Θεωρία Οικονομικής Μεγέθυνσης

Νίκος Θεοχαράκης

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Εαρινό εξάμηνο 2022

Το υπόδειγμα θηρευτή-θηράματος του Richard M. Goodwin

R.M. Goodwin, "A Growth Cycle". Πρώτη δημοσίευση στο C.H. Feinstein (ed.), *Capitalism and Economic Growth*: *Essays presented to Maurice Dobb*, Cambridge: Cambridge University Press, 1967, pp. 54–58. Αναθεωρημένο και επαυξημένο για τη συλλογή άρθρων των E.K. Hunt & Jesse G. Schwartz (eds.), *A Critique of Economic Theory*, Penguin, Harmondsworth, 1972, pp. 442–449. Αναδημοσίευση στο R.M. Goodwin, Essays in *Economic Dynamics*, London: Macmillan, 1982, pp. 165–170. Διαθέσιμο διαδικτυακά στο https://www.icts.res.in/sites/default/files/Goodwin_growth_cycle_1967.pdf

Εξισώσεις Volterra-Lotka

Η ιδέα του Richard Goodwin (1913-1996) ήταν να παρουσιαστεί η καπιταλιστική οικονομία ως ένα υπόδειγμα θηράματος-θηρευτή (prey-predator) χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εξισώσεις της μαθηματικής βιολογίας των Vito Volterra (1860-1940) και Alfred J. Lotka (1880-1949).[1]

Υποθέστε έναν πληθυσμό δύο ειδών, έστω, ψάρια (θηράματα) και καρχαρίες (θηρευτές). Τα ψάρια [$x(t)$ είναι ο πληθυσμός των ψαριών τη στιγμή t] μπορούν να αναπαραχθούν χωρίς καρχαρίες με εκθετικό ρυθμό a, έτσι ώστε $\dot{x} = ax(t)$. Όταν υπάρχουν καρχαρίες [$y(t)$ είναι ο πληθυσμός των καρχαριών τη στιγμή t] η κατάσταση είναι διαφορετική. Ο πληθυσμός των ψαριών μεγεθύνεται με ρυθμό που δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\dot{x} = [a - by(t)]x(t) = ax(t) - by(t)x(t) \qquad \text{(VL Eq. 1)}$$

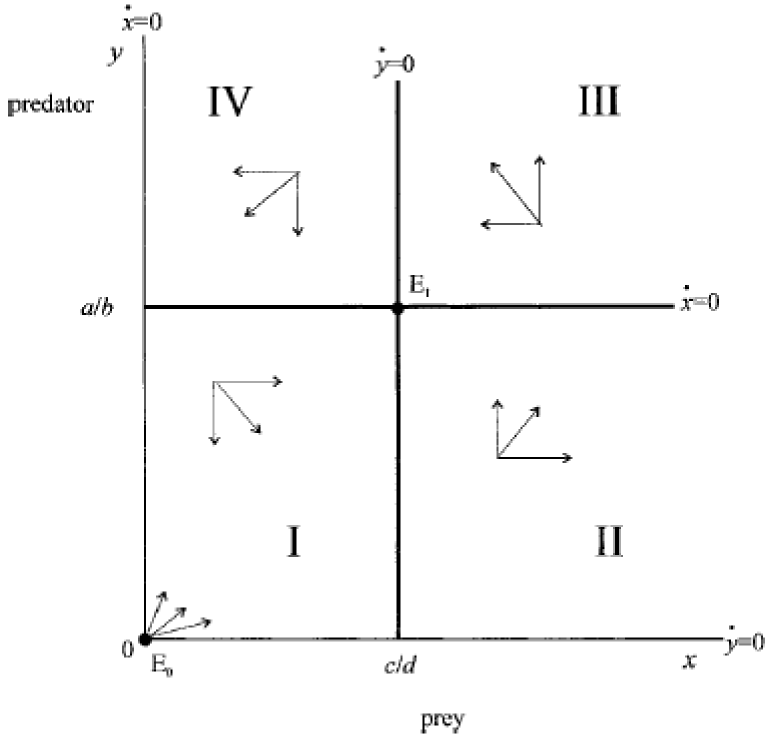
Το νόημα αυτής της εξίσωσης είναι ότι η εκθετική μεγέθυνση των ψαριών μειώνεται από τον πληθυσμό των καρχαριών.

