ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Σημειώσεις στη Θεωρία Οικονομικής Μεγέθυνσης

Νίκος Θεοχαράκης, Εαρινό εξάμηνο 2022

Το υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης του Robert E. Lucas, Jr.

Σε δύο διαλέξεις στο Πανεπιστήμιο του Cambridge (Marshall Lectures) το 1985 ο οικονομολόγος Robert E. Lucas, Jr. (γεν. 1937, Nobel 1985) μίλησε με θέμα «On the Mechanics of Economic Development». Οι διαλέξεις αυτές επικαιροποιημένες δημοσιεύθηκαν με τον ίδιο τίτλο το 1988 στο περιοδικό *Journal of Monetary Economics* [22 (1): 3-42]. Όπως γράφει ο Lucas στη σύνοψη (abstract) του άρθρου του

> Αυτό το άρθρο εξετάζει τις προοπτικές για την οικοδόμηση μιας νεοκλασικής θεωρίας για την μεγέθυνση και το διεθνές εμπόριο που είναι συμβατή με ορισμένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της οικονομικής ανάπτυξης. Τρία υποδείγματα εξετάζονται και συγκρίνονται με τα εμπειρικά δεδομένα: ένα υπόδειγμα που δίνει έμφαση στη συσσώρευση φυσικού κεφαλαίου και στην τεχνολογική αλλαγή, ένα υπόδειγμα που δίνει έμφαση στη συσσώρευση ανθρώπινου κεφαλαίου μέσω της σχολικής εκπαίδευσης και ένα υπόδειγμα που δίνει έμφαση στη συσσώρευση εξειδικευμένου ανθρώπινου κεφαλαίου μέσω της μάθησης μέσω της πράξης (learning-by-doing).

Το πιο ενδιαφέρον μέρος του άρθρου είναι η συμβολή του Lucas για μια θεωρία ανθρώπινου κεφαλαίου (human capital) που προστίθεται στα υποδείγματα ενδογενούς μεγέθυνσης (endogenous growth). Είναι όμως εξίσου ενδιαφέρων ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζει το υπόδειγμα Solow για την εξωγενή μεγέθυνση, χρησιμοποιώντας το άρθρο του David Cass[1] που ουσιαστικά το τροποποιεί σε ένα υπόδειγμα Ramsey-Cass-Koopmans από το οποίο το ποσοστό αποταμίευσης s είναι μεν σταθερό στην τροχιά ισόρροπης μεγέθυνσης, αλλά προκύπτει ενδογενώς από τις υποκειμενικές και αντικειμενικές παραμέτρους του υποδείγματος. Οι σημειώσεις αυτές έχουν γραφεί για να σας βοηθήσουν να προσεγγίσετε το τεχνικό μέρος του άρθρου του Lucas επειδή παρουσιάζει αρκετές τεχνικές δυσκολίες. Δεν θα αναφερθώ στο τρίτο υπόδειγμα – το learning-by-doing – ούτε και στον τρόπο που ο Lucas αντιπαραβάλλει τα εμπειρικά δεδομένα με τα υποδείγματα. Ευελπιστώ ότι μετά από αυτές τις σημειώσεις θα μπορέσετε να διαβάσετε το ίδιο το άρθρο που αποτελεί ένα από τα βασικά υποδείγματα ενδογενούς μεγέθυνσης.

[1] David Cass. 1965. “Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation.” *Review of Economic Studies* 32 (3): 233–40. Ο Lucas το αναφέρει ως Cass 1961 και δεν το περιλαμβάνει στη βιβλιογραφία.

Ξεκινάμε με τις μεταβλητές, τις παραμέτρους και τον τρόπο που συμβολίζονται.

1. Εξωγενής μεγέθυνση (Νεοκλασική θεωρία μεγέθυνσης)

Σύμβολα

$N(t)$ εργασία (άτομα ή ώρες), με εξωγενή σταθερό ρυθμός μεγέθυνσης $\lambda \equiv \dot{N}(t)/N(t)$

$c(t)$ κατά κεφαλήν [ή ανά μονάδα εργασίας] κατανάλωση

Προτιμήσεις

Η μεγιστοποιητέα συνάρτηση χρησιμότητας της οικονομίας έχει τη μορφή

$$\int_o^\infty e^{-\rho t} \frac{1}{1-\sigma}\left[c(t)^{1-\sigma} - 1\right] N(t)dt \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $\frac{1}{1-\sigma}\left[c(t)^{1-\sigma} - 1\right]$ η στιγμιαία χρησιμότητα (felicity function) η οποία έχει τη μορφή της σταθεράς σχετικής αποστροφής στον κίνδυνο, όπου ρ είναι ο (υποκειμενικός) συντελεστής προεξόφλησης και σ ο συντελεστής (σχετικής) αποστροφής προς τον κίνδυνο όπου ($1/\sigma$ η διαχρονική ελαστικότητα υποκατάστασης στην κατανάλωση). Οι σημειώσεις μου για το υπόδειγμα Ramsey-Cass-Koopmans μπορεί να σας βοηθήσουν να καταλάβετε τη συγκεκριμένη μορφή της συνάρτησης αυτής

