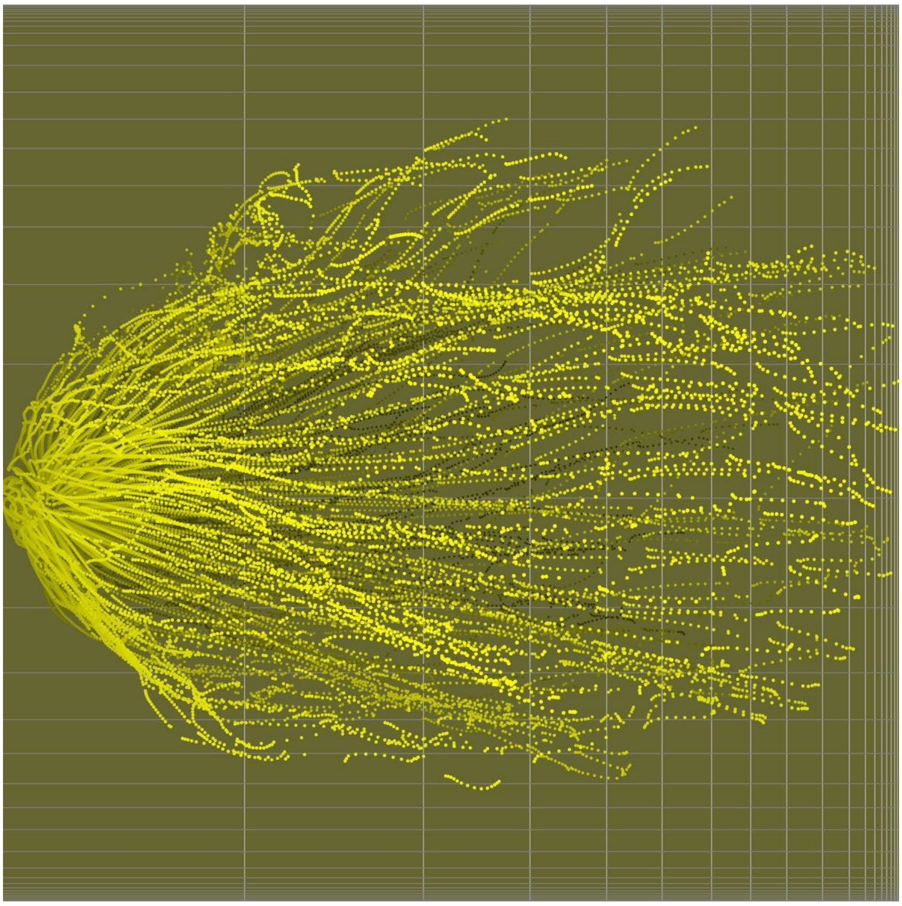
Στοχαστικά Μαθηματικά στα Οικονομικά και στα Χρηματοοικονομικά



Στυλιανός Κώτσιος - Εμμανουήλ Δρακωνάκης

1 Σεπτεμβρίου 2020

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Προαπαιτούμενα

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια συνοπτική αναφορά στα κομμάτια, τα οποία είναι προαπαιτούμενα, για την κατανόηση των εν συνεχεία κεφαλαίων.

1.1 Θεωρία πιθανοτήτων

1.1.1 Βασικοί Ορισμοί και Ιδιότητες

Η σύγχρονη θεωρία των πιθανοτήτων πηγάζει από την έρευνα που δημοσίευσε ο Andrey Kolmogorov το 1933.

Ορισμός 1.1 *Πείραμα τύχης είναι μια διαδικασία της οποίας το αποτέλεσμα δεν είναι εκ των προτέρων δεδομένο.*

Ορισμός 1.2 *Απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο είναι κάθε ένα από τα δυνητικά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης.*

Ορισμός 1.3 *Δειγματικός χώρος ή Υπερσύνολο, είναι το σύνολο όλων των ενδεχομένων, δηλαδή όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης και συμβολίζεται με το γράμμα* Ω .

Ο αριθμός των συνολικών εν δυνάμει αποτελεσμάτων που επηρεάζουν την χρηματιστηριακή αγορά είναι τεράστιος. Όλα τα υποσύνολα ενός δειγματικού χώρου Ω σχηματίζουν ένα σύνολο που υποδηλώνεται με 2^{Ω}. Το πλήθος των στοιχείων του Ω συμβολίζεται με $|\Omega|$.

Παρατήρηση 1.1 *Εάν το πλήθος των ενδεχομένων είναι πεπερασμένο, δηλαδή* $|\Omega| = n$*, τότε το σύνολο* 2^{Ω} *έχει* 2^n *στοιχεία.*

Αναφερόμενοι σε πραγματικά δεδομένα και καταστάσεις, είναι αξιοσημείωτο ότι μια πλήρη περιγραφή της συνολικής πληροφόρησης του χρηματοπιστωτικού κόσμου υφίσταται, εάν ο δειγματικός χώρος Ω αντιπροσωπεύει όλες τις πιθανές καταστάσεις του οικονομικού κόσμου (states of the world), τότε το σύνολο 2^{Ω} περιγράφει όλα τα πιθανά γεγονότα που μπορεί να συμβούν στην αγορά.

Ορισμός 1.4 *Πληθικός Αριθμός, ενός ενδεχομένου* A *είναι το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου* A *και συμβολίζεται ως* $n(A)$.

Ορισμός 1.5 *Ένα υποσύνολο* A *καλείται υποσύνολο του* B*, δηλαδή* $A \subset B$*, αν κάθε στοιχείο του* A *είναι και στοιχείο του* B*. Αν το* B *περιέχει και στοιχεία τα οποία δεν ανήκουν στο* A*, τότε το* A *καλείται γνήσιο υποσύνολο του* B.

Ιδιότητα 1.1 *Δύο σύνολα* A *και* B *καλούνται ίσα ή ισοδύναμα, αν* $A \subset B$ *και* $B \subset A$.

Ορισμός 1.6 *Κενό σύνολο είναι ένα σύνολο χωρίς στοιχεία, είναι υποσύνολο κάθε άλλου συνόλου και συμβολίζεται με* $\emptyset$.

Ορισμός 1.7 *Η ένωσή δύο συνόλων* A *και* B*, αποτελείται από κάθε στοιχείο που ανήκει στο* A*, το* B*, ή και στα δύο σύνολα και συμβολίζεται ως* $A \cup B$*. Όταν αναφερόμαστε σε ενδεχόμενα, η ένωση δύο ενδεχομένων* $A \cup B$ *αντιστοιχεί στο να συμβεί είτε το Α είτε το Β (π.χ. αν κάνουμε αναφορά για ένα "ίδρυμα" ή "κερδοφόρο" ενοούμε την ένωση του ενδεχομένου "ίδρυμα" και του ενδεχομένου "κερδοφόρο").*

Ορισμός 1.8 *Η τομή δύο συνόλων A και B, αποτελείται από κάθε στοιχείο που ανήκει και στα δύο σύνολα ταυτόχρονα και συμβολίζεται με $A \cap B$ ή AB. Όταν αναφερόμαστε σε ενδεχόμενα, η τομή δύο ενδεχομένων $A \cap B$ αντιστοιχεί στο να συμβεί το A και το B. (π.χ. αν κάνουμε αναφορά για ένα "ίδρυμα" και "κερδοφόρο" ενοούμε την τομή του ενδεχομένου "ίδρυμα" και του ενδεχομένου "κερδοφόρο", δηλαδή "κερδοφόρο ίδρυμα").*

Ορισμός 1.9 *Τα σύνολα A και A^C ή (A') καλούνται συμπληρωματικά σύνολα, όταν:*

1. $AA^C = \emptyset$

   και

2. $A \cup A^C = \Omega$

δηλαδή το A^C αποτελείται από όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω, που δεν ανήκουν στο σύνολο A.

Ορισμός 1.10 *Η διαφορά δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με $A - B$ και μας δηλώνει όλα τα στοιχεία του συνόλου A που δεν ανήκουν στο σύνολο B ή η δυνατότητα να πραγματοποιηθεί το A ενδεχόμενο αλλά όχι το B (π.χ. $A - B =$"μη κερδοφόρο ίδρυμα").*

Ορισμός 1.11 *Ξένα ή ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, καλούνται δύο ενδεχόμενα A και B τα οποία ικανοποιούν την σχέση $AB = \emptyset$.*

Ιδιότητα 1.2 *Ιδιότητες συνόλων ή ενδεχομένων:*

- *Αντιμεταθετική:* $A \cup B = B \cup A$ *και* $A \cap B = B \cap A$.
- *Προσεταιριστική:* $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$ *και* $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$.
- *Επιμεριστική:* $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$ *και* $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.
- *Συμπλήρωμα συμπληρώματος:* $(A^C)^C = A$.
- $A \cup \Omega = \Omega, A \cap \Omega = A, A \cap \emptyset = \emptyset$ *και* $A \cup \emptyset = A$.
- $AA^C = \emptyset, A \cup A^C = \Omega, AA = A$ *και* $A \cup A = A$.
- *Κανόνες De Morgan:* $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ *και* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Παράδειγμα 1.1 *Έστω το σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta\}$, τότε να βρείτε:*

α') *Το συμπληρωματικό σύνολο A.*

β') *Το συμπληρωματικό σύνολο του προηγούμενου ερωτήματος.*

γ') *την τομή και την ένωση των συνόλων A, A'.*

Λύση: *Σύμφωνα με τα περιγραφόμενα στους προηγούμενους ορισμούς και ιδιότητες θα μπορέσουμε να βρούμε και να απαντήσουμε τα ζητούμενα. Πιο συγκεκριμένα:*

α') $A' = \{\zeta, \eta, \theta\}$

β') $(A')' = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\} = A$

γ') $A \cup A' = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta\}$ *και* $A \cup A' = \{\} = \emptyset$

Παράδειγμα 1.2 *Έστω τα σύνολα $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$, $B = \{\delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta\}$ και $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$, τα οποία αποτελούν πεζά γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου (χ) στο δειγματικό χώρο $\Omega = \{\chi\}$. Να βρείτε:*

α′) Τον πληθικό αριθμό για κάθε ένα από τα σύνολα A και B.

