ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

**Τμήμα Οικονομικών Επιστημών**

# Σημειώσεις στη Θεωρία Οικονομικής Μεγέθυνσης

Νίκος Θεοχαράκης, Εαρινό εξάμηνο 2022

## Σύγκλιση και ταχύτητα σύγκλισης

Ο εντοπισμός των σημείων ισορροπίας στο υπόδειγμα Solow και του ρυθμού μεγέθυνσης των οικονομικών μεταβλητών δεν απαντά στο ερώτημα του τι γίνεται όταν μια οικονομία απέχει από την σταθερή κατάσταση. Ο ρυθμός μεγέθυνσης του κεφαλαίου ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας (α.μ.α.ε.) προκύπτει από την θεμελιώδη εξίσωση του υποδείγματος και εκτός ισορροπίας. Θυμίζω:

$$\dot{k}(t) = sf\left(k(t)\right) - \left(n + g + \delta\right)k(t)$$

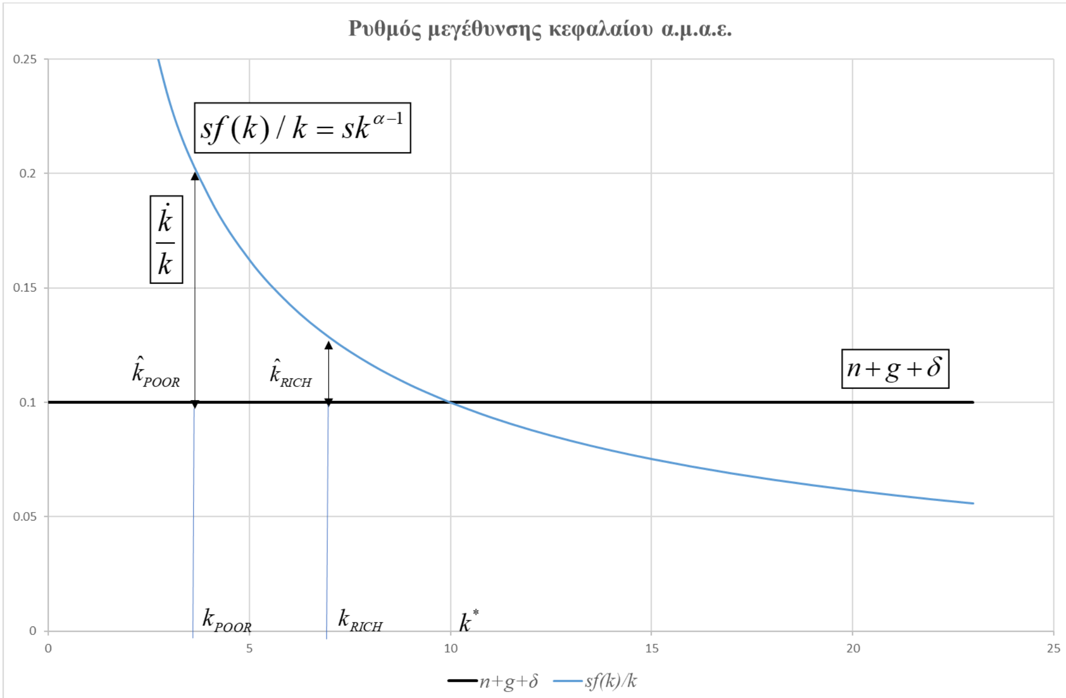
Διαιρώντας και τα δύο σκέλη της εξίσωσης με το $k(t)$ προκύπτει ο ρυθμός μεγέθυνσης του κεφαλαίου α.μ.α.ε.

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{f\left(k(t)\right)}{k(t)} - \left(n + g + \delta\right)$$

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής στην εντατική μορφή είναι τύπου Cobb-Douglas η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sk^{\alpha-1} - \left(n + g + \delta\right)$$

Αυτό μπορούμε να το δούμε στο παρακάτω διάγραμμα το οποίο έγινε με το λογισμικό MS Excel και μπορείτε να το κατεβάσετε από το αρχείο Solow-Swan model που βρίσκεται αναρτημένο στα Έγγραφα στο e-class του μαθήματος.




Αν υποθέσουμε ότι το κεφάλαιο α.μ.α.ε. του σταθερού σημείου είναι το $k^*$ τότε μια «πλούσια» χώρα βρίσκεται πλησιέστερα στο $k^*$ από όσο μια «φτωχή» (λιγότερο ανεπτυγμένη) χώρα. Συμβολίζουμε με $k_{RICH}$ και $k_{POOR}$ τα σημεία των δύο χωρών αντίστοιχα. Παρατηρείστε ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης είναι μεγαλύτερος στη λιγότερη ανεπτυγμένη χώρα. Συνεπώς αν υποθέσουμε ότι οι παράμετροι είναι ίδιες για τις δύο χώρες η «φτωχή» χώρα θα μεγεθύνεται με ταχύτερο ρυθμό από όσο η «πλούσια» χώρα, άρα οι δύο χώρες θα συγκλίνουν οικονομικά προϊόντος του χρόνου. Αυτή είναι η λεγόμενη υπόθεση της «απόλυτης σύγκλισης» (absolute convergence).

Η υπόθεση αυτή δεν ανταποκρίνεται στα εμπειρικά δεδομένα. Κλασικό παράδειγμα είναι η ανάλυση των Barro & Sala-i-Martin (2004) οι οποίοι έλεγξαν την υπόθεση αυτή σε ένα δείγμα 114 χωρών για την περίοδο 1960-2000.[1] Στο διάγραμμα από το βιβλίο τους φαίνεται καθαρά ότι μάλλον υπάρχει απόκλιση παρά σύγκλιση (Barro & Sala-i-Martin (2004), σ. 45). Στον οριζόντιο άξονα έχουμε τον λογάριθμό του κατά κεφαλήν ΑΕΠ το 1960, ενώ στον κάθετο άξονα τον μέσο ρυθμό μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν ΑΕΠ την περίοδο 1960-2000.