$K(t)$ είναι το συνολικό απόθεμα κεφαλαίου, $\dot{K}(t) \equiv dK(t)/dt$ (καθαρή αύξηση αποθέματος κεφαλαίου). Το συνολικό προϊόν αποτελείται από την κατανάλωση και την καθαρή αύξηση του κεφαλαιακού αποθέματος, και παράγεται από μια συναθροιστική συνάρτηση παραγωγή τύπου Cobb-Douglas σταθερών αποδόσεων κλίμακας

$$N(t)c(t) + \dot{K}(t) = A(t)K(t)^\beta N(t)^{1-\beta} \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $0 < \beta < 1$ και $A(t)$ είναι «η τεχνολογία» με εξωγενή σταθερό ρυθμό μεγέθυνσης $\mu \equiv \dot{A}(t)/A(t)$. Παρατηρείστε ότι η τεχνολογία εδώ δεν εμφανίζεται ως «αποτελεσματικότητα της εργασίας», όπως στο κλασικό υπόδειγμα Solow, αλλά αυξάνει συνολικά την συνάρτηση παραγωγής. Αυτό εξηγεί γιατί σε ισορροπία ο ρυθμός μεγέθυνσης δεν είναι μ αλλά $\mu/(1\text{-}\beta)$.

Το πρόβλημα της άριστης κατανομής των πόρων διαχρονικά εξαρτάται από την επιλογή των $c(t)$ ανά πάσα στιγμή με δεδομένο ένα αρχικό $K(0)$ και με την παρατήρηση ότι τα $N(t)$ και $A(t)$ εξελίσσονται αυτόνομα. Από τη στιγμή που καθορισθεί το $c(t)$, το $K(t)$ προκύπτει αυτόματα. Προφανώς δεν μεγιστοποιείται η παρούσα κατανάλωση δεδομένου ότι αυτό θα σήμαινε την κατανάλωση όλου του διαθέσιμου κεφαλαίου. Το ζήτημα συνεπώς είναι να βρεθεί μια *αξία* ή *τιμή* για την αύξηση του κεφαλαίου. Χρησιμοποιώντας από την θεωρία του άριστου ελέγχου την έννοια της Χαμιλτονιανής τρέχουσας αξίας (current value Hamiltonian) έχουμε (παραλείποντας το t στις χρονικές μεταβλητές):[2]

$$H(K,\theta,c,t)=\frac{N}{1-\sigma}\left[c^{1-\sigma}-1\right]+\theta\left[AK^{\beta}N^{1-\beta}-Nc\right]$$

Η οποία είναι το άθροισμα της παρούσας χρησιμότητας και του ρυθμού μεταβολής του κεφαλαίου αποτιμώμενο στην «τιμή» $\theta(t)$.

Η συνθήκη πρώτης τάξεως για τη μεγιστοποίηση της H ως προς c είναι:

$$\frac{\partial H}{\partial c}=\frac{N}{1-\sigma}(1-\sigma)c^{-\sigma}-\theta N=N\left(c^{-\sigma}-\theta\right)=0\Rightarrow$$

$$c^{-\sigma}=\theta \qquad \textbf{(3)}$$

Με άλλα λόγια, «τα αγαθά πρέπει να κατανέμονται κάθε στιγμή με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουν την ίδια αξία, στο όριο, είτε ως κατανάλωση είτε ως επένδυση».

Μια άλλη συνθήκη που πρέπει να πληρούται για την επίλυση του προβλήματος είναι η

$$\dot{\theta}=-\frac{\partial H}{\partial K}+\rho\theta=-\theta\beta AK^{\beta-1}N^{1-\beta}+\rho\theta=\left[\rho-\beta AK^{\beta-1}N^{1-\beta}\right]\theta \qquad \textbf{(4)}$$

για κάθε χρονική στιγμή t, εάν η λύση για το $c(t)$ στην εξίσωση (3) πρόκειται να μας δώσει την άριστη οδό (optimal path) $\left(c(t)\right)_0^{\infty}$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3) για να εκφράσουμε την $c(t)$ ως συνάρτηση της $\theta(t)$, δηλ., $c^{-\sigma}=\theta\Rightarrow c=\theta^{-\frac{1}{\sigma}}$, και να αντικαταστήσουμε αυτή την συνάρτηση αντί για την $c(t)$ στις εξισώσεις (2) και (4). Οι δύο αυτές εξισώσεις τώρα μας δίνουν ένα ζεύγος διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού σε όρους του $K(t)$ και της «τιμής» του, $\theta(t)$.

Επιλύοντας αυτό το σύστημα υπάρχει μόνο μια οικογένεια οδών (paths) των $K(t)$ και $\theta(t)$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη για το $K(0)$. Το μοναδικό μέλος αυτής της οικογένειας που ικανοποιεί την transversality condition

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\theta(t)K(t)=0 \qquad \textbf{(5)}$$

είναι η άριστη οδός (optimal path).

Στη συνέχεια ο Lucas επιχειρεί να εντοπίσει μια ειδική λύση που επιτρέπει να βρεθεί η οδός της ισόρροπης μεγέθυνσης (balanced growth path) στην οποία οι τρεις μεταβλητές ($K(t)$, $\theta(t)$, $c(t)$) μεγεθύνονται με σταθερό ρυθμό. Ας συμβολίσουμε λοιπόν με $\boldsymbol{\kappa}$ τον

[2] Για την κατανόηση του προβλήματος του αρίστου ελέγχου (optimal control) και την έννοια της current value Hamiltonian βλ. τις σημειώσεις στο e-class.