β′) Τι είναι το σύνολο Γ;

γ′) Την ένωση των συνόλων A και B.

δ′) Την τομή των συνόλων A και B.

ε′) Το συμπληρωματικό σύνολο του A.

ϛ′) Την διαφορά των συνόλων A και B.

ζ′) Τα σύνολα $A - B$ και A είναι ξένα μεταξύ τους;

Λύση: *Σύμφωνα με τα περιγραφόμενα στους προηγούμενους ορισμούς και ιδιότητες θα μπορέσουμε να βρούμε και να απαντήσουμε τα ζητούμενα. Πιο συγκεκριμένα:*

α′) Οι πληθικοί αριθμοί των ενδεχομένων A και B είναι $N(A) = 6$ και $N(B) = 5$ αντίστοιχα.

β′) Το $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$ είναι υποσύνολο του A.

γ′) $A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta\ \}$

δ′) $A \cap B = AB = \{\delta, \epsilon, \zeta\}$

ε′) $A^C = \{\eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, o, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega\}$

ϛ′) $A - B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

ζ′) Τα σύνολα $A - B$ και B είναι προφανώς ξένα μεταξύ τους.

Ορισμός 1.12

1. **Κλασσικός:** *Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A, ορίζεται ως ο λόγος του πληθικού αριθμού του ενδεχομένου προς τον πληθικό αριθμό του δειγματικού χώρου, υπό την προϋπόθεση ότι τα απλά ενδεχόμενο είναι ισοπίθανα. Με άλλα λόγια ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών για το ενδεχόμενο αποτελεσμάτων (απλών ενδεχομένων) δια του συνολικού αριθμού των αποτελεσμάτων (του πειράματος τύχης).*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)}$$

2. **Η Πιθανότητα ως Όριο:** *Όταν ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται n φορές και το ενδεχόμενο A εμφανιστεί σε x από αυτές, τότε*

$$P(A) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)$$

Παρατήρηση 1.2 *Για να διατυπώσουμε τον αξιωματικό ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας, χρειάζεται να ορίσουμε τον χώρο ενδεχομένων $\mathcal{A}$. Ο χώρος ενδεχομένων $\mathcal{A}$ αποτελείται από όλα τα δυνατά υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

- $\Omega \subset \mathcal{A}$, που συνεπάγεται ότι $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, τότε η ενωσή και η τομή αυτών των συνόλων ανήκουν στο $\mathcal{A}$, δηλαδή $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ και $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$, όπου $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ορισμός 1.13 Αξιωματικός (κατά Kolmogorov): *Μια συνάρτηση πιθανότητας $P(A)$ με πεδίο ορισμού τον χώρο ενδεχομένων $\mathcal{A}$ και πεδίο τιμών το διάστημα $[0, 1]$, καλείται συνάρτηση πιθανότητας, όταν ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:*

- $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$.
- $P(\Omega) = 1$

- Αν $A_1, A_2, \ldots$ είναι μία ακολουθία ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων που ανήκουν στον χώρο ενδεχομένων $\mathcal{A}$, τότε ισχύει ότι:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Παράδειγμα 1.3 *Ας θεωρήσουμε ότι ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά με $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Πόση είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί το στοιχείο 5 στο ζάρι;*

Λύση: *Δεδομένου ότι έχουμε ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, τότε:*

$$P(\Omega) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1 \text{ και } P(\Omega) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = P(\cup_{i=1}^{6}\{i\}) = \sum_{i=1}^{n} P(\{i\}) = 6p$$

Άρα, η πιθανότητα να εμφανιστεί το στοιχείο 5, από το ζάρι, είναι $p = 1/6$.

Ιδιότητα 1.3 *Οι ιδιότητες της συνάρτησης πιθανότητας $P(A)$ είναι οι:*

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, είναι ξένα μεταξύ τους τότε $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
3. $P(A^C) = 1 - P(A)$.
4. Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $P(A) = P(AB) + P(AB^C)$ και $P(A - B) = P(AB^C) = P(A) - P(B)$.
5. Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
6. Αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \subset B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.
7. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, τότε η ανισότητα του Boole είναι $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Παράδειγμα 1.4 *Έστω ότι ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά. Θεωρήστε ότι τα ενδεχόμενα $A = \{1, 2\}$, $B = \{4, 5, 6, \}$ και $\Gamma = \{3, 4\}$, τα οποία είναι υποσύνολα του δειγματεικού χώρου $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του προβλήματος. Ποιά είναι η πιθανότητα των γεγονότων $A \cup B$ και $A \cup \Gamma$;*

Λύση: *Τα ενδεχόμενα A και B, καθώς A και Γ είναι ξένα μεταξύ τους. Από τις ιδιότητες 1.4.5 και 1.4.6 θα έχουμε ότι:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 2/6 + 3/6 = 5/6$$

και

$$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) = 2/6 + 2/6 = 2/3$$

Ορισμός 1.14 Δεσμευμένη Πιθανότητα *καλείται η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A, δεδομένου ότι συνέβη το ενδεχόμενο B και συμβολίζεται με $P(A|B)$, δίδεται από τους κάτωθι τύπους:*

$$P(A|B) = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Ιδιότητα 1.4 *Οι ιδιότητες της δεσμευμένης πιθανότητας είναι:*

1. $P(\emptyset|B) = 0$.
2. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ και είναι ασυμβίβαστα τότε $P((\cup_{i=1}^{n} A_i)|B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$. Στην αντίθετη περίπτωση (δεν είναι ασυμβίβαστα), τότε ισχύει ότι: $P((\cup_{i=1}^{n} A_i)|B) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$.
3. Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $P(A^C|B) = 1 - P(A|B)$.

Παράδειγμα 1.5 *Έστω ότι ένας επενδυτής σκέφτεται να επενδύσει σε ένα χαρτοφυλάκιο με δύο μετοχές, από το σύνολο των προσφερόμενων μετοχών, συγκεκριμένα δύναται να επενδύσει το χρηματικό του ποσό σε μετοχές του ψευδαργύρου (Ψ) και μετοχές πετρέλαιο (Π).*

α') *Ποιός είναι ο δειγματικός χώρος Ω;*

β') *Ποιά είναι η πιθανότητα ο επενδυτής να προβεί στην αγορά του χαρτοφυλακίου που εμπεριέχει δύο μετοχές ψευδάργυρου;*

γ') *Ποιά είναι η πιθανότητα ο επενδυτής να προβεί προβεί στην αγορά συνολικά δύο μετοχών του χρυσού, αν γνωρίζουμε ότι έχει ήδη προβεί στην αγορά μίας μετοχής ψευδαργύρου;*

Λύση: *Έστω A το ενδεχόμενο ο επενδυτής "να προβεί στην αγορά δύο μετοχών Ψ " και B το ενδεχόμενο ο επενδυτής " έχει ήδη αγοράσει μία μετοχή Ψ ", τότε $A = \{\Psi\Psi\}$ και $B = \{\Psi\Pi, \Pi\Psi, \Pi\Pi\}$.*

α') *Ο δειγματικός χώρος είναι: $\Omega = \{\Psi\Psi, \Psi\Pi, \Pi\Psi, \Pi\Pi\}$.*

β') *$n(A) = 1/4$ και $n(B) = 3/4$ τότε, από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας κατά Kolmogorov θα έχουμε ότι:*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)} = 1/4$$

γ') *Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε ότι:*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1/3$$

Θεώρημα 1.1 (Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας - Θ.Ο.Π): *Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Αν η ακολουθία ανά δύο ασυμβίβαστων συνόλων $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$, ικανοποιεί την σχέση $\Omega = \cup_{i=1}^{n} B_i$, τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Θεώρημα 1.2 (Θεώρημα του Bayes): *Εστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Αν η ακολουθία ανά δύο ασυμβίβαστων συνόλων $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$, ικανοποιεί την σχέση $\Omega = \cup_{i=1}^{n} B_i$, τότε για κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{A}$, ισχύει:*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}, i = 1, \ldots, n$$