[1] Robert J. Barro & Xavier Sala-i-Martin. 2004. *Economic Growth*. Second edition. Cambridge, Mass.: MIT Press.

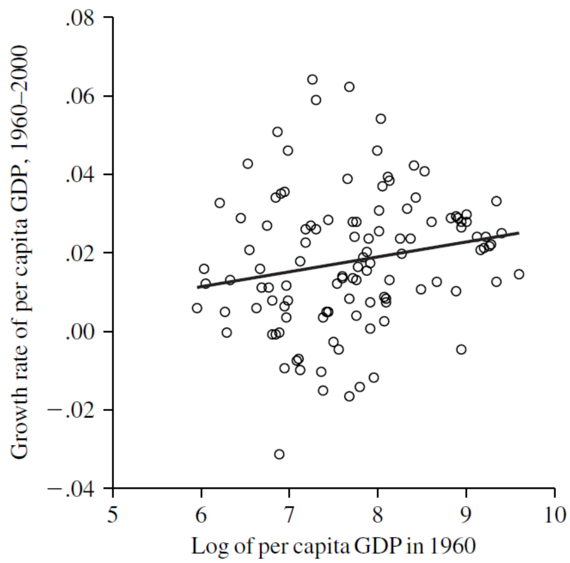



**Figure 1.7**
**Convergence of GDP across countries: Growth rate versus initial level of real per capita GDP for 114 countries.** For a sample of 114 countries, the average growth rate of GDP per capita from 1960 to 2000 (shown on the vertical axis) has little relation with the 1960 level of real per capita GDP (shown on the horizontal axis). The relation is actually slightly positive. Hence, absolute convergence does not apply for a broad cross section of countries.

---

**Σημ.**

Στο συνημμένο αρχείο Excel στα έγγραφα του e-class έχω κάνει μια – πολύ πρόχειρη – εκτίμηση για 124 χώρες από τα δεδομένα της Παγκόσμιας Τράπεζας, από το 1980 έως το 2020. Έχω κάνει δύο γραφήματα. Το πρώτο δείχνει την διασπορά των ρυθμών μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν ΑΕΠ σε τρέχοντα δολάρια ΗΠΑ των περιόδων 1980-2000 και 1980-2020 σε σχέση με τον λογάριθμο του κατά κεφαλή ΑΕΠ το 1980. Το δεύτερο δείχνει τη διασπορά των ρυθμών μεγέθυνσης για την περίοδο 2000-2020 ως προς τον λογάριθμο του κατά κεφαλήν ΑΕΠ το 2000. Έχω επίσης κατασκευάσει σε ένα τρίτο διάγραμμα το ιστόγραμμα των ρυθμών μεγέθυνσης για τις περιόδους 1980-2000, 2000-2020 και 1980-2020. Βεβαιωθείτε ότι θα μπορούσατε να το κάνετε και εσείς.

---

Οι συγγραφείς όμως θεωρούν ότι αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι χώρες είναι ανομοιογενείς και οι σχετικές παράμετροι διαφέρουν μεταξύ τους. Όταν όμως κάνουν έναν παρόμοιο έλεγχο σε οικονομίες που είναι περισσότερο ομοιογενείς όπως εκείνες των πολιτειών των ΗΠΑ τα αποτελέσματα φαίνεται να επιρρωνύουν την υπόθεση της απόλυτης σύγκλισης. (Στο ίδιο, σ. 47)