ρυθμό μεγέθυνσης της κατά κεφαλήν κατανάλωσης $c(t)$: $\kappa \equiv \dot{c}(t)/c(t)$. Από την (3) προκύπτει ότι $\dot{\theta}(t)/\theta(t) = -\sigma\kappa$. Από την (4) έχουμε

$$\dot{\theta}(t) = \left[\rho - \beta A(t)K(t)^{\beta-1}N(t)^{1-\beta}\right]\theta(t) \Rightarrow \dot{\theta}(t)/\theta(t) = \rho - \beta A(t)K(t)^{\beta-1}N(t)^{1-\beta} = -\sigma\kappa \Rightarrow$$

$$\beta A(t)K(t)^{\beta-1}N(t)^{1-\beta} = \rho + \sigma\kappa \qquad \textbf{(6)}$$

Δηλ., στην ισόρροπη οδό το οριακό προϊόν του κεφαλαίου ισούται με τη σταθερά $\rho+\sigma\kappa$.

Διαιρώντας την (2) με το $K(t)$ και χρησιμοποιώντας την (6) προκύπτει:

$$\frac{N(t)c(t)}{K(t)} + \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = A(t)K(t)^{\beta-1}N(t)^{1-\beta} = \frac{\rho+\sigma\kappa}{\beta} \qquad \textbf{(7)}$$

[Παρατηρείστε ότι το δεύτερο σκέλος της εξίσωσης είναι το μέσο προϊόν του κεφαλαίου το οποίο είναι ανάλογο προς το οριακό προϊόν].

Εφόσον το $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}$ είναι σταθερό, συνεπάγεται ότι και το $\frac{N(t)c(t)}{K(t)}$ είναι σταθερό, συνεπώς ισχύει ότι $\dot{\left(\frac{N(t)c(t)}{K(t)}\right)} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} + \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} + \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \lambda + \kappa \qquad \textbf{(8)}$$

Άρα, η κατά κεφαλήν κατανάλωση $c(t)$ και το κατά κεφαλήν κεφάλαιο $k(t)=K(t)/N(t)$ μεγεθύνονται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό κ.

[Θυμηθείτε ότι $\dot{k}/k = \dot{K}/K - \dot{N}/N = (\kappa+\lambda) - \lambda = \kappa$]

Λογαριθμείστε και παραγωγίστε την (6) και έχετε

$$\beta A(t)K(t)^{\beta-1}N(t)^{1-\beta} = \rho + \sigma\kappa \Rightarrow \ln\beta + \ln A(t) + (\beta-1)\ln K(t) - (\beta-1)\ln N(t) = \ln(\rho+\sigma\kappa) \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + (\beta-1)\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - (\beta-1)\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = 0 \Rightarrow \mu + (\beta-1)(\lambda+\kappa) - (\beta-1)\lambda = \mu + (\beta-1)\kappa = 0 \Rightarrow$$

$$\kappa = \frac{\mu}{1-\beta} \qquad \textbf{(9)}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (7) για να εξαγάγουμε τη σταθερά $\frac{N(t)c(t)}{K(t)}$

$$\frac{N(t)c(t)}{K(t)}+\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}=\frac{\rho+\sigma\kappa}{\beta}\Rightarrow\frac{N(t)c(t)}{K(t)}=\frac{\rho+\sigma\kappa}{\beta}-\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}=\frac{\rho+\sigma\kappa}{\beta}-\left(\lambda+\kappa\right).$$

Αυτό που ενδιαφέρει περισσότερο είναι να υπολογίσουμε το σταθερό ποσοστό αποταμίευσης *s*, το οποίο είναι ίσο με $s=\dfrac{\dot{K}(t)}{N(t)c(t)+\dot{K}(t)}$. [Θυμίζω ότι η αποταμίευση είναι ίση με την επένδυση, δηλ., την καθαρή μεταβολή του κεφαλαιακού αποθέματος, και ότι το προϊόν είναι ίσο με την κατανάλωση συν την επένδυση, άρα το ποσοστό αποταμίευσης είναι ίσο με την αποταμίευση δια το προϊόν]

Κάνοντας τις σχετικές πράξεις και χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες εξισώσεις έχουμε

$$s=\frac{\dot{K}(t)}{N(t)c(t)+\dot{K}(t)}=\frac{\dot{K}(t)/K(t)}{\dfrac{N(t)c(t)}{K(t)}+\dfrac{\dot{K}(t)}{K(t)}}=\frac{\lambda+\kappa}{\left[\dfrac{\rho+\sigma\kappa}{\beta}-\left(\lambda+\kappa\right)\right]+\left(\lambda+\kappa\right)}\Rightarrow$$

$$s=\frac{\beta\left(\lambda+\kappa\right)}{\rho+\sigma\kappa} \qquad \textbf{(10)}$$

Άρα και εδώ έχουμε ένα σταθερό ποσοστό αποταμίευσης, *s*, όπως στο αρχικό υπόδειγμα του Solow με τη διαφορά ότι αυτό δεν είναι εξωγενές και πλέον προκύπτει ενδογενώς στην τροχιά της ισόρροπης μεγέθυνσης και εξαρτάται από τις υποκειμενικές (ρ, σ) και αντικειμενικές (β, λ, $\kappa=\mu/(1-\beta)$) παραμέτρους του υποδείγματος. Τα κατά κεφαλήν μεγέθη κεφαλαίου και κατανάλωσης μεγεθύνονται με σταθερό ρυθμό κ ο οποίος είναι ίσος με τον ρυθμό μεγέθυνσης της τεχνολογίας μ επί το αντίστροφο του μεριδίου της εργασίας στο προϊόν $1/(1-\beta)$ [Βλ. εξίσωση (9)]. Ας σημειωθεί ότι ο *ρυθμός μεγέθυνσης των κατά κεφαλήν μεγεθών* δεν εξαρτάται από τις υποκειμενικές παραμέτρους αλλά μόνο από τα μ και β. Οι υποκειμενικές παράμετροι (ρ, σ) όμως επηρεάζουν το *s* και συνεπώς καθορίζουν το *επίπεδο* επί του οποίου λαμβάνει χώρα η μεγέθυνση. Όσο μικρότερος είναι ο συντελεστής προεξόφλησης και η διαχρονική ελαστικότητα υποκατάστασης τόσο μεγαλύτερο θα είναι το ποσοστό αποταμίευσης στην ισορροπία.