[1] Vito Volterra, "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi", *Memorie della R. Acc. dei Lincei*, ser. VI, vol. II, 1926, pp. 31-113, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris: Gauthier-Villars, 1935. Alfred James Lotka, *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins, Baltimore,1925. Η περιγραφή των υποδειγμάτων Volterra-Lotka που ακολουθεί βασίζεται στο βιβλίο του Richard Shone, *Economic Dynamics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1997, sec. 12.4.2.

Οι καρχαρίες τρέφονται με ψάρια. Αν δεν υπάρχουν ψάρια λιμοκτονούν. Η πληθυσμιακή τους δυναμική δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\dot{y} = [-c + dx(t)]y(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) \qquad \text{(VL Eq. 2)}$$

Ο αυτόνομος ρυθμός μεγέθυνσης των θηρευτών είναι αρνητικός, ενώ ο ρυθμός μεγέθυνσής τους εξαρτάται θετικά από τον αριθμό των διαθέσιμων ψαριών.
Ας υποθέσουμε ότι όλες οι παράμετροι a, b, c και d είναι θετικές. Είναι εύκολο να υπολογιστεί η λύση ισορροπίας για $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Άρα είτε $(x^*, y^*) = (0,0)$, είτε $(x^*, y^*) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. Έχει ωστόσο μεγαλύτερο ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε τι συμβαίνει με τις τροχιές εκτός ισορροπίας. Πάρτε τις μη μηδενικές τιμές ισορροπίας και δείτε ποια είναι τα πρόσημα και στα τέσσερα τεταρτημόρια που σχηματίζονται στο επίπεδο φάσης *x*-*y* που δημιουργούνται από την τομή των *x** και *y**.

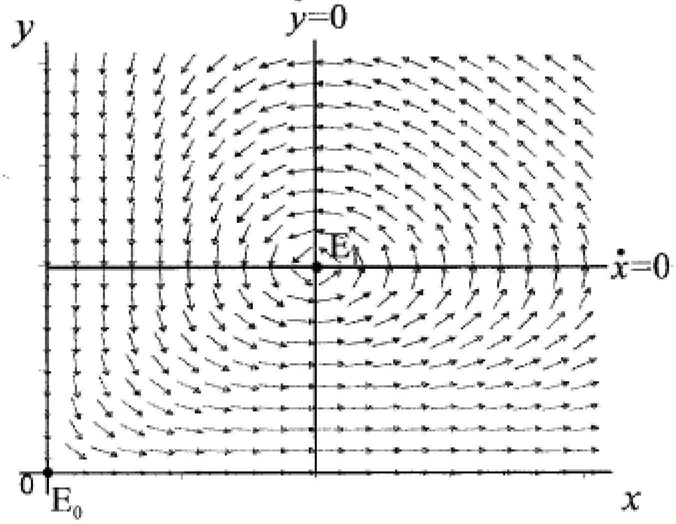


Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τις τροχιές. Δεδομένου $y = f(x)$ επιχειρούμε να βρούμε την πρώτη παράγωγο του y ως προς x, dy/dx . Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας (chain rule) αυτό είναι