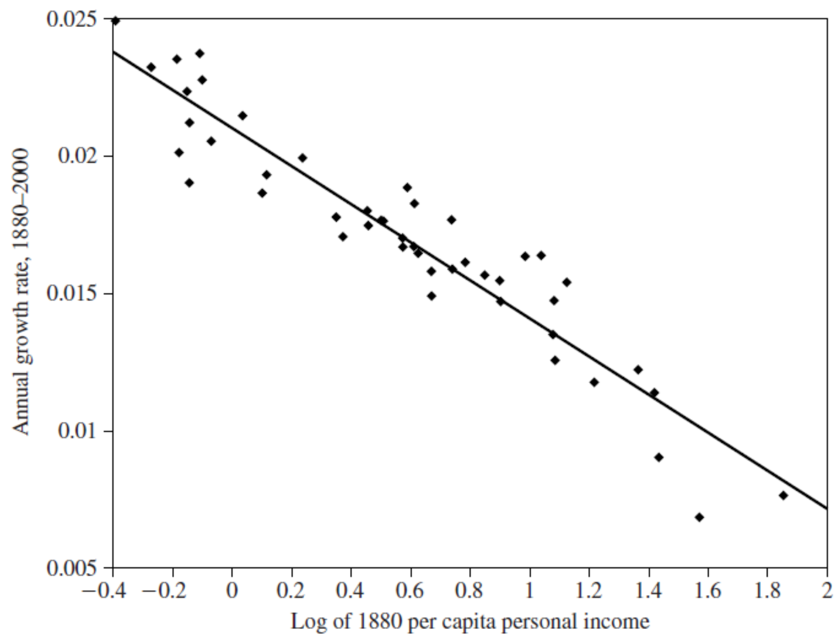
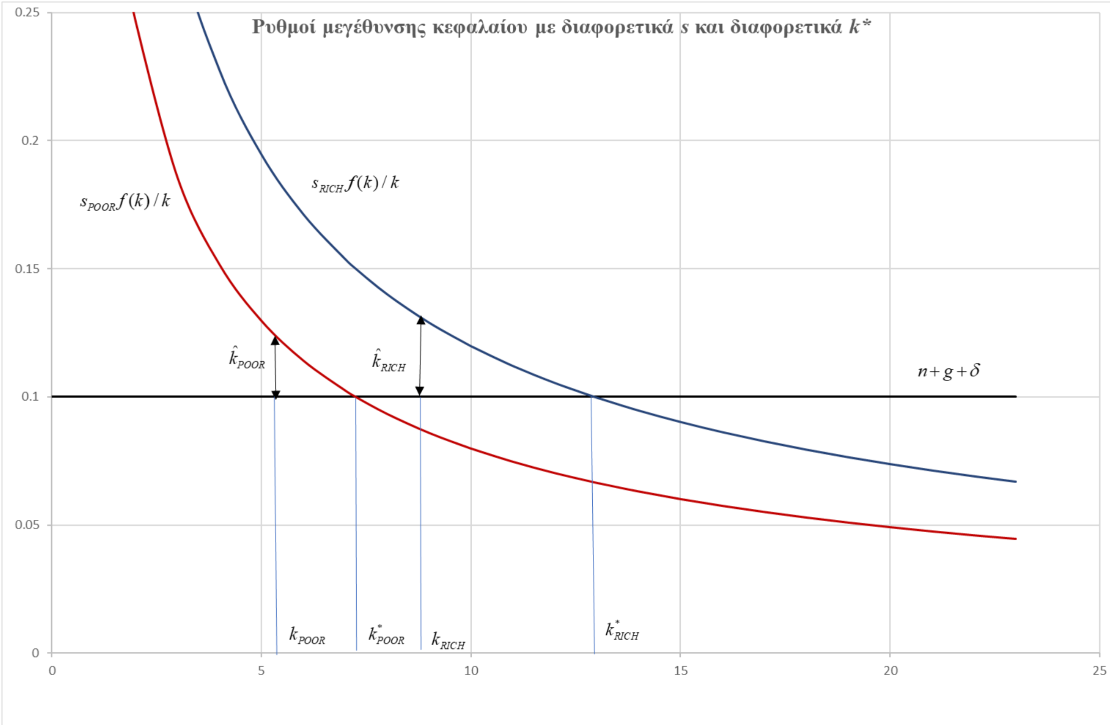



**Figure 1.9**
**Convergence of personal income across U.S. states: 1880 personal income and income growth from 1880 to 2000.** The relation between the growth rate of per capita personal income from 1880 to 2000 (shown on the vertical axis) is negatively related to the level of per capita income in 1880 (shown on the horizontal axis). Thus absolute convergence holds for the states of the United States.

Στην πραγματικότητα, το υπόδειγμα Solow δεν δηλώνει ότι θα υπάρχει απόλυτη σύγκλιση. Αν οι παράμετροι είναι διαφορετικές τότε και τα $k^*$ θα είναι διαφορετικά και η απόσταση από την αρχική κατάσταση θα είναι διαφορετική. Αν, για παράδειγμα τα $s$ είναι διαφορετικά τότε η καμπύλη $sf(k)/k$ θα είναι διαφορετική στις δύο χώρες και τα $k^*$ θα διαφέρουν. Το ίδιο θα συμβεί αν διαφέρουν και τα $n$, $g$, και $\delta$. Αυτό φαίνεται καθαρά στο παρακάτω διάγραμμα [από το αρχείο Solow-Swan model]. Η «πλούσια» χώρα έχει μεγαλύτερο $s$ από την «φτωχή» συνεπώς τα $k^*$είναι διαφορετικά $s_{RICH} > s_{POOR} \Rightarrow k^*_{RICH} > k^*_{POOR}$.

Παρόλον όμως ότι η αρχική κατάσταση της «φτωχής» χώρας είναι μικρότερη από της «πλούσιας», δηλ., $k_{POOR} < k_{RICH}$ αυτό δεν συνεπάγεται αναγκαστικά και ότι $\hat{k}_{POOR} > \hat{k}_{RICH}$ διότι έχουν διαφορετικά $k^*$.




Ας επιχειρήσουμε τώρα να βρούμε ένα **ποσοτικό μέτρο της ταχύτητας σύγκλισης**.

Η ταχύτητα της σύγκλισης (speed of convergence) $\beta$ μετρά πόσο γρήγορα μειώνεται ο ρυθμός μεγέθυνσης αναλογικά με το επίπεδο του κεφαλαίου (α.μ.ε.α.). Ορίζεται δε ως

$$\beta \equiv -\frac{\partial\left(\dot{k}/k\right)}{\partial \ln k}$$

Το αρνητικό πρόσημο έχει τεθεί για να έχουμε θετικές τιμές του $\beta$, εφόσον ο ρυθμός μεγέθυνσης μειώνεται με το επίπεδο του (λογάριθμου του) κεφαλαίου.