2. Ενδογενής μεγέθυνση με ανθρώπινο κεφάλαιο

Ο Lucas αναζητεί μια τροποποίηση του υποδείγματος εξωγενούς μεγέθυνσης ώστε η μεγέθυνση να μην εξαρτάται από μια αυξανόμενη εξωγενή τεχνολογία. Το $A(t)$ πλέον αντικαθίσταται από μία σταθερά A, και η μηχανή της μεγέθυνσης πλέον είναι το ανθρώπινο κεφάλαιο – ή μάλλον οι εξωτερικότητες που αυτό δημιουργεί – και υπό προϋποθέσεις.

Ο Lucas χρησιμοποιεί την νεοκλασική έννοια του ανθρώπινου κεφαλαίου όπως διατυπώθηκε από τον Theodor Schultz και τον Gary Becker[3] και εργάζεται στην παράδοση της

[3] Theodore W. Schultz. 1963. *The Economic Value of Education*. New York: Columbia University Press. Gary S. Becker. 1964. *Human Capital.* New York: Columbia University Press for the National Bureau of Economic Research.

θεωρίας της ενδογενούς μεγέθυνσης όπως διατυπώθηκε από τους Kenneth J. Arrow, Hirofumi Uzawa και Paul Romer.[4] Στην πραγματικότητα, ο τρόπος που χρησιμοποιεί το ανθρώπινο κεφάλαιο θυμίζει περισσότερο την έννοια της αποτελεσματικότητας της εργασίας του Solow, παρά το ανθρώπινο κεφάλαιο των Schultz και Becker. Διευκρινίζει μάλιστα (σ. 17) ότι: «Με τον όρο ‘ανθρώπινο κεφάλαιο’ ενός ατόμου θα εννοώ [...] απλώς το γενικό επίπεδο δεξιοτήτων του, έτσι ώστε ένας εργαζόμενος με ανθρώπινο κεφάλαιο $h(t)$ να είναι το παραγωγικό ισοδύναμο δύο εργαζομένων με ½ $h(t)$ ο καθένας, ή με τον μισό χρόνο ενός εργαζομένου με $2h(t)$». Το επίπεδο δεξιότητας h ο Lucas το αφήνει να κυμαίνεται από μηδέν έως άπειρο. Συμβολίζει με $N(h)$ τον αριθμό των εργαζομένων με επίπεδο h και ο συνολικός αριθμός εργαζομένων N είναι ίσος με

$N = \int_0^\infty N(h)dh$. Υποθέτει τώρα ότι κάθε άτομο με επίπεδο δεξιότητας h αφιερώνει $u(h)$ του εργάσιμου χρόνου του στην παραγωγή και το υπόλοιπο (1- $u(h)$) στη συσσώρευση ανθρώπινου κεφαλαίου. Βεβαίως ισχύει ότι $0 \le u(h) \le 1$. Ορίζει τώρα την αποτελεσματική εργασία στην παραγωγή (effective workforce in production) N^e, ως

$$N^e = \int_0^\infty u(h)N(h)hdh.$$

Το νόημα αυτού του ορισμού είναι το άθροισμα (ολοκλήρωμα) των εργαζομένων με διαφορετικά επίπεδα δεξιότητας σταθμισμένο με το επίπεδο δεξιότητας και το ποσοστό των ωρών που αφιερώνουν στην παραγωγή για κάθε επίπεδο δεξιότητας. Αυτό είναι το ανάλογο του $N(t)$ στο προηγούμενο υπόδειγμα.

Η διαφοροποίηση και συμβολή του Lucas έρχεται με την επόμενη παραδοχή. Θεωρεί ότι το μέσο επίπεδο δεξιότητας υπεισέρχεται στην συνάρτηση παραγωγής και αυξάνει την παραγωγικότητα όλων των παραγωγικών συντελεστών (*external effect*) πέραν από τη συμβολή σε ατομικό επίπεδο που κάνει κάθε εργαζόμενος με επίπεδο δεξιότητας h (*internal effect*). Αυτό το μέσο επίπεδο δεξιότητας είναι ίσο με

$$h_a = \frac{\int_0^\infty hN(h)dh}{\int_0^\infty N(h)dh}$$

Διαιρεί, με άλλα λόγια, το άθροισμα των εργατών με διαφορετικά επίπεδα δεξιότητας σταθμισμένα με το επίπεδο δεξιότητας με το συνολικό άθροισμα των εργατών. Αφού χρησιμοποιήσαμε τα ολοκληρώματα στο εννοιολογικό επίπεδο, ο Lucas απλοποιεί την ανάλυση του υποθέτοντας ότι όλοι οι εργάτες έχουν το ίδιο επίπεδο δεξιότητας και αφιερώνουν το ίδιο ποσοστό χρόνου στην παραγωγή, h και u, αντίστοιχα. Αυτό απλοποιεί τα πράγματα και το N^e γίνεται τώρα $N^e = uhN$ και το μέσο επίπεδο δεξιότητας είναι και

[4] Kenneth J. Arrow. 1962. “The Economic Implications of Learning by Doing.” *Review of Economic Studies* 29 (3): 155–73. https://doi.org/10.2307/2295952. Paul M. Romer. 1986. “Increasing Returns and Long-Run Growth.” *Journal of Political Economy* 94 (5): 1002–37. http://www.jstor.org/stable/1833190. Hirofumi Uzawa. 1965. “Optimum Technical Change in An Aggregative Model of Economic Growth.” *International Economic Review* 6 (1): 18–31. https://doi.org/10.2307/2525621.

