^x = 3$

$$\ln(2^x) = \ln 3 \Rightarrow x \ln 2 = \ln 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Ιδιότητες Εκθετικών Συναρτήσεων

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^0 = 1, a^1 = a$

20 Ασκήσεις Εκθετικών Εξισώσεων

A. Βασικές Εκθετικές Εξισώσεις

1. $2^x = 8$
2. $3^{x-1} = 27$
3. $5^{2x} = 125$
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$
5. $4^{x+1} = 64$

B. Εξισώσεις με Διάφορες Βάσεις

6. $2^x = 3^{x-1}$
7. $5^{x+2} = 25^{x-1}$
8. $9^{2x-1} = 27^{x+2}$
9. $8^{x-1} = 4^{x+3}$
10. $16^{2x} = 32^{x+1}$

Γ. Εξισώσεις με Πρόσθεση/Αφαίρεση

11. $2^{x+1} + 2^x = 12$
12. $3^{x+1} - 3^{x-1} = 24$
13. $5^x - 5^{x-2} = 24$
14. $2^{x+2} - 2^{x-1} = 28$
15. $4^{x+1} + 4^x = 80$

Δ. Εξισώσεις με Αντικατάσταση ($y = a^x$)

16. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

17. $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

18. $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

19. $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$

20. $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$

Επιπλέον Προχωρημένες Ασκήσεις

21. $2^{x^2-3x} = 4$

22. $3^{x^2-1} = \frac{1}{27}$

23. $5^{|x-2|} = 25$

24. $2^{x+3} = 3^{x+1}$ (λογάριθμοι απαραίτητοι)

25. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

Λυμένες Ασκήσεις (Για Οδηγία)

Άσκηση 1: $2^x = 8$

$$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

Άσκηση 11: $2^{x+1} + 2^x = 12$

$$2^x \cdot 2 + 2^x = 12 \Rightarrow 2^x(2 + 1) = 12 \Rightarrow 3 \cdot 2^x = 12 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Άσκηση 16: $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

$$(2^2)^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

Θέτουμε $y = 2^x$:

$$y^2 - 6y + 8 = 0 \Rightarrow (y - 2)(y - 4) = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ή } y = 4$$

$$2^x = 2 \Rightarrow x = 1, \quad 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Σημαντικές Σημειώσεις

- Η εκθετική συνάρτηση a^x ορίζεται μόνο για $a > 0$ και $a \neq 1$.
- **Μονοτονία:**
 - Αν $a > 1$: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$ (αύξουσα)
 - Αν $0 < a < 1$: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$ (φθίνουσα)
- Πάντα να ελέγχετε αν οι λύσεις σας ικανοποιούν την αρχική εξίσωση.