Στην απλή περίπτωση της συνάρτησης παραγωγής Cobb-Douglas έχουμε

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sk^{\alpha-1} - \left(n+g+\delta\right) \Rightarrow \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = se^{-(1-\alpha)\ln k} - \left(n+g+\delta\right)$$

Η πρώτη παράγωγος της εξίσωσης αυτής ως προς ln$k$ μας δίνει το $\beta$.

$$\beta \equiv -\frac{\partial\left(\dot{k}/k\right)}{\partial \ln k} = -\frac{\partial\left[se^{-(1-\alpha)\ln k} - \left(n+g+\delta\right)\right]}{\partial \ln k} = -s\left[-(1-\alpha)\right]e^{-(1-\alpha)\ln k} = (1-\alpha)sk^{-(1-\alpha)}$$

Η ταχύτητα της σύγκλισης εξαρτάται αρνητικά από το κεφάλαιο, άρα δεν είναι σταθερή. Στο σταθερό (και οριακό) σημείο ισχύει ότι

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sk^{*-(1-\alpha)} - \left(n+g+\delta\right) = 0 \Rightarrow sk^{*-(1-\alpha)} = \left(n+g+\delta\right) \Rightarrow$$
$$\beta^* = \left(1-\alpha\right)\left(n+g+\delta\right)$$

Συνεπώς στην περιοχή του $k^*$ ισχύει ότι η ταχύτητα σύγκλισης είναι η $\beta^*$. Για κάθε $k<k^*$ η ταχύτητα $\beta$ θα είναι μεγαλύτερη από την $\beta^*$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να επιχειρήσουμε μια λογαριθμο-γραμμική προσέγγιση (log-linear approximation) στην περιοχή του $k^*$.

$$\dot{k}/k \cong -\beta^* \ln\left(k/k^*\right)$$

Προηγουμένως όμως είναι χρήσιμο να αποδείξουμε ότι η ίδια προσέγγιση δεν ισχύει μόνο για το $k$ αλλά και για το $y$, δηλ., το προϊόν α.μ.ε.α. Ισχύει δηλ., ότι

$$\dot{y}/y \cong -\beta^* \ln\left(y/y^*\right)$$

Συνεπώς ισχύει ότι στην περιοχή του $y^*$ η ταχύτητα σύγκλισης είναι η ίδια με την ταχύτητα σύγκλισης στην περιοχή του $k^*$, δηλ., $\beta^*$

---

**Απόδειξη**

$y(t) = k(t)^{\alpha}$. Λογαριθμίζοντας και παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο $t$, έχουμε

$$\ln y = \alpha \ln k, \quad \frac{d\ln y}{dt} = \frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{d\ln k}{dt} = \alpha\frac{\dot{k}}{k} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k}$$

Επίσης ισχύει ότι

$$y = k^{\alpha}, \quad y^* = k^{*\alpha} \Rightarrow \frac{y}{y^*} = \frac{k^{\alpha}}{k^{*\alpha}} = \left(\frac{k}{k^*}\right)^{\alpha} \Rightarrow \ln\left(y/y^*\right) = \alpha\ln\left(k/k^*\right)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο σκέλη της εξίσωσης που μας δίνει την λογαριθμο-γραμμική προσέγγιση στην περιοχή του $k^*$ με $\alpha$, προκύπτει η αποδεικτέα προσέγγιση στην περιοχή του $y^*$.

---

Ο όρος $\beta^*$ στην εξίσωση $\beta^* = (1-\alpha)\left(n+g+\delta\right)$ μας δείχνει πόσο γρήγορα το προϊόν α.μ.α.ε. προσεγγίζει την τιμή της σταθερής κατάστασης $y^*$. Αν, π.χ., το $\beta^* = 0{,}05$, τότε το 5% της διαφοράς μεταξύ $y$ και $y^*$ εξαφανίζεται σε ένα έτος. Μπορούμε μάλιστα να υπολογίσουμε και την ημιζωή της σύγκλισης (half-life of convergence), δηλ., τον χρόνο που απαιτείται για να γεφυρωθεί το μισό αυτής της διαφοράς.

Η εξίσωση $\dot{y}/y \cong -\beta^* \ln\left(y/y^*\right)$ είναι μια διαφορική εξίσωση ως προς ln[$y$($t$)] η οποία έχει λύση

$$\ln[y(t)] = (1 - e^{-\beta^* t})\ln\left(y^*\right) + e^{-\beta^* t}\ln\left[y(0)\right]$$

Αν τώρα $e^{-\beta^* t} = 1/2$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\ln[y(t)] = (1 - e^{-\beta^* t})\ln\left(y^*\right) + e^{-\beta^* t}\ln\left[y(0)\right] \Rightarrow \ln[y(t_{1/2})] = \frac{1}{2}\ln\left(y^*\right) + \frac{1}{2}\ln\left[y(0)\right]$$

Γεφυρώνεται δηλ., το μισό της απόστασης μεταξύ της αρχικής και της σταθερής κατάστασης. Λύνοντας ως προς $t$ και υποθέτοντας ότι το $\beta^*$=0,05 έχουμε

$$e^{-\beta^* t} = 1/2 \Rightarrow -\beta^* t = \ln(1/2) = -\ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\beta^*} \approx \frac{0,69}{0,05} \approx 14$$

Δηλ., με ένα $\beta$ ίσο με 5% θα χρειαστούμε περίπου 14 χρόνια για να καλύψουμε το μισό της απόστασης και άλλα τόσα για να καλύψουμε το άλλο μισό, δηλ., 28 χρόνια για να καλύψουμε τα τρία τέταρτα της απόστασης.