αυτό $h_a = h$. Για να φανεί όμως το εξωτερικό αποτέλεσμα του μέσου επιπέδου δεξιότητας h_a ο Lucas διατηρεί τον συμβολισμό παρόλον ότι $h_a = h$

Η συνάρτηση παραγωγής τώρα γίνεται

$$N(t)c(t) + \dot{K}(t) = AK(t)^{\beta}\left[u(t)h(t)N(t)\right]^{1-\beta} h_a(t)^{\gamma} \qquad \textbf{(11)}$$

Ο όρος $h_a(t)^{\gamma}$ αντιπροσωπεύει το εξωτερικό αποτέλεσμα του ανθρώπινου κεφαλαίου. Παρατηρείστε ότι η τεχνολογία τώρα είναι σταθερή, A αντί για $A(t)$.

Το υπόδειγμα κλείνει συνδέοντας την «προσπάθεια» για συσσώρευση ανθρώπινου κεφαλαίου – δηλ., το μέρος του διαθέσιμου εργάσιμου χρόνου που αφιερώνεται στην απόκτηση ανθρώπινου κεφαλαίου $1 - u(t)$ με την μεταβολή του $\dot{h}(t)$. Μια τέτοια σχέση έχει τη γενική μορφή

$$\dot{h}(t) = h(t)^{\zeta} G(1 - u(t)) \qquad \textbf{(12)}$$

Ο Lucas παρατηρεί ότι αν το $\zeta<1$, τότε το υπόδειγμά του δεν διαφέρει από εκείνο του Solow. Απλά γίνεται πιο πολύπλοκο, χωρίς να έχουμε ενδογενή μεγέθυνση. Ακολουθώντας το υπόδειγμα του Uzawa (1965) και παραπέμποντας στα εμπειρικά ευρήματα του Rosen,[5] καταλήγει στην εξής συνάρτηση μεταβολής του ανθρώπινου κεφαλαίου, απλοποιώντας μάλιστα την $G(1\text{-}u(t))$ σε μία γραμμική συνάρτηση $\delta[1\text{-}u(t)]$. Η (12) γίνεται τώρα:

$$\dot{h}(t) = h(t)\delta\left[1 - u(t)\right] \qquad \textbf{(13)}$$

Κατά τα άλλα, το υπόδειγμα ακολουθεί τις υποθέσεις του υποδείγματος της εξωγενούς μεγέθυνσης: ο ρυθμός μεγέθυνσης του $N(t)$ είναι λ, και οι προτιμήσεις είναι εκείνες της εξίσωσης (1).

Ο Lucas παρατηρεί ότι η ύπαρξη εξωτερικού αποτελέσματος συνεπάγεται πλέον ότι η *άριστη οδός* (optimal path) και η *οδός ανταγωνιστικής ισορροπίας* (competitive equilibrium path) δεν ταυτίζονται πλέον. Προτείνει να μελετήσει την άριστη οδό και την οδό ανταγωνιστικής ισορροπίας και να τις συγκρίνει.

Η *άριστη οδός* σημαίνει την επιλογή των $K(t)$, $h(t)$, $h_a(t)$, $c(t)$ και η οποία μεγιστοποιεί την χρησιμότητα της εξίσωσης (1), υπό τον περιορισμό των εξισώσεων (11) και (13) και υπό τον περιορισμό $h_a = h$ για κάθε t. Αυτό το πρόβλημα είναι ανάλογο με εκείνο που προηγήθηκε στην ανάλυση της εξωγενούς μεγέθυνσης.

Η *οδός ισορροπίας* είναι κάτι πιο πολύπλοκο. Ας υποτεθεί ότι το μέσο επίπεδο δεξιότητας $h_a(t)$ ακολουθεί ένα συγκεκριμένο μονοπάτι, ανάλογο με εκείνο του $A(t)$ στο υπόδειγμα Solow. Με δεδομένο το $h_a(t)$ εξετάζουμε το πρόβλημα που θα έλυναν τα μέλη του

[5] Sherwin Rosen. 1976. "A Theory of Life Earnings." *Journal of Political Economy* 84 (4): S45–67. http://www.jstor.org/stable/1831102.

ιδιωτικού τομέα – ατομικές επιχειρήσεις και νοικοκυριά – αν κάθε οικονομικό υποκείμενο *προσδοκούσε* ότι το μέσο επίπεδο δεξιότητας θα ακολουθούσε την πορεία του $h_a(t)$. Θα εξετάσουμε το πρόβλημα της επιλογής των $h(t)$, $k(t)$, $c(t)$ και $u(t)$ ώστε να μεγιστοποιηθεί η (1) υπό τους περιορισμούς (11) και (13) λαμβάνοντας το $h_a(t)$ ως εξωγενώς δεδομένο. Όταν η οδός του $h(t)$ που προκύπτει από αυτή τη λύση ταυτισθεί με την εξωγενή οδό του $h_a(t)$ τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία.