Ορισμός 1.15 Ανεξαρτησία: *Έστω τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n \in (\Omega, \mathcal{A}, P)$ καλούνται ανεξάρτητα, όταν ισχύουν οι σχέσεις:*

1.
   - $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, για $i \neq j$
   - $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$, για $i \neq j, j \neq k, i \neq k$
   - $\vdots$
   - $P(A_1 \cap A_2, \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n)$

2. *Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε από τον πολλαπασιαστικό κανόνα για την πιθανότητα τομής ενδεχομένων έχουμε ότι*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2}) \ldots P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

1.2 Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 1.16 *Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ως τυχαία μεταβλητή X ορίζεται μια συνάρτηση $X(\omega)$ με πεδίο ορισμού το Ω και πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, έτσι ώστε για κάθε $A \subset \Omega$, το σύνολο $E = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\}$ είναι ενδεχόμενο του Ω, δηλαδή $E \in \mathcal{A}$. Με άλλα λόγια, η τυχαία μεταβλητή αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό σε κάθε ενδεχόμενο που περιέχεται στον χώρο πιθανότητας.*

Παράδειγμα 1.6 *Έστω ότι στρίβουμε ένα "δίκαιο" νόμισμα 3 φορές (δίκαιο σημαίνει ότι κάθε μία από τις δύο πλευρές του έχει την ίδια πιθανότητα να εμφανιστεί και είναι ίση με $1/2$).*

Λύση: *Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης θα είναι,*

$$\Omega = \{\Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, K\Gamma K, KK\Gamma, KKK\}$$

κάθε ένα από τα στοιχειώδη ενδεχόμενα έχει πιθανότητα $1/8$ να εμφανιστεί. Μπορούμε να ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή X = πλήθος ενδείξεων "Γράμματα" στις τρείς ρίψεις του νομίσματος. Η X παίρνει τις τιμές: 0, που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο KKK, 1, που αντιτοιχεί στα ενδεχόμενα $\Gamma KK, K\Gamma K, KK\Gamma$, 2, που αντισοιχεί στα ενδεχόμενα $\Gamma\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma$ και 3, που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο $\Gamma\Gamma\Gamma$.

1.2.1 Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός 1.17 *Οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές παίρνουν τιμές στο σύνολο των φυσικών αριθμών $(\mathbb{N})$ συν το 0, ή σε ένα υποσυνολό του, Στο προηγούμενο παράδειγμα ο αριθμός των ενδείξεων "γράμματα" ήταν μια διακριτή τυχαία μεταβλητή. Είναι αξιοσημείωτο να αναφέρουμε ότι οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές παίρνουν τιμές σε ένα πεπερασμένο ή σε ένα αριθμήσιμο σύνολο. Κάθε συνάρτηση $p(x)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών και πεδίο τιμών το διάστημα $[0, 1]$, ορίζεται ως διακριτή συνάρτηση πιθανότητας, μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X που παίρνει τιμές $x_1, x_2, \ldots$, όταν έχει τις κάτωθι ιδιότητες:*

1. $p(x_i) > 0$, *όπου* $i = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $p(x) = 0$, *για* $x \neq x_i$, *όπου* $i = 1, 2, 3, \ldots$.
3. $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

Ορισμός 1.18 *Η συνάρτηση $F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i) = P(X \leq x)$, με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών και πεδίο τιμών το διάστημα $[0, 1]$, ορίζεται ως διακριτή αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X, που παίρνει τιμές $x_1, x_2, \ldots$, όταν έχει τις κάτωθι ιδιότητες:*

1. *Είναι (δεξιά) συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν x_n φθίνουσα με $lim x_n = x$, τότε $\lim_{x_n \to x} F(x_n) = F(x)$.*
2. *Είναι μη φθίνουσα συνάρτηση του x, δηλαδή αν $\alpha < \beta$, τότε $F(\alpha) \leq F(\beta)$.*
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.
4. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Παράδειγμα 1.7 *Σύμφωνα με το παράδειγμα 1.5, η τυχαία μεταβλητή X =πλήθος ενδείξεων "Γράμματα" στις τρείς ρίψεις του νομίσματος.*

α΄) Ποια είναι οι συναρτήση πιθανότητας για κάθε μία από τις τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή X, για $i = 0, 1, 2, 3$;

β΄) Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της X;

Λύση:

α') Η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι η $p(0) = \dfrac{1}{8}$, $p(1) = \dfrac{3}{8}$, $p(2) = \dfrac{3}{8}$ και $p(3) = \dfrac{1}{8}$.

β') Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της X είναι η:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{8}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{8}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Ορισμός 1.19 *Μία συνάρτηση $p(x, y)$, είναι η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας δύο διακριτών τυχαίων μεταβλητών, όταν πληροί τις ακόλουθες συνθήκες:*

1. $p(x, y) \geq 0$, *για κάθε ζεύγος* x, y.
2. $\sum_{x,y} p(x, y) = 1$.

Ορισμός 1.20 (Δισδιάστατες διακριτές τυχαίες μεταβλητές): *Εάν X, Y είναι δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ορίζονται στον ίδιο δειγματικό χώρο Ω και οι οποίες παίρνουν τις τιμές τους σ' ένα σύνολο τιμών $R_{X,Y}$. Η συνάρτηση $f : R_{X,Y} \to \mathbb{R}$ στο σύνολο $R_{X,Y} \subset \mathbb{R}x\mathbb{R}$ δίδεται από τον τύπο,*

$$f_{X,Y}(X, Y) = P(X = x, Y = y) = P\Big\{\omega \in \Omega, \text{ με } X(\omega) = x, Y(\omega)\Big\} = y$$

,καλείται από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y και έχει τις εξής ιδιότητες:

- $f(x, y) = 0$, *αν* $(x, y) \in R_{X,Y}$.
- $f(x, y) \geq 0$.
- $\sum_{(x,y)\in R_{X,Y}} f(x, y) = 1$.

Η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίδεται από τον τύπο,

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \Rightarrow P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{(s,t)\in R_{X,Y}} P(X = s, Y = t), \text{ όπου } s \leq x,\ t \leq y$$

Κατά γενικό κανόνα ισχύει η σχέση:

$$P[(X, Y) \in A] = \sum_{(x,y)\in A} f(x, y), \text{ όπου } A \subset \mathbb{R}$$

Οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι $f_X(x) = P(X = x) = \sum_{(x,y)\in R_{X,Y}} f(x, y)$ όπου x σταθερό και $f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{(x,y)\in R_{X,Y}} f(x, y)$, όπου y σταθερό αντίστοιχα, ενώ οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομή είναι $F_X(x) = P(X \leq x)$ και $F_Y(y) = P(Y \leq y)$. Επιπροσθέτως, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τις εξής ιδιότητες:

- $F_X(x) = \sum_{s\leq x} f_X(s)$.
- $F_Y(y) = \sum_{t\leq y} f_Y(t)$.
- $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x, y) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\{X \leq x, Y \leq n\}\Big)$.
- $F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x, y) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\{X \leq n, Y \leq y\}\Big)$.

Ορισμός 1.21 *Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f και σύνολο τιμών, $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots\}$. Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, ορίζεται από την σχέση*

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{x \in R_x} x P(X = x) = \sum_{x \in R_x} x f(x)$$

Επιπροσθέτως, ο υπολογισμός της αναμενόμενης μέσης τιμής μίας συνάρτησης τυχαίας μεταβλητής $g(X)$, όπου X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f, δίδεται από τον τύπο

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) f(x)$$

Ιδιότητα 1.5 *Αν X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

- $E(\alpha X + \beta) = \alpha E[X] + \beta$, *όπου* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $E[g(X) + h(X)] = E[g(X) + E[h(X)]$, *για οποιαδήποτε συνάρτηση* g, h.