Η εξίσωση που προσδιορίζει την τιμή του $\beta$ είναι συνάρτηση των παραμέτρων $\alpha$, $n$, $g$, και $\delta$. Το ερώτημα είναι αν η ταχύτητα σύγκλισης είναι συμβατή με τις τιμές αυτών των παραμέτρων.

$$\beta^* = \left(1-\alpha\right)\left(n+g+\delta\right)$$

Αν υποθέσουμε ότι μια λογική τιμή για τον ρυθμό την εξωγενούς μεγέθυνσης $g$ είναι το 2%, ο ρυθμός μεγέθυνσης του πληθυσμού $n$ είναι 1%, και ο ρυθμός απόσβεσης $\delta$ είναι 5%, τότε το ($n$+$g$+$\delta$)=0,08. Το $\alpha$ – το μερίδιο του κεφαλαίου στο εισόδημα – είναι συνήθως κοντά στο 1/3, έστω 30%. Άρα αυτό μας δίνει ένα $\beta^*$ κοντά στο 5,33% το έτος. Άρα ο χρόνος που θα μειωθεί στο μισό η απόσταση – η ημιζωή – είναι περίπου 0,693/0,0533 ή 13 έτη. Αυτό όμως σημαίνει ότι η μετάβαση είναι πολύ ταχύτερη από αυτήν που παρατηρούμε εμπειρικά, δηλ., γύρω στο 2% κατ' έτος αντί για 5,3%. Αυτό θα σήμαινε μια τιμή του $\alpha$ πολύ μεγαλύτερη – κοντά στο 0,75 – η οποία δεν συμβιβάζεται με τα εμπειρικά δεδομένα. Αν δεν βοηθάν όμως τα δεδομένα, τροποποιούμε – ή επαυξάνουμε – το υπόδειγμά μας και ξαναδοκιμάζουμε.

**Το ανθρώπινο κεφάλαιο σώζει την κατάσταση για το υπόδειγμα Solow**

Οι N. Gregory Mankiw, David Romer και David N. Weil σε άρθρο τους που δημοσιεύθηκε το 1992[2] παρατηρούν ότι ενώ η οικονομετρική διερεύνηση της σύγκλισης των οικονομιών βασισμένη στο υπόδειγμα Solow συμφωνεί με τα δεδομένα, οι αριθμητικές τιμές των παραμέτρων που απαιτούνται για να ταιριάζουν τα δεδομένα στο υπόδειγμα δεν είναι ρεαλιστικές. Ιδιαίτερα δε η παράμετρος $\alpha$ της συνάρτησης παραγωγής Cobb-Douglas είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν που δείχνουν τα δεδομένα (περίπου 3/4 αντί για 1/3). Προτείνουν μια τροποποίηση του υποδείγματος ώστε να περιλαμβάνει εκτός από φυσικό ($K$) και ανθρώπινο κεφάλαιο ($H$). Η τροποποίηση (επαύξηση) αυτή οδηγεί σε μια συναθροιστική συνάρτηση παραγωγής τύπου Cobb-Douglas της μορφής:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha_K} H(t)^{\alpha_H} \left[A(t)L(t)\right]^{1-\alpha_K-\alpha_H}$$

Όπου κατά τα γνωστά $Y(t)$ είναι το προϊόν, $K(t)$ το φυσικό κεφάλαιο, $H(t)$ το ανθρώπινο κεφάλαιο, $L(t)$ η εργασία και $A(t)$ η αποτελεσματικότητα της εργασίας. Το ποσοστό της αποταμίευσης ($s$) και ο συντελεστής απόσβεσης ($\delta$) είναι πλέον διαφορετικοί για το φυσικό και ανθρώπινο κεφάλαιο και παίρνουν τους αντίστοιχους υποδείκτες $K$ και $H$.

Έχουμε συνεπώς $0 < s_K, s_H, \delta_K, \delta_H < 1$. Επίσης ισχύει ότι στην τροποποιημένη Cobb-Douglas: $0 < \alpha_K, \alpha_H, \alpha_K + \alpha_H < 1$. Όπως και στο αρχικό υπόδειγμα, οι ρυθμοί μεγέθυνσης της εργασίας και της αποτελεσματικότητας της εργασίας δίνονται εξωγενώς, είναι σταθεροί και ίσοι με $n$ και $g$ αντίστοιχα. $\dot{L}(t)\big/L(t) = n,\ \dot{A}(t)\big/A(t) = g$.

Δεδομένου ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι ομογενής πρώτου βαθμού, έχει δηλ., σταθερές αποδόσεις κλίμακος [γιατί;] μπορούμε να εργαστούμε με την εντατική μορφή (intensive form). Ορίζουμε τις συνεχείς χρονικές μεταβλητές μας σε εντατική μορφή:

$$y(t) \equiv \frac{Y(t)}{A(t)L(t)},\ k(t) \equiv \frac{K(t)}{A(t)L(t)},\ h(t) \equiv \frac{H(t)}{A(t)L(t)}$$

Η συνάρτηση παραγωγής στην εντατική μορφή είναι πλέον

$$y(t) = k(t)^{\alpha_K} h(t)^{\alpha_H}$$

Ενώ το υπόδειγμα έχει πλέον δυο θεμελιώδεις εξισώσεις, μία για κάθε τύπο κεφαλαίου:

$$\dot{k}(t) = s_K y(t) - (n + g + \delta_K)k(t)$$
$$\dot{h}(t) = s_H y(t) - (n + g + \delta_H)h(t)$$

[2] N. Gregory Mankiw, David Romer, and David N. Weil. "A Contribution to the Empirics of Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics* 107, no. 2 (1992): 407–37. Η ανάλυση που ακολουθεί βασίζεται στο Ben J. Heijdra, 2017. *Foundations of Modern Macroeconomics*. Third Edition. Oxford: Oxford University Press.