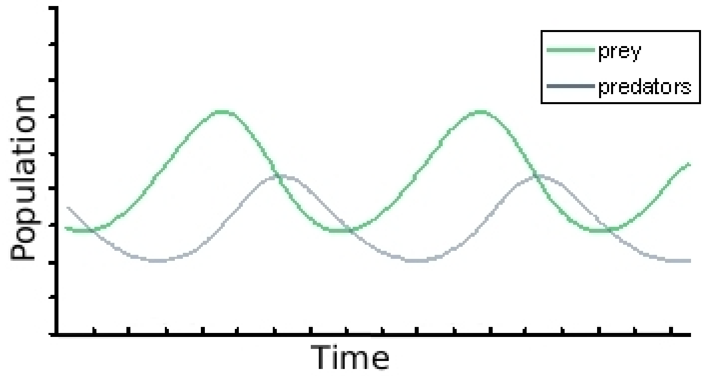
$dy/dx = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(-c+dx)y}{(a-by)x} \Rightarrow \left(\frac{a}{y} - b\right)dy = \left(-\frac{c}{x} + d\right)dx$. Ολοκληρώνοντας και τις δύο πλευρές έχουμε $a\ln y - by = -c\ln x + dx + k_1$. ($k_1$ είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης).

Αναδιατάσσοντας και υψώνοντας στο *e* λαμβάνουμε $y^a x^b = ke^{by+dx} \quad \left(k = e^{k_1}\right)$.

Συνεπώς, $k = \frac{y^a x^b}{e^{by+dx}}$. Για κάθε τιμή της σταθεράς *k* παίρνουμε μια τροχιά στο επίπεδο φάσης. (Βλέπε διάγραμμα).



Βλέπουμε λοιπόν ότι για τιμές εκτός ισορροπίας δεν υπάρχει τάση του συστήματος να φτάσει σε ισορροπία, αλλά κινείται σε κλειστή τροχιά ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες. Αν μάλιστα δείξουμε σε ένα διάγραμμα πως εξελίσσονται οι δύο πληθυσμοί στον χρόνο, παρατηρούμε ένα μοτίβο ταλαντώσεων με υστέρηση (lagged oscillations).



Population size vs. time for a predator prey model.

[Για μια ενδιαφέρουσα γραφική απεικόνιση σε πραγματικό χρόνο επισκεφθείτε την ιστοσελίδα Wator: A Predator-Prey simulation διαθέσιμό από τη διεύθυνση https://beltoforion.de/en/wator/ από όπου και το προηγούμενο διάγραμμα. Δείτε επίσης το λήμμα στην *Wikipedia* https://en.wikipedia.org/wiki/Wa-Tor . Το αρχικό άρθρο είναι του A. K. Dewdney, "Sharks and fish wage an ecological war on the toroidal planet Wa-Tor", *Scientific American*, December 1, 1984]

Το υπόδειγμα Goodwin προσλαμβάνει τον καπιταλισμό ως ένα υπόδειγμα θηράματος-θηρευτή και κατασκευάζει ένα επίπεδο φάσης με το μερίδιο της εργασίας στο εισόδημα και το ποσοστό του εργατικού δυναμικού που απασχολείται ως θήραμα και θηρευτή αντίστοιχα. Με τον τρόπο αυτό ο ανταγωνιστικός χαρακτήρας του καπιταλισμού μαζί με την ομοιοστατική του ιδιότητα μετασχηματίζονται σε ένα μαθηματικό υπόδειγμα. Ο Robert Solow (1990), φοιτητής του Goodwin στο Πανεπιστήμιο του Harvard πριν από ογδόντα χρόνια, παρατηρεί – κάπως ειρωνικά – ότι από τη δομή του υποδείγματος Goodwin φαίνεται ότι οι θηρευτές είναι οι εργάτες και οι καπιταλιστές τα θηράματα.

Το υπόδειγμα Goodwin

Παραδοχές/Υποθέσεις

1. Σταθερή τεχνική πρόοδος
2. Σταθερή μεγέθυνση του εργατικού δυναμικού
3. Μόνο δύο συντελεστές παραγωγής: εργασία και κεφάλαιο
4. Όλες οι ποσότητες είναι πραγματικές και καθαρές
5. Το σύνολο των μισθών καταναλώνεται, όλα τα κέρδη αποταμιεύονται (απλοποίηση για σταθερή αναλογική αποταμίευση)
6. Σταθερός λόγος κεφαλαίου-προϊόντος

7. Ο πραγματικός μισθός αυξάνει στην περιοχή της πλήρους απασχόλησης

Σύμβολα

q προϊόν

k κεφάλαιο

l απασχόληση

w μισθός

$a = a_0 e^{\alpha t} = q/l$ παραγωγικότητα της εργασίας, [όπου το α (ελληνικό) είναι μια σταθερά παράμετρος]