Ορισμός 1.22 *Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f και σύνολο τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots\}$. Αν κάνουμε την υπόθεση ότι για την τυχαία μεταβλητή X υπάρχει η μέση τιμή $\mu = E[X]$, τότε η διακύμανση, δίδεται από την σχέση*

$$V[X] = E\Big[(X-\mu)^2\Big] \Leftrightarrow V[X] = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^2 f(x) \Leftrightarrow V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Οι μονάδες μέτρησης της διακύμανσης μιας ποσότητας X δεν είναι οι ίδιες με εκείνες στις οποίες μετριέται η ποσότητα X. Το γεγονός αυτό προσθέτει συχνά δυσκολίες στην ερμηνεία της τιμής της διακύμανσης που υπολογίζεται. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιείται ως εναλλακτικό μέτρο διασποράς μια τυχαίας μεταβλητής X, η οποία καλείται τυπική απόκλιση και εκφράζεται από την σχέση

$$\sigma_X = \sqrt{X[X]}$$

1.2.2 Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός 1.23 *Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές παίρνουν ριμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$), ή σε ένα υποσυνολό του (διάστημα ή ένωση διαστημάτων). Παραδείγματος χάριν η κερδοφορία (σε χιλιάδες €) των επιχειρήσεων της χώρας, η οποία μπορεί να πάρει θετικές η αρνητικές τιμές (κέρδη ή ζημίες). Κάθε συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών και πεδίο τιμών το διάστημα $[0, 1]$, ορίζεται ως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X, όταν έχει τις κάτωθι ιδιότητες:*

1. $f(x) \geq 0$, *για όλες τις τιμές τοδ* x.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Ορισμός 1.24 *Η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt = P(X \leq x)$, με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών και πεδίο τιμών το διάστημα $[0, 1]$, ορίζεται ως αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X, που έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f(x)$. Οι ιδιότητες της $F(x)$ είναι οι ίδιες όπως και στην περίπτωση της διακριτής τυχαίας μεταβλητής, με εξαίρεση τη συνέχεια,όπου η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής είναι απολύτως συνεχής, δηλαδή δεν παρουσιάζει σημεία ασυνέχειας στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$).*

Ορισμός 1.25 (Δισδιάστατες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές): *Εάν X, Y είναι δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ορίζονται στον ίδιο δειγματικό χώρο Ω και οι οποίες παίρνουν τις τιμές τους σ' ένα σύνολο τιμών Γ, τότε η συνάρτηση $f : \Gamma \to \mathbb{R}$για $\Gamma \subset \mathbb{R}x\mathbb{R}$ έχουμε την σχέση,*

$$P[(X,Y) \in \Gamma] = \int_{\Gamma}\int_{\Gamma} f(x,y) dx dy$$

,η οποίακαλείται από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y και έχει τις εξής ιδιότητες:

- $f(x,y) \geq 0$.
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

Η από κοινού (αθροιστική) συνάρτηση κατανομή δίδεται από τον τύπο,

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) \Rightarrow F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(s,t)dsdt$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ *και* $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ *αντίστοιχα, ενώ οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής είναι,*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)ds = \lim_{y \to -\infty} F(x,y)$$

και

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt = \lim_{x \to -\infty} F(x,y)$$

Ορισμός 1.26 *Μια συνάρτηση $f(x,y)$, είναι η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας δύο συνεχόμενων τυχαίων μεταβλητών, όταν πληροί τις ακόλουθες συνθήκες:*

1. $f(x,y) \geq 0$, *για κάθε ζεύγος x, y.*
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

Παράδειγμα 1.8 Έστω ότι έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = exp(-x-y)$ είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, δεδομένου ότι $x, y > 0$.

Λύση: *Για να είναι η συνάρτηση $f(x,y)$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y, πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες του ορισμού 1.22.*

- *1η συνθήκη:* $exp(-x-y) > 0$, *αφού* $exp > 0$.
- *2η συνθήκη:* $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-x-y)dxdy = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} exp(-x)exp(-y)dxdy = \int_{0}^{\infty} exp(-y)\Big[\int_{0}^{\infty} exp(-x)dx\Big]dy$

  $= \int_{0}^{\infty} exp(-y)\Big[-exp(-x)\Big]_{0}^{\infty} dy = \int_{0}^{\infty}\Big[\lim_{x\to\infty}[-exp(-x)] - [-exp(-)]\Big]dy = \int_{0}^{\infty} exp(-y)[0+1]dy$

$$= \int_{0}^{\infty} exp(-y)dy = 1$$

1.2.3 Ροπές

Ροπές περί την αρχήν (κ-τάξεως)

Η ακόλουθη συνάρτηση ορίζεται ως η ροπή κ-τάξεως περί την αρχήν της X.

$$E[X^{\kappa}] = \begin{cases} \sum_{x_i} x_i^{\kappa} p(x_i), & \text{διακριτή τυχαία μεταβλητή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^{\kappa} f(x)dx, & \text{συνεχής τυχαία μεταβλητή} \end{cases}$$

Η πιο σημαντική ροπή περί την αρχήν, είναι η ροπή πρώτης τάξεως $E[X] = \mu$, η οποία καλείται μέση τιμή ή προσδοκώμενη τιμή ή μαθηματική ελπίδα (βλ. επόνενο εδάφιο). Υπολογιστικά χρήσιμη είναι και η ροπή δεύτερης τάξεως $E[X^2]$.

Ροπές περί τον μέσον (κ+λ τάξεως) διακριτών τυχαίων μεταβλητών

Η ακόλουθη συνάρτηση ορίζεται ως η ροπή κ+λ τάξεως περί την αρχήν, των X και Y.

$$E[X^\kappa Y^\lambda] = \sum_{x_i,y_i} x_i^\kappa y_i^\lambda p(x_i, y_i)$$

Οι ροπές πρώτης τάξεως ταυτίζονται με τις αντίστοιχες ροπές των περιθωριακών κατανομών, δηλαδή $E[X^1Y^0] = E[X]$ και $E[X^0Y^1] = E[Y]$. Οι ροπές δευτέρας τάξεως είναι οι $E[X^2Y^0] = E[X^2]$, $E[X^0Y^2] = E[Y^2]$ και $E[XY]$, οι οποίες προσδίδουν μεγάλη χρησιμότητα στους υπολογισμούς.

Ροπές περί την αρχήν (κ+λ τάξεως) συνεχών τυχαίων μεταβλητών

Η ακόλουθη συνάρτηση ορίζεται ως η ροπή κ+λ τάξεως περί την αρχήν, των συνεχών τυχαίων μεταβλητών X και Y.

$$E[X^\kappa Y^\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} x^\kappa y^\lambda f(x, y) dx$$

Οι ροπές πρώτης τάξεως ταυτίζονται με τις αντίστοιχες ροπές των περιθωριακών κατανομών, δηλαδή $E[X^1Y^0] = E[X]$ και $E[X^0Y^1] = E[Y]$. Οι ροπές δευτέρας τάξεως είναι οι $E[X^2Y^0] = E[X^2]$,$E[X^0Y^2] = E[Y^2]$ και $E[XY]$, οι οποίες προσδίδουν μεγάλη χρησιμότητα στους υπολογισμούς.

Ροπές περί τον μέσον (κ-τάξεως)

Η ακόλουθη συνάρτηση ορίζεται ως η ροπή κ-τάξεως περί τον μέσον της X.

$$E[(X-\mu)^\kappa] = \begin{cases} \sum_{x_i} (x_i - \mu)^\kappa p(x_i), & \text{διακριτή τυχαία μεταβλητή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^\kappa f(x) dx, & \text{συνεχής τυχαία μεταβλητή} \end{cases}$$

Η πιο σημαντική ροπή περί τον μέσον, είναι η ροπή δευτέρας τάξεως $E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$, η οποία καλείται διακύμανση. Υπολογιστικά χρήσιμος είναι ο τύπος,

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2X\mu + \mu^2] = E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 = E[X^2] - 2\mu\mu + \mu^2 = E[X^2] - \mu^2$$

Ροπές περί τον μέσον (κ+λ τάξεως) διακριτών τυχαίων μεταβλητών

Η ακόλουθη συνάρτηση ορίζεται ως η ροπή κ+λ τάξεως περί τον μέσον, των X και Y.

$$E[(X-\mu_X)^\kappa (Y-\mu_Y)^\lambda] = \sum_{x_i,y_i} (x_i - \mu_X)^\kappa (y_i - \mu_Y)^\lambda p(x_i, y_i)$$

Οι ροπές πρώτης τάξεως είναι εξ' ορισμού μηδέν, ενώ οι ροπές δευτέρας τάξεως είναι οι κάτωθι:

- $E[(X-\mu_X)^2(Y-\mu_Y)^0] = E[(X-\mu_X)^2] = \sigma_X^2$, η οποία είναι η διακύμανση της μεταβλητής X.
- $E[(X-\mu_X)^0(Y-\mu_Y)^2] = E[(Y-\mu_Y)^2] = \sigma_Y^2$, η οποία είναι η διακύμανση της μεταβλητής Y.
- $E[(X-\mu_X)^1(Y-\mu_Y)^1] = E[XY - \mu_X Y - X\mu_Y + \mu_X\mu_Y] = E[XY] - \mu_X E[Y] - E[X]\mu_Y + \mu_X\mu_Y = E[XY] - \mu_X\mu_Y - \mu_X\mu_Y + \mu_X\mu_Y = E[XY] - \mu_X\mu_Y = Cov(X, Y)$, η οποία είναι η συνδιακύμανση των μεταβλητών X και Y.

<u>Σημείωση:</u> Ο $\rho_{X,Y} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ καλείται συντελεστής συσχέτισης και είναι ένα μέτρο της γραμμικής σχέσης μεταξύ των μεταβλητών X και Y, όπου $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$.

Ροπές περί τον μέσον (κ+λ τάξεως) συνεχών τυχαίων μεταβλητών

Η ακόλουθη συνάρτηση ορίζεται ως η ροπή κ+λ τάξεως περί τον μέσον, των X και Y.

$$E[(X-\mu_X)^\kappa (Y-\mu_Y)^\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_X)^\kappa (y_i - \mu_Y)^\lambda p(x_i, y_i)$$

Οι ροπές πρώτης τάξεως είναι εξ' ορισμού μηδέν, ενώ οι ροπές δευτέρας τάξεως είναι οι ίδιες με εκείνες των διακριτών τυχαίων μεταβλητών, που παρουσιάστηκαν προηγουμένως.