1. Η άριστη λύση

Η Χαμιλτονιανή τρέχουσας αξίας για το άριστο πρόβλημα με «τιμές» $\theta_1(t)$ και $\theta_2(t)$ για την αποτίμηση των αυξήσεων του φυσικού και του ανθρώπινου κεφαλαίου αντίστοιχα είναι:

$$
\begin{aligned}
H(K,h,\theta_1,\theta_2,c,u,t) = \\
&= \frac{N}{1-\sigma}\left(c^{1-\sigma}-1\right)+\theta_1\left[AK^{\beta}\left(uNh\right)^{1-\beta}h^{\gamma}-Nc\right] \\
&+\theta_2\left[\delta h\left(1-u\right)\right]
\end{aligned}
$$

Στο πρόβλημα αυτό δύο μεταβλητές πρέπει να επιλεγούν: η $c(t)$ και η $u(t)$.

Οι συνθήκες πρώτης τάξεως είναι συνεπώς

$$c^{-\sigma}=\theta_1 \qquad \textbf{(14)}$$

και

$$\theta_1\left(1-\beta\right)AK^{\beta}\left(uNh\right)^{-\beta}Nh^{1+\gamma}=\theta_2\delta h$$
(15)

Με άλλα λόγια, στο όριο, τα αγαθά πρέπει να είναι εξίσου πολύτιμα στις δύο χρήσεις τους –κατανάλωση και συσσώρευση κεφαλαίου [εξ. (14)], ενώ ο χρόνος πρέπει να είναι εξίσου πολύτιμος στις δύο χρήσεις του - παραγωγή και συσσώρευση ανθρώπινου κεφαλαίου [εξ. (15)].

Οι ρυθμοί μεταβολής των τιμών των δύο ειδών κεφαλαίου είναι:

$$\dot{\theta}_1=\rho\theta_1-\theta_1\beta AK^{\beta-1}\left(uNh\right)^{1-\beta}h^{\gamma} \qquad \textbf{(16)}$$

$$\dot{\theta}_2=\rho\theta_2-\theta_1\left(1-\beta+\gamma\right)AK^{\beta}\left(uN\right)^{1-\beta}h^{-\beta+\gamma}-\theta_2\delta\left(1-u\right) \qquad \textbf{(17)}$$

Στη συνέχεια οι εξισώσεις (11) και (13) και οι (14)-(17), μαζί με δύο εγκάρσιες συνθήκες (transversality conditions) που δεν θα αναφερθούν εδώ, περιγράφουν έμμεσα τη βέλτιστη εξέλιξη των $K(t)$ και $h(t)$ από οποιοδήποτε αρχικό συνδυασμό αυτών των δύο ειδών κεφαλαίου.

2. Η λύση ισορροπίας

Στη λύση ισορροπίας, ο ιδιωτικός τομέας «λύνει» ένα πρόβλημα ελέγχου ουσιαστικά της ίδιας μορφής, αλλά με τον όρο $h_a(t)^\gamma$ στην εξίσωση (11) να λαμβάνεται ως δεδομένος. Η εκκαθάριση της αγοράς απαιτεί τότε το $h_a(t) = h(t)$ για κάθε *t*, έτσι ώστε οι εξισώσεις (11), (13), (14), (15) και (16) να αποτελούν αναγκαίες συνθήκες για την οδό ισορροπίας ακριβώς όπως και για την άριστη οδό. Αλλά η εξίσωση (17) δεν ισχύει πλέον: Είναι ακριβώς στην αποτίμηση του ανθρώπινου κεφαλαίου που διαφέρουν οι κατανομές της άριστης οδού και της οδού ισορροπίας. Για τον ιδιωτικό τομέα, σε ισορροπία, η εξ. (17) αντικαθίσταται από την:

$$\dot{\theta}_2 = \rho\theta_2 - \theta_1(1-\beta)AK^\beta(uN)^{1-\beta} h^{-\beta}h_a^{\ \gamma} - \theta_2\delta(1-u)$$

Και δεδομένου ότι η εκκαθάριση της αγοράς απαιτεί ότι $h_a(t) = h(t)$ για κάθε *t*, η εξίσωση αυτή γίνεται

$$\dot{\theta}_2 = \rho\theta_2 - \theta_1(1-\beta)AK^\beta(uN)^{1-\beta} h^{-\beta+\gamma} - \theta_2\delta(1-u) \qquad \textbf{(18)}$$

Αν γ=1 οι εξισώσεις (17) και (18) ταυτίζονται. Είναι ακριβώς η ύπαρξη του εξωτερικού αποτελέσματος που διαφοροποιεί την «κοινωνική» από την ιδιωτική αποτίμηση.