$\sigma = k/q$ λόγος κεφαλαίου- προϊόντος, το αντίστροφο της παραγωγικότητας του κεφαλαίου

$u = w/a$ το μερίδιο των (απασχολούμενων) εργατών στο προϊόν. Παρατηρείστε ότι $w/a = wl/q$. Δεδομένου ότι το προϊόν διανέμεται μεταξύ των δύο τάξεων, το μερίδιο των καπιταλιστών είναι ίσο με $1 - w/a$.

Το πλεόνασμα = κέρδη = επένδυση = αποταμίευση = $\left(1 - w/a\right) q = \dot{k}$. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει απόσβεση του κεφαλαίου, η αύξηση του κεφαλαίου, δηλ., η καθαρή επένδυση, είναι ίση με τα κέρδη των καπιταλιστών και ίση με τις αποταμιεύσεις τους, οι οποίες είναι και οι αποταμιεύσεις της οικονομίας, εφόσον οι εργάτες δεν αποταμιεύουν. Το ποσοστό κέρδους είναι ίσο με $\dot{k}/k$ και δεδομένου ότι έχουμε σταθερό λόγο κεφαλαίου προϊόντος, το ποσοστό αυτό είναι ίσο με $\dot{q}/q$. Επιπλέον, το ποσοστό κέρδους είναι ίσο με τα κέρδη των καπιταλιστών δια του κεφαλαίου τους. Συνεπώς είναι ίσο με $\dfrac{\left(1 - \dfrac{w}{a}\right) q}{k} = \dfrac{\left(1 - \dfrac{w}{a}\right)}{\sigma}$.

$n = n_0 e^{\beta t}$ είναι η προσφορά εργασίας, όπου β είναι μια σταθερά παράμετρος. Η προσφορά εργασίας είναι διαφορετική από την απασχόληση. Όταν δεν υπάρχει ανεργία ισχύει ότι $l = n$

Το υπόδειγμα

Από τη σχέση $a = a_0 e^{\alpha t} = \frac{q}{l}$ προκύπτει ότι:

$$\frac{d\left(\frac{q}{l}\right)\Big/dt}{\frac{q}{l}} = \frac{\frac{\dot{q}l - q\dot{l}}{l^2}}{\frac{q}{l}} = \frac{\dot{q}}{q} - \frac{\dot{l}}{l} \quad \text{και} \quad \frac{\frac{d\frac{q(t)}{l(t)}}{dt}}{\frac{q(t)}{l(t)}} = \frac{\frac{da(t)}{dt}}{a} = \frac{\frac{da_0 e^{\alpha t}}{dt}}{a_0 e^{\alpha t}} = \frac{\alpha a_0 e^{\alpha t}}{a_0 e^{\alpha t}} = \alpha$$

Δεδομένου ότι το $\frac{\dot{q}}{q} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{\sigma}$ είναι το ποσοστό κέρδους, έχουμε

$$\frac{\dot{q}}{q} - \frac{\dot{l}}{l} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{\sigma} - \frac{\dot{l}}{l} = \alpha \Rightarrow \frac{\dot{l}}{l} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{\sigma} - \alpha = \frac{(1-u)}{\sigma} - \alpha \qquad \text{Εξ. (1)}$$

Ορίζουμε ως $v = l/n$, το ποσοστό του εργατικού δυναμικού που απασχολείται [άρα το ποσοστό ανεργίας είναι ίσο με $1 - l/n$] και θυμηθείτε ότι $u = w/a$.