1.2.4 Μέση Τιμή και Διακύμανση

Ορισμός 1.27 *Έστω μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f. Η αναμενόμενη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται με την βοήθεια του ολοκληρώματος:*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Είναι αξιοσημείωτο να αναφέρουμε ότι, η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι γνωστή και ως μαθηματική ελπίδα της τυχαίας μεταβλητής X. Κάποιες σημαντικές ιδιότητες της προσδοκώμενης τιμής είναι:

- $E[c] = c$, *όπου* $c \in \mathbb{R}$, *δηλαδή η προσδοκώμενη τιμή μιας σταθεράς είναι η ίδια η σταθερά.*
- $E[cg(X)] = cE[g(X)], \; c \in \mathbb{R}$.
- $E[c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X)] = c_1 E[g_1(X)] + c_2 E[g_2(X)]$, *όπου* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- $E[g_1(X)] \leq E[g_2(X)]$, *αν* $g_1(x) \leq g_2(x)$, *για κάθε* x.

Πρόταση 1.1 *Αν X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f και συνάρτηση κατανομής F και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση, τότε η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής $g(X)$ δίδεται από την σχέση:*

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Στην ειδική περίπτωση που ισχύει η σχέση $P(X \geq \alpha) = 1$, η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής $g(X)$, εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$E[g(X)] = \int_{\alpha}^{\infty} g(x)dP(X \geq x) = g(\alpha) + \int_{\alpha}^{\infty} g'(x)P(X > x)dx$$

Ορισμός 1.28 *Έστω μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας f, για την οποία υπάρχει η μέση τιμή $\mu = E[X]$. Η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X είναι:*

$$\sigma^2 = V[X] = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Η ποσότητα $\sigma = \sqrt{V[X]}$ ονομάζεται τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής X. Όπως και στην περίπτωση των διακριτών τυχαίων μεταβλητών η διακύμανση $V[X]$ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Πρόταση 1.2 *Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f και συνάρτηση κατανομής F. Αν η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται ως $\mu = E[X]$ και η διακυμανσή της με σ^2, τότε για κάθε $t > 0$, ισχύουν οι ανισότητες:*

- $P(X \geq t) \leq \frac{E[X]}{t}$ *(Ανισότητα Markov)*
- $P(|X-\mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t}$ *(Ανισότητα Chebyshev)*

Οι δύο αυτές ανισότητες χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις κατά τις οποίες μελετώντας την κατανομή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, παρουσιάζονται δυσκολίες στον υπολογισμό πιθανοτήτων που σχετίζονται με αυτήν.

1.2.5 Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y καλούνται ανεξάρτητες εάν ένα συμβάν της μίας εξ' αυτών δεν επηρεάζει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της άλλης $(A \subset B)$, δηλαδή

$$\{\omega; X(\omega) \in A\} \text{ και } \{\omega; Y(\omega) \in B\}$$

Σημειώνουμε ότι η ανεξαρτησία υφίσταται λόγω του ότι από την θεωρία πιθανοτήτων για δύο ενδεχόμενα ισχύει $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Πρόταση 1.3 *Έστω ότι X και Y είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ αντίστοιχα. Τότε η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτητάς τους $X, Y)$ δίνεται από την σχέση $p_{X,Y}(X,Y) = p_X(x)p_Y(y)$.*

1.2.6 Στοχαστική ανεξαρτησία δύο τυχαίων μεταβλητών

Ορισμός 1.29 *Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y λέγονται στοχαστικά ανεξάρτητες αν τα ενδεχόμενα $\{X \in A\}$ και $\{Y \in B\}$ είναι ανεξάρτητα για οποιαδήποτε υποσύνολα $A, B \subset \mathbb{R}$. Δηλαδή θα ισχύει η σχέση,*

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Πρόταση 1.4 *Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X και Y, οι οποίες έχουν από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x, y)$, από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x, y)$, περιθώριες συναρτήσεις κατανομής $F_X(x)$ και $F_Y(y)$, καθώς και περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ αντίστοιχα. Εάν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες θα ισχύει ισοδύναμα ότι,*

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

και

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Μία σημαντική ιδιότητα, έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες, αν υπάρχουν οι συναρτήσεις $f_1(x)$ και $f_2(y)$, έτσι ώστε $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ και $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα 1.9 Έστω δύο ταμεία ενός πολυκαταστήματος, όπου ως X συμβολίζεται το πλήθος στην 'ουρά' του ταμείου Α και ως Y συμβολίζεται το πλήθος στην 'ουρά' του ταμείου Β την ίδια χρονική στιγμή, κάθε ημέρα ενός μήνα λειτουργίας του πολυκαταστήματος.

x/y	0	1	2
0	0.1	0.04	0.02
1	0.08	0.2	0.06
2	0.06	0.14	0.3

Να βρεθούν:

1. **Την πιθανότητα να περιμένει το πολύ ένα άτομο σε κάθε ταμείο.**
2. **Ο ίδιος αριθμός ατόμων στα ταμεία.**
3. **Να περιμένουν συνολικά τρία άτομα στα ταμεία.**
4. **Την από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής.**
5. **Τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας.**

Λύση:

1. $P(X \leq 1, Y \leq 1) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = f(0, 0) + f(0, 1) + f(1, 0) + f(1, 1) = 0.1 + 0.04 + 0.08 + 0.2 = 0.42 = F(1, 1)$
2. $P(X = Y) = P(X = Y = 0) + P(X = Y = 1) + P(X = Y = 2) = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6$
3. $P(X + Y = 3) = f(1, 2) + f(2, 1) = 0.06 + 0.14 = 0.2$
4. $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{s \leq x,\, t \leq y} P(X = s, Y = t)$, *δηλαδή θα έχουμε για παάδειγμα* $F(2, 1) = f(0, 0) + f(0, 1) + f(1, 0) + f(1, 1) + f(2, 0) + f(2, 1) = 0 + 0.04 + 0.08 + 0.2 + 0.06 + 0.14 = 0.52$

x/y	0	1	2	$f_X(x)$
0	0.1	0.04	0.02	0.16
1	0.08	0.2	0.06	0.34
2	0.06	0.14	0.3	0.5
$f_Y(y)$	0.06	0.14	0.3	1

1.2.7 Ροπογεννήτριες συναρτήσεις (moment generating functions)

Ορισμός 1.30 *Η ροπογεννήτρια συνάρτηση έχει ιδιαίτερη χρησιμότητα για τον υπολογισμό όλων των ροπών k- τάξεως μαι τυχαίας μεταβλητής X. Ως ροπογεννήτρια ορίζεται η προσδοκώμενη τιμή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X και δίδεται από τον τύπο:*

$$M_X(t) = E[exp(tX)] = \sum_{X \in R_{(X)}} exp(tx) f_X(x) \; \forall \; t, |t| < \delta$$

,όπου R_X είναι το σύνολο των τιμών που λαμβάνει η τυχαία μεταβλητή Q και $f_X(x)$ είναι η συνάρτηση πιθανοτητάς της. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι, ο τύπος της ροπογεννήτριας συνάρτησης μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής, ισχύει για κάθε t, το οποίο ανήκη σε ένα διάστημα $(-\delta, \delta)$, όπου $\delta > 0$. Στη περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής θα δίδεται από τον τύπο:

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(tx) f_X(x) dx, |t| < \delta$$

Οι ροπογεννήτριες είναι συναρτήσεις που έχουν την μορφή προσδοκώμενης τιμής και πέντε βασικές ιδιότητες:

1. Αντιστοιχούν μια προς μια με τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, δηλαδή αν $M_X(t) = M_Y(t)$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την ίδια κατανομή, για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$.

2. Μέσω παραγώγισης μπορούν να «παράξουν» όλες τις ροπές περί την αρχήν μιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.

3. $E[X^r] = M^{(r)}(0)$.

4. Αν $Y = aX + b$, τότε $M_Y(t) = exp(bt) M_X(at)$.

5. Η ροπογεννήτρια αθροίσματος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών είναι το γινόμενων των επιμέρους ροπογεννητριών, δηλαδή
$$M(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E[X^r]}{r!} t^r$$

Παράδειγμα 1.10 Έστω μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X, η οποία έχει συνάρτηση πιθανότητας την $f(x) = \frac{4-x}{6}, x = 1, 2, 3$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση της μεταβλητής X.

Λύση:

$$M_X(t) = E[exp(tX)] = e^t f(1) + e^{2t} f(2) + e^{3t} f(3) = \frac{3e^t + 2e^{2t} + e^{3t}}{6}$$

Παράδειγμα 1.11 Έστω μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X, η οποία έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση που δίδεται από τον τύπο,

$$M(t) = \frac{1}{81}\Big(exp(t) + 2\Big)^4$$

Να βρεθεούν η μέση τιμή και η διακυμανσή της.