Το νέο σημείο ισορροπίας θα προκύψει τώρα από τα σημεία εκείνα όπου η πρώτη παράγωγος του φυσικού και του ανθρώπινου κεφαλαίου ως προς τον χρόνο είναι μηδενική. Δηλ., θα λύσουμε τις εξισώσεις για $\dot{k}(t)=0$ και $\dot{h}(t)=0$. Αντικαθιστώντας την εντατική μορφή της συνάρτησης παραγωγής στις θεμελιώδεις εξισώσεις για μηδενικές παραγώγους ως προς τον χρόνο έχουμε:

$$\dot{k}(t)=s_K k(t)^{\alpha_K} h(t)^{\alpha_H}-(n+g+\delta_K)k(t)$$

$$\dot{k}(t)=0 \Rightarrow s_K k(t)^{\alpha_K} h(t)^{\alpha_H}=(n+g+\delta_K)k(t) \Rightarrow h(t)^{\alpha_H}=\frac{n+g+\delta_K}{s_K}k(t)^{1-\alpha_K} \Rightarrow$$

$$h(t)=\left(\frac{n+g+\delta_K}{s_K}\right)^{\frac{1}{\alpha_H}} k(t)^{\frac{1-\alpha_K}{\alpha_H}}$$

Η εξίσωση αυτή συνδέει τις τιμές των $k(t)$ και $h(t)$ εκεί όπου $\dot{k}(t)=0$. Παρατηρείστε ότι η γραφική παράσταση αυτής της εξίσωσης είναι ανοδική, ξεκινά από την αρχή των αξόνων και είναι κυρτή. [Πρέπει να μπορείτε να αποδείξετε ότι ισχύει ότι για $k$=0 και $h$=0 και ότι $\frac{dh}{dk}>0, \frac{d^2h}{dk^2}>0$]. Μπορείτε επίσης να δείτε ότι πάνω και αριστερά αυτής της καμπύλης το $k(t)$ μειώνεται, ενώ κάτω και δεξιά το $k(t)$ αυξάνει. [Για να το αποδείξετε αυτό δείτε τι γίνεται όταν $\dot{k}(t)>0$ και λύστε ως προς την ανισότητα >0. Θα παρατηρήσετε ότι για $h(t)$ μεγαλύτερα από εκείνα της εξίσωσης $\dot{k}(t)>0$.]

Η αντίστοιχη εξίσωση για $\dot{h}(t)=0$ είναι η εξής:

$$\dot{h}(t)=s_H k(t)^{\alpha_K} h(t)^{\alpha_H}-(n+g+\delta_H)h(t)$$

$$\dot{h}(t)=0 \Rightarrow s_H k(t)^{\alpha_K} h(t)^{\alpha_H}=(n+g+\delta_H)h(t) \Rightarrow h(t)^{1-\alpha_H}=\frac{s_H k(t)^{\alpha_K}}{n+g+\delta_H} \Rightarrow$$

$$h(t)=\left(\frac{s_H k(t)^{\alpha_K}}{n+g+\delta_H}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_H}}=\left(\frac{s_H}{n+g+\delta_H}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_H}} k(t)^{\frac{\alpha_K}{1-\alpha_H}}$$

$$h(t)=\left(\frac{s_H}{n+g+\delta_H}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_H}} k(t)^{\frac{\alpha_K}{1-\alpha_H}}$$

Η εξίσωση αυτή συνδέει τις τιμές των $k(t)$ και $h(t)$ εκεί όπου $\dot{h}(t)=0$. Παρατηρείστε ότι η γραφική παράσταση αυτής της εξίσωσης είναι ανοδική, ξεκινά από την αρχή των αξόνων και είναι κοίλη. [Πρέπει να μπορείτε να αποδείξετε ότι ισχύει ότι για $k$=0 και $h$=0 και ότι $\frac{dh}{dk}>0, \frac{d^2h}{dk^2}<0$]. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση μπορείτε να παρατηρήσετε ότι κάτω και δεξιά της καμπύλης $\dot{h}(t)=0$ το $h(t)$ αυξάνει ενώ πάνω και αριστερά φθίνει.

Το σημείο ισορροπίας του υποδείγματος προκύπτει στο σημείο $\left(k^*, h^*\right)$ όπου ισχύει ότι $\dot{k}(t) = 0$ και $\dot{h}(t) = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$h(t) = \left(\frac{n+g+\delta_K}{s_K}\right)^{\frac{1}{\alpha_H}} k^{*\frac{1-\alpha_K}{\alpha_H}} = \left(\frac{s_H}{n+g+\delta_H}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_H}} k^{*\frac{\alpha_K}{1-\alpha_H}}$$