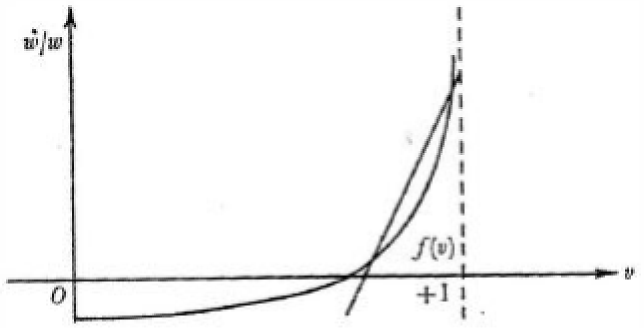
$v = \frac{l}{n} \Rightarrow \frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{l}}{l} - \frac{\dot{n}}{n}$. Από την Εξ. (1) και την εξίσωση της προσφοράς εργασίας

$n = n_0 e^{\beta t} \Rightarrow \frac{\dot{n}}{n} = \beta$ προκύπτει ότι

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{l}}{l} - \frac{\dot{n}}{n} = \frac{(1-u)}{\sigma} - (\alpha + \beta) \qquad \text{Εξ. (2)}$$

Η Παραδοχή/Υπόθεση 7, δηλ., ότι ο πραγματικός μισθός αυξάνει στην περιοχή της πλήρους απασχόλησης εισέρχεται στο υπόδειγμά μας υποθέτοντας ότι επιδέχεται μια γραμμική προσέγγιση (πρόκειται ουσιαστικά για μια καμπύλη Philips των πραγματικών μισθών)

$$\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho v \qquad \text{Εξ. (3)}$$



Τώρα, $u=\dfrac{w}{a}\Rightarrow\dfrac{\dot{u}}{u}=\dfrac{\dot{w}}{w}-\dfrac{\dot{a}}{a}$. Υποκαθιστώντας τον πρώτο όρο του δεξιού σκέλους από την Εξ. (3) και σημειώνοντας ότι $a=a_0e^{\alpha t}\Rightarrow\dfrac{\dot{a}}{a}=\alpha$ συνεπάγεται ότι

$$\frac{\dot{u}}{u}=\frac{\dot{w}}{w}-\frac{\dot{a}}{a}=-(\alpha+\gamma)+\rho v \qquad \text{Εξ. (4)}$$

Από τις Εξισώσεις (2) και (4) έχουμε μια «ευχερή διατύπωση» (“a convenient statement”) του υποδείγματος.

$$\dot{v}=\left[\left\{\frac{1}{\sigma}-(\alpha+\beta)\right\}-\frac{u}{\sigma}\right]v \qquad \text{Εξ. (5)}$$

$$\dot{u}=\left\{-(\alpha+\gamma)+\rho v\right\}u \qquad \text{Εξ. (6)}$$

Παρατηρείστε την ομοιότητα των Εξισώσεων (5) και (6) με τις εξισώσεις Volterra-Lotka (1) και (2). Όπως παρατηρεί ο Goodwin, η ομοιότητα αυτή δεν είναι εντελώς τυπική ή συμπτωματική. Το πρόβλημα του Volterra – “η συμβίωση των δύο πληθυσμών – εν μέρει συμπληρωματική, εν μέρει εχθρική – μας βοηθάει στην κατανόηση των δυναμικών αντιφάσεων του καπιταλισμού».

Μπορούμε να απαλείψουμε τον χρόνο από τις Εξισώσεις (5) & (6) και να γράψουμε

$$du/dv=\frac{du/dt}{dv/dt}=\frac{\left\{-(\alpha+\gamma)+\rho v\right\}u}{\left[\left\{\frac{1}{\sigma}-(\alpha+\beta)\right\}-\frac{u}{\sigma}\right]v}\Rightarrow\left[\frac{\left\{\frac{1}{\sigma}-(\alpha+\beta)\right\}}{u}-\frac{1}{\sigma}\right]du=\left\{-\frac{(\alpha+\gamma)}{v}+\rho\right\}dv$$

Λαμβάνοντας τα ολοκληρώματα και των δύο σκελών

$$\left\{\frac{1}{\sigma}-(\alpha+\beta)\right\}\ln u-\frac{1}{\sigma}u=-(\alpha+\gamma)\ln v+\rho v+ct\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma}u+\rho v-\left[\frac{1}{\sigma}-(\alpha+\beta)\right]\ln u-(\alpha+\gamma)\ln v=ct$$

[Το αρχικό υπόδειγμα έχει ένα τυπογραφικό σφάλμα σε αυτό το σημείο].