Λύση:

$$E[X] = M'(0) = \frac{1}{81} 4\Big(exp(t) + 2\Big)^3 exp(t)|_{t=0} = \frac{1}{81} 4\Big(exp(0) + 2\Big)^3 exp(0) = \frac{1}{81} 4\Big(1 + 2\Big)^3 = \frac{4}{3}$$

Ο τύπος της διακύμανσης δίδεται από τον τύπο $V[X] = E[X^2] - E^2[X]$, άρα υπολογίζοντας τον δεύτερο όρο της σχέσης θα έχουμε ότι,

$$E[X^2] = M''(0) = \frac{1}{81} 12\Big(exp(t) + 2\Big)^2 exp(t)|_{t=0} = \frac{8}{3}$$

Συνεπώς, η διακύμανση της ροπογεννήτριας θα είναι,

$$V[X] = \frac{8}{3} - \Big(\frac{4}{3}\Big)^2 = \frac{8}{9}$$

1.2.8 Πιθανογεννήτριες συναρτήσεις (probability generating functions)

Ορισμός 1.31 *Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X, συμβολίζεται ως $P_X(t)$ και δίδεται από τον τύπο:*

$$P_X(t) = E[t^X]$$

Οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις έχουν τις κάτωθι ιδιότητες:

1. $P(X = r) = \frac{P^{(r)}(0)}{r!}$

2. $E[X(X-1)\ldots(X-r+1)] = P^{(r)}(1)$

3. Αν X, Y είναι δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές με και ισχύει ότι $P_X(t) = P_Y(t)$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και U έχουν την ίδια κατανομή.

4. Αν $Y = aX + b \Rightarrow P_Y(t) = t^b P_X(t^a)$.

5. Ισχύει οι σχέσεις,

$$M_X(t) = P_X\Big(exp(t)\Big)$$

και

$$P_X(t) = M_X(lnt)$$

1.2.9 Γεννήτριες συναρτήσεις (generating functions)

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu$, τότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση της S_ν δίδεται από την σχέση,

$$M_{S_\nu}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_\nu}(t)$$

Έστω $X_1, X_2, \ldots X_\nu$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή $S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu$ έχουν κοινή ροπογεννήτρια συνάρτηση την $M_X(t)$ και N μια ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή των $X_i,\ i = 1, 2, \ldots, \nu$ τότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση της S_ν δίδεται από την σχέση,

$$M_{S_\nu}(t) = E\Big[(M_X(t))^N\Big]$$

Η πιθαογεννήτρια συνάρτηση θα δίδεται από την σχέση,

$$P_{S_\nu}(t) = P_{X_1}(t)P_{X_2}(t)\ldots P_{X_\nu}(t)$$

Δεδομένου ότι $X_1, X_2, \ldots X_\nu$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ισόνομες, δηλαδή έχουν κοινές ροπογεννήτριες συναρτήσεις $M_X(t)$, καθώς και N μια θετική διακριτή ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή των $X_i,\ i = 1, 2, \ldots, \nu$. Αν $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ και $P_N(t)$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής N, τότε θα ισχύει ότι,

$$M_{S_N}(t) = P_N\Big(M_X(t)\Big)$$

Επιπροσθέτως, εάν ισχύει ότι $P_X(t)$ είναι η κοινή πιθανογεννήτρια συνάρτηση των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_i,\ i = 1, 2, \ldots, \nu$, τότε θα ισχύει η σχέση,

$$P_{S_N}(t) = P_N\Big(P_X(t)\Big)$$

1.2.10 Δεσμευμένες κατανομές

Έστω (X, Y) μια δισδιάστατη τυχαία μεταβλητή, με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f(x, y)$ και με περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ αντίστοιχα. Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του X, δοθέντος του $Y = y^*$, δίδεται από την σχέση

$$f_{X|Y}(x|y^*) = P(X = x|Y = y^*) = \frac{f(x, y^*)}{f_Y(y^*)}$$

Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του Y δοθέντος του $X = x^*$, δίδεται από την σχέση

$$f_{Y|X}(y|x^*) = P(Y = y|X = x^*) = \frac{f(x, y^*)}{f_X(x^*)}$$

Συνεπώς, δεδομένου τον δύο προαναφερθέντων σχέσεων, όταν $(x, y^*) \in R_{X,Y}$ και $(x^*, y) \in R_{X,Y}$ τότε είναι διακριτή, ενώ όταν $x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}$ είναι συνεχή.

1.3 Κατανομές

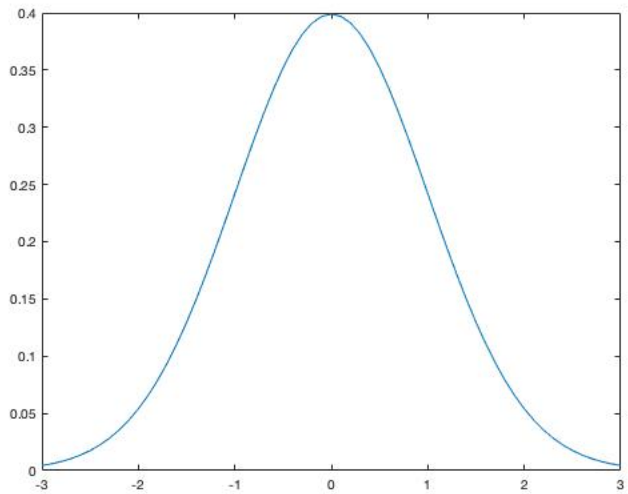
Σε αυτό το εδάφιο θα παρουσιάσουμε κάποια από τα είδη των κατανομών, τα οποία κρίνονται ως απαραίτητα εφόδια για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων.

1.3.1 Κανομική Κατανομή

Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτητάς της, δίδεται από τον τύπο

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{(2\sigma)^2}\Big)$$

Η μέση τιμή, η διακύμανση και η ροπογεννήτρια συνάρτηση δίνονται από τις σχέσεις $E[x] = \mu$, $V[x] = \sigma^2$ και $m_X(t) = exp\Big(\frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \mu t\Big)$ αντίστοιχα. Στα επόμενα εδάφια στην αναφορά μας για το αν μία τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $x \sim N(\mu, \sigma^2)$. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα διάγραμμα μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1.

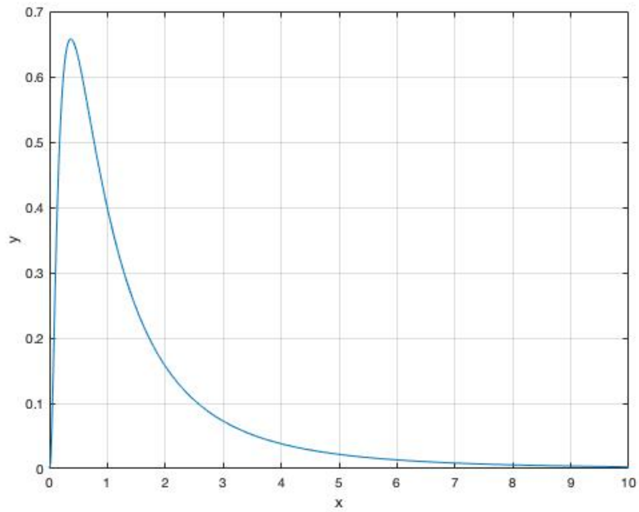


1.3.2 Λογαριθμοκανομική Κατανομή

Μια τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $Y = exp(X)$, όπου Y μία τυχαία μεταβλητή, η οποία ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή, με συνάρτηση πυκνοτητας πιθανότητας

$$p(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} exp\Big(-\frac{(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big),\ x > 0$$

Η μέση τιμή και η διακύμανση δίνονται από τις σχέσεις $E[x] = exp\Big(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\Big)$ και $V[x] = exp(2\mu + \sigma^2)\Big(exp(\sigma^2) - 1\Big)$ αντίστοιχα. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα διάγραμμα μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1.

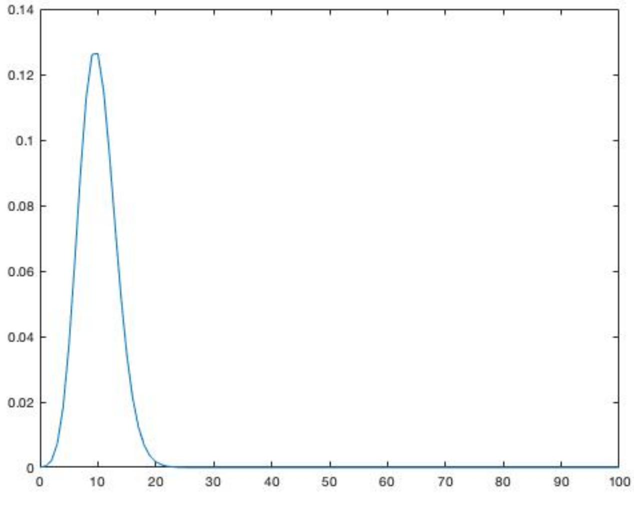


1.3.3 Διωνυμική κατανομή

Μια τυχαία μεταβλητή X η οποί ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, μετράει τον αριθμό των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές της κατανομής Bernoulli. Η κατανομή Bernoulli αναφέρεται σε μια τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το αποτέλεσμα ενός πειράματος με δύο δυνατά αποτελέσματα - κατά σύμβασιν καλούμενα 'επιτυχία' και 'αποτυχία'- όταν η πιθανότητα επιτυχίας είναι σταθερή και ίση με p (Τύπος: $P(X = x) = p^x(1-p)^{1\,-\,x}$). Ουσιαστικά η διωνυμική κατανομή παίρνει τιμές από 0 έως n, και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Η μέση τιμή, η διακύμανση και η ροπογεννήτρια συνάρτηση δίνονται από τις σχέσεις $E[x] = np$, $V[x] = np(1-p)$ και $m_X(t) = \Pi_{i=1}n\Big(1 - p + pexp(t)\Big)^n$ αντίστοιχα. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα διάγραμμα μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή.