Όπως και με το απλούστερο υπόδειγμα Solow, ο ευκολότερος τρόπος για να χαρακτηρίσουμε τις οδούς της άριστης λύσης και της λύσης ισορροπίας είναι να αναζητήσουμε λύσεις ισόρροπης μεγέθυνσης και των δύο συστημάτων: λύσεις στις οποίες η κατανάλωση και τα δύο είδη κεφαλαίου – φυσικού και ανθρώπινου – αυξάνονται με σταθερούς ρυθμούς, οι τιμές των δύο ειδών κεφαλαίου μειώνονται με σταθερούς ρυθμούς και η μεταβλητή της κατανομής χρόνου – ανάμεσα σε παραγωγή και συσσώρευση ανθρώπινου κεφαλαίου – $u(t)$ είναι σταθερή. Ας ξεκινήσουμε εξετάζοντας χαρακτηριστικά που είναι κοινά στα μονοπάτια άριστης οδού και οδού ισορροπίας [αφήνοντας κατά μέρος τις εξισώσεις (17) και (18)]. Έστω ότι κ συμβολίζει το $\dot{c}(t)/c(t)$, όπως και πριν, έτσι ώστε οι εξισώσεις (14) και οι (16) πάλι να υποδηλώνουν τη συνθήκη της οριακής παραγωγικότητας του κεφαλαίου:

$$\beta AK(t)^{\beta-1}\left(u(t)h(t)N(t)\right)^{1-\beta} h_a^{\ \gamma} = \rho + \sigma\kappa \qquad \textbf{(19)}$$

Απόδειξη

Από την (14) έχουμε $c^{-\sigma} = \theta_1 \Rightarrow \dot{\theta}_1/\theta_1 = -\sigma\,\dot{c}(t)/c(t) = -\sigma\kappa$

(14)’

Από την (16) και την (14)’ έχουμε

$$\dot{\theta}_1 = \rho\theta_1 - \theta_1 \beta A K^{\beta-1}\left(uNh\right)^{1-\beta} h^{\gamma} \Rightarrow \frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \rho - \beta A K^{\beta-1}\left(uNh\right)^{1-\beta} h^{\gamma} = -\sigma\kappa \Rightarrow$$

$$\beta A K^{\beta-1}\left(uNh\right)^{1-\beta} h^{\gamma} = \rho + \sigma\kappa$$

Η συνθήκη (19) είναι το ανάλογο της συνθήκης (6). Όπως και στο προηγούμενο υπόδειγμα, είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι το $K(t)$ πρέπει να αυξάνεται με το ρυθμό $\kappa+\lambda$ και ότι το ποσοστό αποταμίευσης s είναι σταθερό, σε μια ισόρροπη διαδρομή, στην τιμή που δίνεται από την εξίσωση (10). Για την εξαγωγή αυτών των συμπερασμάτων σχετικά με τη συσσώρευση του φυσικού κεφαλαίου, δεν έχει σημασία εάν το $h(t)$ είναι προκύπτει από επιλογή ή προκύπτει εξωγενώς όπως η τεχνολογική μεταβολή $A(t)$ στο προηγούμενο υπόδειγμα.

Τώρα, υποθέτοντας στην ισόρροπη οδό ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης του ανθρώπινου κεφαλαίου είναι σταθερός και ίσος με ν, προκύπτει άμεσα από την (13) ότι

$$\nu = \delta(1-u) \qquad \textbf{(20)}$$

Λογαριθμίζοντας και παραγωγίζοντας την (19) προκύπτει ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης της κατά κεφαλήν κατανάλωσης και κατά κεφαλήν κεφαλαίου κ είναι ίσος με

$$\kappa = \left[\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}\right]\nu \qquad \textbf{(21)}$$

Απόδειξη

Από την (19) έχουμε

$$\beta A K(t)^{\beta-1}\left(u(t)h(t)N(t)\right)^{1-\beta} h_a^{\ \gamma} = \rho + \sigma\kappa \Rightarrow$$

$$\ln \beta A + \left(\beta - 1\right)\ln K(t) + \left(1-\beta\right)\left[\ln u(t) + \ln h(t) + \ln N(t)\right] + \gamma \ln h_a = \ln(\rho + \sigma\kappa) \Rightarrow$$

$$\left(\beta-1\right)\left(\kappa+\lambda\right) + (1-\beta)(0+\nu+\lambda) + \gamma\nu = 0 \Rightarrow (1-\beta)\left(\nu+\lambda-\kappa-\lambda\right) + \gamma\nu = 0 \Rightarrow$$

$$\kappa = \left[\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}\right]\nu$$

Έτσι, με την $h(t)$ να μεγεθύνεται με σταθερό ρυθμό ν, το $(1\text{-}\beta\text{+}\gamma)\nu$ παίζει το ρόλο του εξωγενούς ρυθμού μεγέθυνσης της τεχνολογικής αλλαγής μ στο προηγούμενο υπόδειγμα.

Όσον αφορά τους καθοριστικούς παράγοντες του ρυθμού μεγέθυνσης ν του ανθρώπινου κεφαλαίου, βλέπει κανείς διαφορίζοντας τις δύο συνθήκες πρώτης τάξης (14) και (15) και αντικαθιστώντας το $\dot{\theta}_1/\theta_1$ ότι

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = (\beta-\sigma)\kappa - (\beta-\gamma)\nu + \lambda \qquad \textbf{(22)}$$

Απόδειξη

Από την (14)’ και (15) έχουμε

$$\theta_1\left(1-\beta\right)AK^{\beta}\left(uNh\right)^{-\beta}Nh^{1+\gamma}=\theta_2\delta h\Rightarrow$$
$$\ln\theta_1+\ln\left[\left(1-\beta\right)A\right]+\beta\ln K-\beta\left(\ln u+\ln N+\ln h\right)+\ln N+(1+\gamma)\ln h=\ln\delta+\ln\theta_2+\ln h\Rightarrow$$
$$\frac{\dot\theta_1}{\theta_1}+\beta\left(\kappa+\lambda\right)-\beta\left(0+\lambda+\nu\right)+\lambda+(1+\gamma)\nu=\frac{\dot\theta_2}{\theta_2}+\nu\Rightarrow$$
$$-\sigma\kappa+\beta(\kappa+\lambda-\lambda-\nu)+\lambda+\nu+\gamma\nu=\frac{\dot\theta_2}{\theta_2}+\nu\Rightarrow$$
$$\frac{\dot\theta_2}{\theta_2}=-\sigma\kappa+\beta(\kappa-\nu)+\lambda+\gamma\nu=(\beta-\sigma)\kappa-(\beta-\gamma)\nu+\lambda$$