Ο Goodwin απλοποιεί αυτή την εξίσωση σε

$\theta_1 u + \theta_2 v - \eta_1 \ln u - \eta_2 \ln v = \ln H$,

όπου

$\theta_1 = \frac{1}{\sigma}, \quad \theta_2 = \rho, \quad \eta_1 = \left[\frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta)\right], \quad \eta_2 = (\alpha + \gamma)$ και η $\ln H$ είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης.

Υψώνοντας με βάση το *e* και εκφράζοντας την ισότητα σε όρους συναρτήσεων των μεταβλητών έχουμε:

$$\phi(u) = u^{\eta_1} e^{-\theta_1 u} = H v^{-\eta_2} e^{\theta_2 v} = H\psi(v)$$

Η τελευταία εξίσωση μας δίνει την τροχιά του οικονομικού συστήματος στο επίπεδο φάσης *v-u* για τις αρχικές συνθήκες που περιγράφονται από την *H*.

Ο Goodwin παραγωγίζει τις συναρτήσεις φ και ψ

$$\frac{d\phi}{du} = \left(-\theta_1 + \frac{\eta_1}{u}\right)\phi, \qquad \frac{d\psi}{dv} = \left(\theta_2 - \frac{\eta_2}{v}\right)\psi$$

Τα ακρότατα των συναρτήσεων αυτών είναι τα $u^* = \frac{\eta_1}{\theta_1}, v^* = \frac{\eta_2}{\theta_2}$

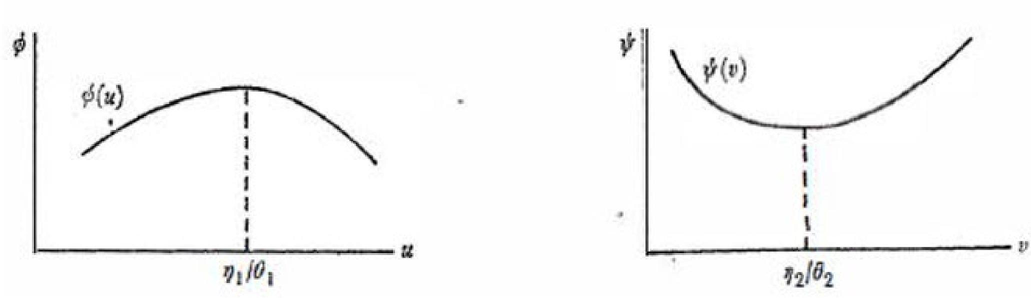
Δεδομένου ότι

$$\phi'' = -\frac{\eta_1}{u^2}\phi + \left(-\theta_1 + \frac{\eta_1}{u}\right)\phi', \qquad \psi'' = \frac{\eta_2}{v^2}\psi + \left(\theta_2 - \frac{\eta_2}{v}\right)\psi'$$