1.3.4 Κατανομή Γάμμα

Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\alpha > 0$, $\beta > 0$ εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} exp(-x/\beta)}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, \ \ x \geq 0$$

όπου $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} exp(-y)dy$. Η μέση τιμή, η διακύμανση και η ροπογεννήτρια συνάρτηση δίνονται από τις σχέσεις $E[x] = \alpha\beta$, $V[x] = \alpha\beta^2$ και $m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}$ αντίστοιχα.

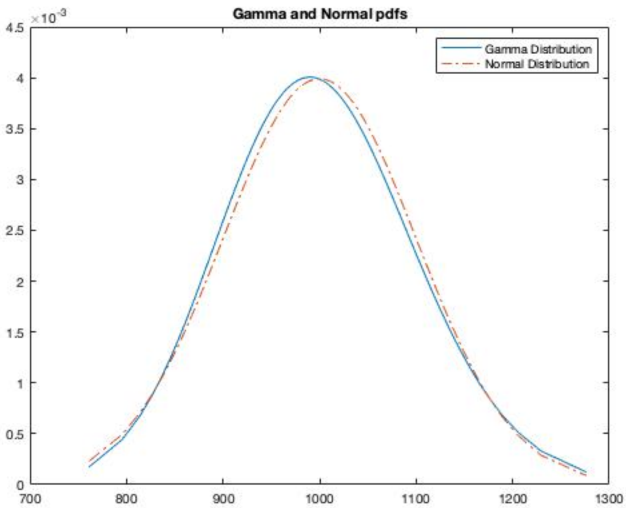
Παρατήρηση 1.3 *Κάποιες σημαντικές παρατηρήσεις, οι οποίες ισχύουν για την συγκεκριμένη κατανομή είναι:*

1. *Εάν $\alpha = n$, ακέραιος τότε $\Gamma(n) = (n-1)!$.*

2. *Εάν $\alpha = 1$ τότε $p(x) = \frac{1}{\beta} exp\Big(-\frac{x}{\beta}\Big), \ \ x \geq 0$.*

3. *Εάν $\alpha = n/2$ και $\beta = 2$, προσεγγίζει την κατανομή-χ^2 με n βαθμούς ελευθερίας. Επίσης χαρακτηρίζει το άθροισμα των n ανεξάρτητων κανονικών κατανομών.*

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα διάγραμμα μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με $\alpha = 100$ και $\beta = 10$. Επίσης, γίνεται σύγκριση με την κανονική κατανομή με μέση τιμή 1000 και διακύμανση 100.

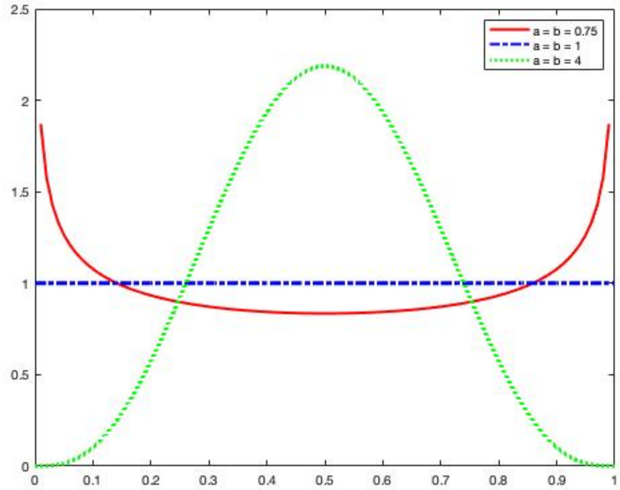


1.3.5 Κατανομή Βήτα

Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή βήτα με παραμέτρους $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτητάς της δίνεται από τον τύπο

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \ \ 0 \leq x \leq 1$$

όπου $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy$.Η μέση τιμή και η διακύμανση δίνονται από τις σχέσεις $E[x] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ και $V[x] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$ αντίστοιχα. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα διάγραμμα μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Βήτα, με τα α, β να λαμβάνουν τρείες διαφορετικές τιμές.

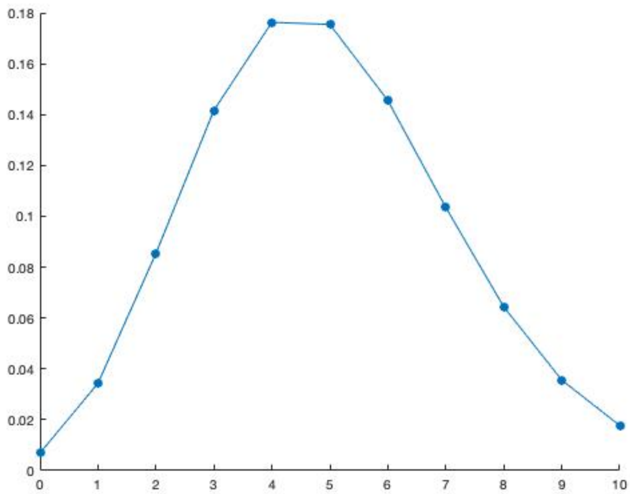


1.3.6 Κατανομή Poisson

Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}exp(-\lambda),\ \ k=0,1,2,\ldots \text{και}\ \lambda>0$$

Η μέση τιμή, η διακύμανση και η ροπογεννήτρια συνάρτηση δίνονται από τις σχέσεις $E[x]=lambda$, $V[x]=\lambda$ και $m_X(t)=exp\Big(\lambda(exp(t)-1)\Big)$ αντίστοιχα. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα διάγραμμα μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson, όπου $\lambda=5$.



1.3.7 Κατανομή Pearson

Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Pearson, με $\alpha>0$ και $\beta>0$ εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο

$$p(x)=\frac{1exp(-\beta/x)}{\beta\Gamma(\alpha)(x/\beta)^{\alpha+1}},\ \ x\geq 0$$

Η μέση τιμή και η διακύμανση δίνονται από τις σχέσεις,

$$E[X]=\begin{cases}\frac{\beta}{\alpha-1}, & \text{εάν}\ \alpha>1\\ \infty & \text{αλλού}\end{cases}\qquad V[X]=\begin{cases}\frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, & \text{εάν}\ \alpha>2\\ \infty & \text{αλλού}\end{cases}$$

1.3.8 Αντίστροφη κατανομή Gauss

Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Gauss με παραμέτρους μ και λ, όπου $\mu > 0$ και $\lambda > 0$ εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο

$$p(x) = \frac{\lambda}{2\pi x^3} exp\Big(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\Big), \;\; x > 0$$

Η μέση τιμή, η διακύμανση και η κορυφή(Mode) δίνονται από τις σχέσεις $E[x] = mu$, $V[x] = \frac{\mu^3}{\lambda}$ και $Mode(X) = \mu\Big(\sqrt{1+\frac{9\mu^2}{4\lambda^2}} - \frac{3\mu}{2\lambda}\Big)$ αντίστοιχα. Στα επόμενα κεφάλαια όταν μία τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την αντίστροφη κατανομή Gauss θα συμβολίζεται ως $X \sim IG(\mu, \lambda)$.

Παρατήρηση 1.4 *Αυτή η κατανομή θα χρησιμοποιηθεί για να μοντελοποιηθεί η χρονική στιγμή όταν μια κίνηση Brown με μετατόπιση ξεπεράσει ένα συγκεκριμένο φράγμα για πρώτη φορά.*

1.4 Λυμένες ασκήσεις

1.1 Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε να αποδείξετε ότι $P(A^C|B) = 1 - P(A|B)$.

Λύση: Δεδομένου ότι, $P(A|B) = \frac{n(AB)|n(\Omega)}{n(B)n(\Omega)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$ **τότε**

$$P(A^C|B) = \frac{n(A^C B}{n(B)} = \frac{n(B) - N(AB)}{n(B)} = 1 - \frac{n(AB)}{n(B)} = 1 - P(A|B)$$

1.2 Αν A και B δύο ενδεχόμενα ανεξάρτητα μεταξύ τους τότε να δείξεται ότι (A, B^C), (A^C, B) και (A^C, B^C) είναι ανά ζεύγος ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Λύση: *Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ και θα έχουμε*

α') $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\Big(1 - P(B)\Big) = P(A)P(B^C)$

β') $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B)$

γ') $P(A^C \cap B^C) = 1 - \Big(P(A^C \cap B^C)\Big)^C = 1 - P(A \cup B) = 1 - \Big(P(A) - P(B) + P(A)P(B)\Big) = 1 - P(A) - P(B) - P(A)P(B) = P(A^C)P(B^C)$

Συνεπώς τα ενδεχόμενα (A, B^C), (A^C, B) και (A^C, B^C) είναι ανά ζεύγος ανεξάρτητα μεταξύ τους.