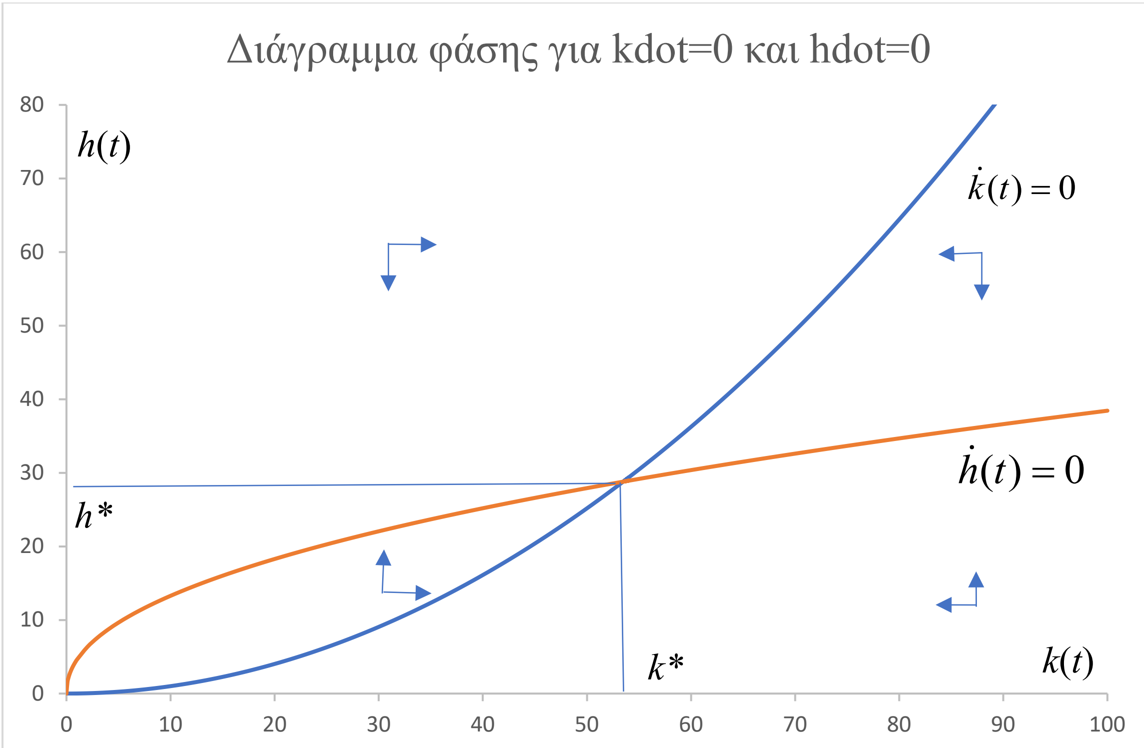
Μετά από μια σειρά ανιαρές πράξεις – τις οποίες καλείσθε να επιβεβαιώσετε – προκύπτει η τιμή ισορροπίας του $k(t)$.

$$k^* = \left[\left(\frac{s_K}{n+g+\delta_K}\right)^{1-\alpha_H}\left(\frac{s_H}{n+g+\delta_H}\right)^{\alpha_H}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_K-\alpha_H}}$$

Και αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στη θεμελιώδη εξίσωση του ανθρώπινου κεφαλαίου για $\dot{h}(t) = 0$ προκύπτει ότι

$$h^* = \left[\left(\frac{s_K}{n+g+\delta_K}\right)^{\alpha_K}\left(\frac{s_H}{n+g+\delta_H}\right)^{1-a_K}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_K-\alpha_H}}$$

Το παρακάτω διάγραμμα έχει δημιουργηθεί για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων σε λογιστικό φύλλο του λογισμικού MS Excel στο αρχείο με τίτλο «Mankiw Romer Weil 1992» που έχει αναρτηθεί στα έγγραφα του e-class.




Η εισαγωγή του ανθρώπινου κεφαλαίου στη συνάρτηση παραγωγής επιτρέπουν στους Mankiw, Romer & Weil να επιτύχουν καλύτερα αποτελέσματα στην οικονομετρική διερεύνηση της σύγκλισης από ότι το απλό υπόδειγμα Solow. Όχι μόνον οι παράμετροι πλέον έχουν ρεαλιστικές τιμές αλλά και εξηγείται μεγαλύτερο μέρος της διακύμανσης των διαφορών μεταξύ των οικονομιών. Ας σημειωθεί ότι οι τρεις συγγραφείς δεν επιχειρούν να αποδείξουν ότι υπάρχει σύγκλιση. Αντίθετα γνωρίζουν ότι δεν υπάρχει. Επιχειρούν να αποδείξουν ότι διαφορετικές οικονομίες έχουν διαφορετική σταθερή κατάσταση (steady state) που αντιστοιχεί σε διαφορετικές παραμέτρους.

Από τις παραπάνω εξισώσεις μπορούν να συσχετίσουν το ΑΕΠ κατά κεφαλή με τις παραμέτρους του υποδείγματος. Από το προϊόν ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας σε σταθερή κατάσταση μπορεί να υπολογιστεί το ΑΕΠ κατά κεφαλή σε σταθερή κατάσταση.

$$y(t)=\frac{Y(t)}{A(t)L(t)}\Rightarrow \ln y(t)=\ln\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)-\ln A(t)\Rightarrow \ln\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^{*}=\ln y^{*}-\ln A(t)=\ln y^{*}-\ln A(0)-gt$$

Το προϊόν ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας $y^*$ σε κατάσταση ισορροπίας προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τα $k^*$και $h^*$ στην συνάρτηση παραγωγής στην εντατική μορφή:

$$y^* = k^{*\alpha_K} h^{*\alpha_H} = \left[ \left( \frac{s_K}{n+g+\delta_K} \right)^{1-\alpha_H} \left( \frac{s_H}{n+g+\delta_H} \right)^{\alpha_H} \right]^{\frac{\alpha_K}{1-\alpha_K-\alpha_H}} \left[ \left( \frac{s_K}{n+g+\delta_K} \right)^{\alpha_K} \left( \frac{s_H}{n+g+\delta_H} \right)^{1-\alpha_K} \right]^{\frac{\alpha_H}{1-\alpha_K-\alpha_H}}$$

Αντικαθιστούμε το $y$* αυτό στην εξίσωση $\ln\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = \ln y^* - \ln A(0) - gt$ και μπορούμε να διερευνήσουμε οικονομετρικά την εξίσωση βάσει των σχετικών παραμέτρων.