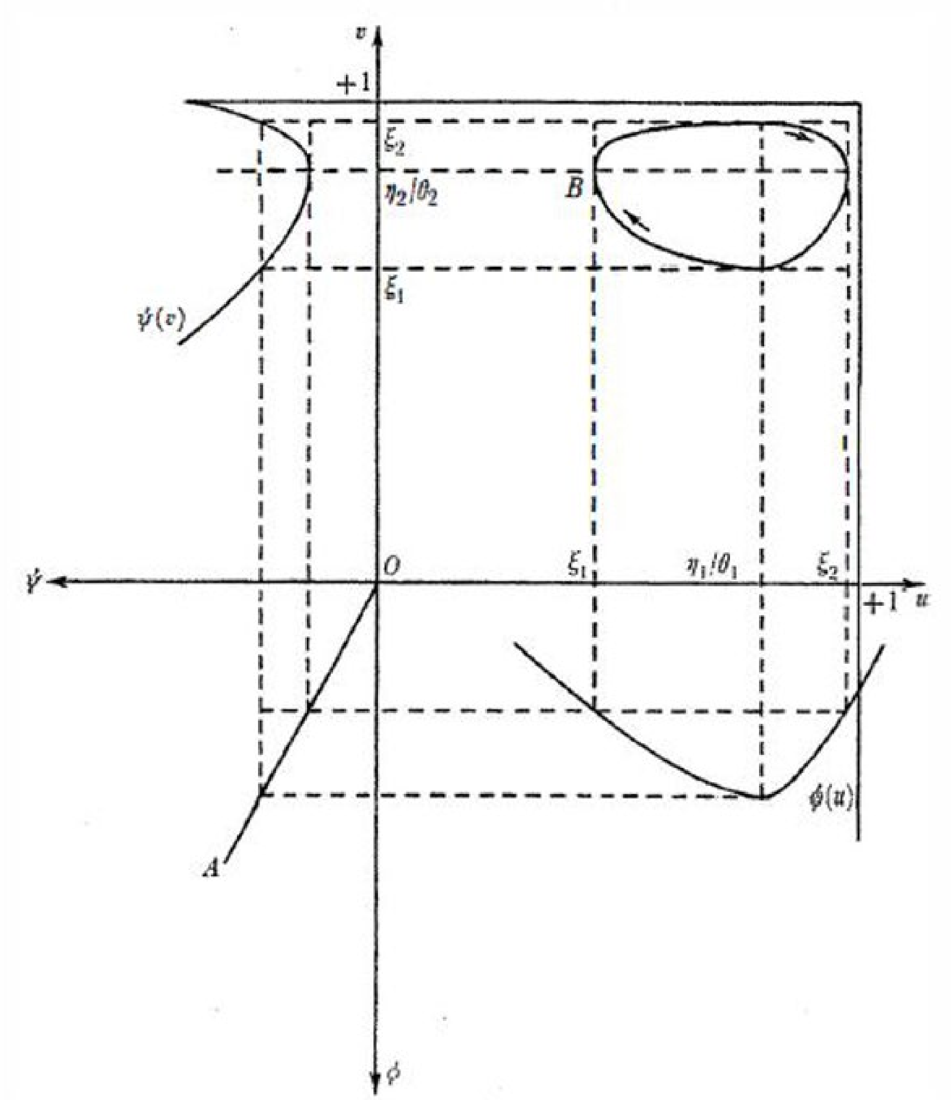
στα ακρότατα όπου $\phi' = \psi' = 0 \Rightarrow \phi'' < 0 \quad \psi'' > 0$

Έτσι ο Goodwin αναπαριστά γραφικά τις δύο συναρτήσεις για ένα τμήμα των πεδίων ορισμού των *u* και *v*. [Θυμηθείτε ότι και οι δύο μεταβλητές είναι θετικές με μικρότερες της μονάδος]. Η συνάρτηση φ έχει μέγιστο στο $u^* = \frac{\eta_1}{\theta_1}$ και η συνάρτηση ψ έχει ελάχιστο στο $v^* = \frac{\eta_2}{\theta_2}$.

Οι συναρτήσεις έχουν την εξής μορφή:



Εφόσον, $\phi = H\psi$ ο Goodwin επινοεί ένα διάγραμμα τεσσάρων τεταρτημορίων για να εξαγάγει την τροχιά.



