

Εισαγωγή στη Θεωρία Συνόλων

Βασικοί Ορισμοί

Σύνολο: Μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων (στοιχείων). Συμβολισμός: $A, B, C, \dots$

Στοιχείο: Ένα αντικείμενο που ανήκει σε ένα σύνολο. Συμβολισμός: $a \in A$ (το a ανήκει στο A), $a \notin A$ (το a δεν ανήκει στο A)

Κενό Σύνολο: Το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Συμβολισμός: $\emptyset$ ή $\{\}$

Υποσύνολο: Το A είναι υποσύνολο του B ($A \subseteq B$) αν κάθε στοιχείο του A ανήκει και στο B

Γνήσιο Υποσύνολο: Το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B ($A \subset B$) αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$

Ίσα Σύνολα: $A = B$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$

Καθολικό Σύνολο: Το σύνολο U που περιέχει όλα τα στοιχεία που εξετάζουμε σε ένα πρόβλημα

Πληθάριθμος: Το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου A . Συμβολισμός: $|A|$ ή $n(A)$

Πράξεις Συνόλων

Ένωση: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$

Τομή: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$

Διαφορά: $A - B = A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$

Συμπλήρωμα: A^c ή $A^c = U - A = \{x : x \in U \text{ και } x \notin A\}$

Συμμετρική Διαφορά: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

Καρτεσιανό Γινόμενο: $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ και } b \in B\}$

Δυναμοσύνολο: $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$ (το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A)

Ιδιότητες Πράξεων

Ιδιότητες Ένωσης και Τομής

Αντιμεταθετική:

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

Προσεταιριστική:

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Επιμεριστική:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ταυτότητες:

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap U = A$
- $A \cup U = U$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Απορρόφηση:

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

Συμπλήρωμα:

- $A \cup A' = U$
- $A \cap A' = \emptyset$
- $(A')' = A$

Νόμοι De Morgan

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Ιδιότητες Διαφοράς

- $A - B = A \cap B'$
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Πληθάριθμος

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- $|P(A)| = 2^{|A|}$

20 Ασκήσεις Μέσaiας Δυσκολίας

Άσκηση 1

Δίνονται τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Να βρείτε τα: (α) $A \cup B$, (β) $A \cap B$, (γ) $A - B$, (δ) $B - A$

Άσκηση 2

Αν $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ είναι άρτιος και } x \leq 10\}$, να βρείτε το B' (ως προς το A).

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

Άσκηση 4

Δίνονται τα σύνολα $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Να βρείτε: (α) $A \times B$, (β) $B \times A$, (γ) $A \times A$

Άσκηση 5

Αν $|A| = 5$, να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του $P(A)$.

Άσκηση 6

Να αποδείξετε τον πρώτο νόμο De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Άσκηση 7

Σε τάξη 30 μαθητών, 18 μαθαίνουν Γαλλικά, 15 μαθαίνουν Γερμανικά και 5 μαθαίνουν και τα δύο. Πόσοι μαθητές δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες;

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $A \cup B = B$.

Άσκηση 9

Αν $A - B = A$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα σύνολα A και B ;

Άσκηση 10

Δίνονται τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{3, 4, 5\}$. Να βρείτε το $(A \cup B) \cap C$.

Άσκηση 11

Να αποδείξετε ότι $A \cap B = A$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$.

Άσκηση 12

Αν $|A| = 20$, $|B| = 15$ και $|A \cap B| = 8$, να βρείτε το $|A \cup B|$.

Άσκηση 13

Να βρείτε τη συμμετρική διαφορά $A \Delta B$ όπου $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Άσκηση 14

Να αποδείξετε ότι $A - (A - B) = A \cap B$.

Άσκηση 15

Δίνεται το καθολικό σύνολο $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ και τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Να βρείτε το $(A' \cup B)'$.

Άσκηση 16

Αν $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$, να βρείτε το $A \cap B$.

Άσκηση 17

Σε έρευνα 100 ατόμων για τρία προϊόντα A, B, C βρέθηκε ότι: 50 χρησιμοποιούν το A, 40 το B, 30 το C, 20 τα A και B, 15 τα B και C, 10 τα A και C, και 5 και τα τρία. Πόσα άτομα δεν χρησιμοποιούν κανένα από τα τρία προϊόντα;

Άσκηση 18

Να αποδείξετε ότι $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

Άσκηση 19

Αν $P(A) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, να βρείτε το σύνολο A και το $|P(P(A))|$.

Άσκηση 20

Να αποδείξετε ότι $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.