**Μια εναλλακτική μέθοδος για την εύρεση της ταχύτητας σύγκλισης**[3]

Θυμηθείτε ότι η θεμελιώδης εξίσωση του υποδείγματος Solow στην εντατική μορφή της συνάρτησης παραγωγής Cobb-Douglas είναι η

$$\dot{k}(t) = sk(t)^\alpha - \left(n+g+\delta\right)k(t)$$

Παρά την απλούστευση με την συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas η παραπάνω διαφορική εξίσωση δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά επειδή δεν είναι γραμμική. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση Taylor[4] – γύρω από το κεφάλαιο σταθερής κατάστασης – για μια πιο διαχειρίσιμη και γραμμική μορφή. Προσεγγίζουμε λοιπόν την παράσταση $sk(t)^\alpha$

$sk(t)^\alpha \approx s\left(k^*\right)^\alpha + s\alpha\left(k^*\right)^{\alpha-1}\left[k(t)-k^*\right]$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι στο $k$* ισχύει ότι $s\left(k^*\right)^\alpha = (n+g+\delta)k^*$ η εξίσωση γίνεται

$$sk(t)^\alpha \approx (n+g+\delta)k^* + \alpha(n+g+\delta)\left[k(t)-k^*\right]$$

Η θεμελιώδης εξίσωση τώρα γίνεται

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= sk(t)^\alpha - \left(n+g+\delta\right)k(t) \approx (n+g+\delta)k^* + \alpha(n+g+\delta)\left[k(t)-k^*\right] - \left(n+g+\delta\right)k(t) = \\ &= (1-\alpha)(n+g+\delta)k^* - (1-\alpha)(n+g+\delta)k(t) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\dot{k}(t) = -\beta\left[k(t)-k^*\right]$$

Όπου, όπως και πριν, $\beta = \left(1-\alpha\right)\left(n+g+\delta\right) > 0$

Η διαφορική εξίσωση τώρα είναι γραμμική ως προς $k(t)$ και λύνεται ως

$$\dot{k}(t) = k^* + \left[k(0)-k^*\right]e^{-\beta t}$$

---

[3] Ben J. Heijdra, 2017, σσ. 418-9

[4] Θυμίζω: $f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)\left(x-x^*\right)$

Στην πραγματικότητα όμως αυτό που θέλουμε είναι η ταχύτητα σύγκλισης του προϊόντος $y(t)$. Μετασχηματίζομε τη θεμελιώδη εξίσωση διαιρώντας με $k(t)$,

$$\dot{k}(t) = -\beta\left[k(t) - k^*\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = -\beta\left[\frac{k(t)}{k(t)} - \frac{k^*}{k(t)}\right] = -\beta\left[1 - \frac{k^*}{k(t)}\right]$$

Χρησιμοποιούμε επίσης την προσέγγιση $\ln\left(k(t)/k^*\right) \approx 1 - k^*/k(t)$ η οποία προκύπτει και αυτή από την προσέγγιση Taylor. Συνεπώς, $k^*/k(t) \approx 1 - \ln\left(k(t)/k^*\right)$

**Απόδειξη**: $\ln\left(\frac{k(t)}{k^*}\right) = \ln\left(\frac{k^*}{k^*}\right) + \frac{1}{k^*}\left(\frac{k^*}{k(t)}\right)\left[k(t) - k^*\right] = 1 - \frac{k^*}{k(t)}$. Συνεπώς,

$\frac{k^*}{k(t)} \approx 1 - \ln\left(\frac{k(t)}{k^*}\right)$

Αντικαθιστώντας έχουμε: $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = -\beta \ln\left(\frac{k(t)}{k^*}\right) = -\beta\left[\ln k(t) - \ln k^*\right]$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο σκέλη της εξίσωσης με $\alpha$.

$$\alpha\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = -\beta\left[\alpha \ln k(t) - \alpha \ln k^*\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{d \ln y(t)}{dt} = -\beta\left[\ln y(t) - \ln y^*\right]$$

[Θυμηθείτε ότι: $\hat{k}(t) \equiv \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{d \ln k(t)}{dt}$, $\hat{y}(t) = \alpha\hat{k}(t)$, $\frac{d \ln y(t)}{dt} = \alpha\frac{d \ln k(t)}{dt}$ ]

Από την οποία προκύπτει – ως λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτου βαθμού ως προς $\ln(y(t))$ – ότι

$$\ln\left(y(t)\right) = \ln\left(y^*\right) + \left[\ln\left(y(0)\right) - \ln\left(y^*\right)\right]e^{-\beta t}$$

Με άλλα λόγια, το $\beta$ είναι η κοινή ταχύτητα προσαρμογής των $k(t)$, $\ln k(t)$, $y(t)$ και $\ln y(t)$.

Διαισθητικά το $\beta$ μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: Το $\zeta$ x 100% της διαφοράς/απόστασης μεταξύ του $k(t)$ και του $k^*$ – ή του $y(t)$ και του $y^*$ – εξαφανίζεται μετά από ένα χρονικό διάστημα $t_\zeta$ το οποίο είναι ίσο με

$$t_\zeta = -\frac{\ln\left(1-\zeta\right)}{\beta}$$

Στον παρακάτω πίνακα μπορείτε να δείτε πως εξαλείφεται η διαφορά για διαφορετικές τιμές του $\beta$.

**Χρόνος σε έτη εξάλειψης διαφοράς κατά ζ%**
**για $\beta$=0,02 και $\beta$=0,05**

| $t_\zeta$ | | $\beta$ | |
|---|---|---|---|
| | | 0,02 | 0,05 |
| $\zeta$ | 10% | 5,3 | 2,1 |
| | 25% | 14,4 | 5,8 |
| | 50% | 34,7 | 13,9 |
| | 75% | 69,3 | 27,7 |
| | 90% | 115,1 | 46,1 |