Αυτό είναι το Διάγραμμα 3 του αρχικού άρθρου. Υπάρχουν τέσσερα τεταρτημόρια συνδεδεμένα σε ένα μοναδικό διάγραμμα. Το κάτω δεξιά τεταρτημόριο απεικονίζει στον άξονα των τετμημένων τη μεταβλητή u και στον άξονα των τεταγμένων τη συνάρτηση φ. Το άνω αριστερά τεταρτημόριο απεικονίζει στον άξονα των τετμημένων τη μεταβλητή v και στον άξονα των τεταγμένων τη συνάρτηση ψ. [Υπάρχει ένα τυπογραφικό λάθος στο αρχικό άρθρο]. Αυτά τα δύο τεταρτημόρια συνδέονται μέσω του κάτω αριστερά τεταρτημορίου που χρησιμοποιεί για τους άξονές του τους άξονες των τεταγμένων των προηγούμενων τεταρτημορίων. Αυτό το τεταρτημόριο «λύνει» την εξίσωση. Δεδομένου ότι το H είναι μια σταθερά που αντανακλά τις αρχικές συνθήκες, το γράφημα σε αυτό το τεταρτημόριο είναι μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων με κλίση φ/ψ. Τώρα, για κάθε τιμή του u διαβάστε την αντίστοιχη τιμή του φ (κάτω δεξιά τεταρτημόριο), μετατρέψτε την σε τιμή ψ μέσω του κάτω αριστερού τεταρτημορίου και από το άνω δεξιά τεταρτημόριο διαβάστε την αντίστοιχη τιμή του v. Αυτό δημιουργεί έναν γεωμετρικό τόπο σημείων στο άνω δεξιά τεταρτημόριο που παριστά την τροχιά του συστήματος για το επίπεδο φάσης u-v. Περιστρέφοντας την ευθεία ΟΑ στο τεταρτημόριο $\varphi\psi$ έχουμε διαφορετικές τροχιές. Σημειώστε ότι υπάρχει ένα σημείο στο οποίο τα u και v λαμβάνουν τις τιμές που μεγιστοποιούν το φ και ελαχιστοποιούν το ψ αντίστοιχα, αυτή η τροχιά είναι ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας. Αλλά μόλις διαταραχθεί αυτή η ισορροπία, το σύστημα κλειδώνει σε μια διαφορετική τροχιά. Ο Goodwin σημειώνει ότι μακροπρόθεσμα ο μέσος όρος του χρόνου των u και v είναι οι τιμές ισορροπίας όταν δεν έχει υπάρξει διαταραχή. Έτσι τα κέρδη είναι σταθερά μακροπρόθεσμα, η ανεργία κυμαίνεται γύρω από την αδιατάρακτη τιμή ισορροπίας (1-v^*), ενώ η απασχόληση αυξάνεται με το ρυθμό μεγέθυνσης της προσφοράς εργασίας. Οι μισθοί αυξάνονται με το ρυθμό της παραγωγικότητας, ακόμη κι αν ενδέχεται να παρουσιάζουν μεγάλες διακυμάνσεις ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες. Η σταθερότητα του μέσου ποσοστού κέρδους και η αύξηση των μισθών με την παραγωγικότητα είναι τα stylized facts [ευρείες τάσεις που συνοψίζουν τα εμπειρικά δεδομένα] που επιχείρησε να εξηγήσει ο Goodwin στο υπόδειγμά του.

Ένα «πολιτικό επακόλουθο» κατά τον Goodwin είναι «η μωρία και η μικροψυχία της σοσιαλδημοκρατίας» (“the fatuity and pusillanimity of social democracy”).

Πρόσθετη βιβλιογραφία

Desai, Meghnad, Brian Henry, Alexander Mosley and Malcolm Pemberton. 2006. “A Clarification of the Goodwin Model of the Growth Cycle”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30 (12): 2661-2670, https://doi.org/10.1016/j.jedc.2005.08.006

Gandolfo, Giancarlo (1997). *Economic Dynamics*, Third Edition. Berlin: Springer Verlag, Section 24.4, pp. 449-64.

Harvie, David. 2000. “Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries”, *Cambridge Journal of Economics*, 24 (3): 349–376, https://doi.org/10.1093/cje/24.3.349

Mohun, Simon and Roberto Veneziani. 2006. “Goodwin Cycles and the U.S. Economy, 1948-2004”, MPRA Paper No. 30444. https://mpra.ub.uni-muenchen.de/30444/

Solow, Robert M. 1990. “Goodwin's Growth Cycle; Reminiscence and Rumination”. In Kumaraswamy Velupillai (Ed.), *Nonlinear and Multi-sectoral Macrodynamics: Essays in Honour of Richard Goodwin*, London: Macmillan, pp. 31–41