Στο σημείο αυτό οι αναλύσεις της αρίστης οδού και της οδού ισορροπίας αποκλίνουν. Εξετάζοντας πρώτα την οδό της άριστης ή αποτελεσματικής λύσης έχουμε, χρησιμοποιώντας την (17) και την (15):

$$\frac{\dot\theta_2}{\theta_2}=\rho-\delta-\frac{\gamma}{1-\beta}\delta u \qquad \textbf{(23)}$$

Απόδειξη

Από την (15) εκφράζουμε την θ_1 ως συνάρτηση της θ_2, αντικαθιστούμε στην (17) όπου όλοι οι όροι του δεξιού σκέλους έχουν το θ_2, μεταφέρουμε το θ_2 στο αριστερό σκέλος και απλοποιούμε.

Τώρα αντικαθιστούμε το u από την (20), απαλείφουμε το $\dot\theta_2/\theta_2$ από τις (22) και (23) και λύνουμε ως προς ν σε όρους του κ. Τέλος απαλείφοντας το κ μεταξύ αυτής της εξίσωσης και της (21) έχουμε τη λύση για τον *άριστο ή αποτελεσματικό ρυθμό της μεγέθυνσης του ανθρώπινου κεφαλαίου* που συμβολίζουμε με ν^*:

$$\nu^*=\sigma^{-1}\left[\delta-\frac{1-\beta}{1-\beta+\gamma}(\rho-\lambda)\right] \qquad \textbf{(24)}$$

Στην περίπτωση της λύσης ισορροπίας αντί της (17) έχουμε την (18). Έτσι αντί για την (23) έχουμε την

$$\frac{\dot\theta_2}{\theta_2}=\rho-\delta \qquad \textbf{(25)}$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε για τον άριστο ρυθμό μεγέθυνσης ν* από την (23), μπορούμε να εξαγάγουμε από την (25) τον ρυθμό μεγέθυνσης στη λύση ισορροπίας:

$$\nu = \left[\sigma\left(1-\beta+\gamma\right)-\gamma\right]^{-1}\left[\left(1-\beta\right)\left(\delta-\left(\rho-\lambda\right)\right)\right] \qquad \textbf{(26)}$$

Ο Lucas προσδιορίζει ότι για να ισχύουν οι εξισώσεις (24) και (26), δηλ., οι τιμές των ν και ν^* θα πρέπει να είναι μικρότερες του δ, συνθήκη που συνεπάγεται ότι

$$\sigma \geq 1-\frac{1-\beta}{1-\beta+\gamma}\frac{\rho-\lambda}{\delta} \qquad \textbf{(27)}$$

Με άλλα λόγια, η ελαστικότητα διαχρονικής υποκατάστασης δεν μπορεί να είναι πολύ υψηλή ή η αποστροφή προς τον κίνδυνο πολύ χαμηλή. Αν η ανισότητα στην (27) είναι ισότητα τότε $\nu=\nu^*=\delta$ αν ανισότητα, τότε $\nu^*>\nu$, όπως είναι και αναμενόμενο.

«Οι εξισώσεις (24) και (26) δίνουν, αντίστοιχα, τους ρυθμούς μεγέθυνσης για την άριστη (αποτελεσματική) πορεία και την πορεία της ανταγωνιστικής ισορροπίας σε ισόρροπη μεγέθυνση. Σε κάθε περίπτωση, αυτή η μεγέθυνση αυξάνεται με την αποτελεσματικότητα της επένδυσης σε ανθρώπινο κεφάλαιο, δ, και μειώνεται με την αύξηση του [υποκειμενικού] συντελεστή προεξόφλησης ρ. (Εδώ επιτέλους υπάρχει μια σύνδεση μεταξύ «οικονομίας» και ανάπτυξης!) Σε κάθε περίπτωση, η (21) δίνει τον αντίστοιχο ρυθμό μεγέθυνσης του φυσικού κεφαλαίου, κατά κεφαλήν. Παρατηρήστε ότι η θεωρία προβλέπει τη διαρκή μεγέθυνση είτε η εξωτερική επίδραση γ είναι θετική είτε όχι. Αν $\gamma = 0$, $\kappa=\nu$, ενώ αν $\gamma > 0$, $\kappa > \nu$, έτσι ώστε η εξωτερική επίδραση να προκαλεί ταχύτερη μεγέθυνση του φυσικού από την μεγέθυνση του ανθρώπινου κεφαλαίου. Για την περίπτωση όπου $\sigma = 1$, η διαφορά μεταξύ ρυθμών μεγέθυνσης του ανθρώπινου κεφαλαίου στην άριστη λύση και στην ανταγωνιστική ισορροπία είναι, αφαιρώντας την (26) από την (24),

$$\nu^*-\nu = \frac{\gamma}{1-\beta+\gamma}\left(\rho-\lambda\right)$$

Έτσι η αναποτελεσματικότητα είναι μικρή όταν, είτε το εξωτερικό αποτέλεσμα είναι μικρό $\left(\gamma \approx 0\right)$, είτε ο συντελεστής προεξόφλησης είναι χαμηλός $\left(\rho-\lambda \approx 0\right)$.»