1.3 Να αποδειχθεί ο τύπος του Bayes

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}$$

Λύση: Από τον ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε ότι,

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i|A)}{P(A)}$$

Εν συνεχεία, αναλύοντας τον παρανομαστή σύμφωνα με τον τύπο της ολικής πιθανότητας και αντικαθιστώντας τον αριθμητή με βάση τον πολλαπλασιαστικό τύπο

$$P(B_i A) = P(A|B_i)P(B_i)$$

Έτσι, για παράδειγμα για την δεσμευμένη πιθανότητα $P(B_i|A), i = 1, \ldots, n$ εξάγουμε ότι

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|Bi)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

1.4 Όταν κάποιος επενδυτής σκέφτεται να προβεί στην αγορά ενός ομόλογου μέσω μια πλατφόρμας χρηματιστηριακών αγορών από μόνος του, με καθυστέρηση της εντολής αγοράς στο 25% των περιπτώσεων και 8% των περιπτώσεων εάν προβεί στην αγορά του ομολόγου μέσω ενός χρηματιστηριακού συμβούλου. Οι επενδυτές προτιμούν κατα μέσον όρο, η εντολή αγοράς να πραγματοποιηθεί κατά 30% μέσω της ατομικής τους ενέργειας και 70% μέσω χρηματιστηριακού συμβούλου.

α΄) Ποιά είναι η πιθανότητα να προβεί στην αγορά ενός ομολόγου ο επενδυτής;

β΄) Αν πραγματοποίησε την αγορά ενός ομολόγου ο επενδυτής, ποια είναι η πιθανότητα να πραγματοποιήθηκε η αγορά μέσω της διαμεσολάβησης ενός χρηματιστηριακού συμβούλου;

Λύση: Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

Α: έχει προβεί στην αγορά ο επενδυτής, Π: αγορά μέσω πλατφόρμας, Σ: αγορά μέσω συμβούλου

α΄) Η πιθανότητα να πραγματοποιήσει την αγορά ο επενδυτής είναι

$$P(A) = P(A|\Pi)P(\Pi) + P(A|\Sigma)P(\Sigma) = 0,25 * 0.3 + 0,08 * 0,7 = 0,131$$

β΄) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί η αγορά μέσω της χρήσης μιας πλατφόρμας (ατομικής του ενέργειας), δεδομένου ότι θέλει να προβεί σε αγορά είναι

$$P(\Pi|A) = \frac{P(A|\Pi)P(\Pi)}{P(A)} = \frac{0,25 * 0,3}{0,131} = 0,572$$

1.5 Τραβάμε τρία χαρτιά (χωρίς επανάθεση) από μία τράπουλα με 52 χαρτιά. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε 3 άσσους;

Λύση: Έστω ότι επιλέγουμε ένα - ένα τα τρία χαρτιά και έστω $A_i, i = 1, 2, 3$, από τον πολλαπλασιαστικκό κανόνα για την πιθανότητα τομής ενδεχομένων θα ισχύει ότι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{52}\frac{3}{51}\frac{2}{50} = \frac{1}{5525}$$

1.6 Για την συνάρτηση

$$F(X) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x < 0 \, \acute{\eta} \, x > 2 \end{cases}$$

α΄) Ποια είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας;

β΄) Ποια είναι η αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας;

Λύση: Θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ιδιότητες που αναφέραμε στον ορισμό 1.18 και στις δύο περιπτώσεις. Συγκεκριμένα θα έχουμε ότι:

α')

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = 0 \geq 0$$
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x \geq 0$$
$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -1 \geq -x \geq -2 \Rightarrow 1 \geq 2 - x \geq 0 \Rightarrow f(x) = 2 - x \geq 0$$
$$x > 2 \Rightarrow f(x) = 0 \geq 0$$

Άρα η πρώτη ιδιότητα ισχύει, δεδομένου ότι $f(x) \geq 0 \; \forall x$. Επίσης, ισχύει και η δεύτερη ιδιότητα και αυτό αποδεικνύεται κάτωθι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{2} (2-x)dx + \int_{2}^{\infty} 0dx = 0 + \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + \Big[2x - \frac{x^2}{2}\Big]_1^2 + 0$$
$$= \frac{1}{2} - 0 + 4 - 2 - \Big(2 - \frac{1}{2}\Big) = 1$$

β')

$$x < 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} tdt = 0 + \Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^x = \frac{x^2}{2}$$
$$1 \leq x \leq 2 \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} tdt + \int_{1}^{x} (2-t)dt = 0 + \Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 + \Big[2t - \frac{t^2}{2}\Big]_1^x = \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - \Big(2 - \frac{1}{2}\Big) = 2x - \frac{x^2}{2} - 1$$
$$x > 2 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{x} 0dt = F(2) + 0 = 2 * 2 - \frac{2^2}{2} - 1 = 4 - 2 - 1 = 1$$

Συνεπώς, η $F(x)$ γράφεται ως εξής:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

1.7 Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και αν X μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή, δηλαδή $X \in N(\mu, \sigma^2)$, τότε και η τυχαία μεταβλητή Y που δίνεται από την σχέση $Y = \alpha X + \beta$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\alpha\mu + \beta$ και διακύμανση $\alpha^2\sigma^2$.

Λύση: Δεδομένου ότι $y \in \mathbb{R}$, τότε

$$P_Y(y) = P(Y < y) = P(\alpha X + \beta < y) = P\Big(X < \frac{y - \beta}{\alpha}\Big) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(y-\beta)/\alpha} exp\Big(-\frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2}\Big)dx$$

Εάν υπάρχει $z \in \mathbb{R}$, τότε θέτουμε $z = \alpha x + \beta \Rightarrow x = \frac{z - \beta}{\alpha}$ το οποίο αν το αντικαταστίσουμε στην προηγούμενη σχέση θα εξαχθεί το ζητούμενο. Συγκεκριμένα,

$$P_Y(y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(y} exp\Big(-\frac{(\frac{z-\beta}{\alpha} - \mu_x)^2}{\sigma_x^2}\Big)\frac{dz}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} exp\Big(-\frac{\Big(z - (\alpha\mu_x + \beta)\Big)^2}{2\alpha^2\sigma_x^2}dz$$
$$= \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} exp\Big(-\frac{(z - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\Big)dz$$

όπου, $\sigma_y = \alpha\sigma$ και $\mu_y = \alpha\mu + \beta$.

1.8 Να αποδειχθεί ότι $X = 0$ (πόρισμα 1.1), χρησιμοποιείστε για βοήθεια την σχέση $P\Big(\omega; X(\omega) = 0\Big) = 1$.

Λύση: Πρώτα ας δείξουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X παίρνει πολύ μικρές τιμές με πιθανότητα 1, καθώς και ότι ισχύει η σχέση $P(|X| < \epsilon) = 1$. Επίσης, θα λάβουμε υπόψιν ότι $A = \{\omega; X(\omega \geq \epsilon\}$, τότε

$$0 \leq P(X \geq \epsilon) = \int_A dP = \frac{1}{\epsilon}\int_A \epsilon dP \leq \frac{1}{\epsilon}\int_A XdP = 0$$

και ως εκ τούτου $P(X \geq \epsilon) = 0$ και ομοίως $P(X \leq -\epsilon) = 0$. Επιπροσθέτως,

$$P(|X| < \epsilon) - 1 - P(X \leq \epsilon) - P(X \leq -\epsilon) = 1 - 0 - 0 = 1.$$

Δεδομένου ότι $\epsilon \to 0$ συνεπάγεται ότι $P(|X| = 0) = 1$. Αυτό μπορεί να επισημοποιηθεί θεωρώντας ότι $\epsilon\frac{1}{n}$ και $B_n = \{\omega; |X(\omega) \leq \epsilon\}$, όπου $P(B_n) = 1$. τότε

$$P(X = 0) = P(|X| = 0) = P(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim n \to \infty P(B_n) = 1$$

1.9 Να αποδειχθεί η σχέση $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$.

Λύση: Συμβολίζοντας την αναμενόμενη μέση τιμή με μ της τυχαίας μεταβλητής X, τότε:

$$E[X] = E[(X - \mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] =$$

$$E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 = E[X^2] - 2\mu\mu + \mu^2$$
$$= E[X^2] - \mu^2$$

1.10 Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και U είναι $f(x, y) = c(2x + y)$ με $x = 0, 1, 2$ και $y = 0, 1, 2, 3$. Να βρείτε τα ακόλουθα,

1. **Τον σταθερό παράγοντα c, όπου $c \in \mathbb{R}$.**
2. **$P(X = 2, Y = 1) =;$**
3. **$P(X \geq 1, Y \leq 2) =;$**
4. **Οι μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες**;

Λύση:

x/y	0	1	2	3	$f_X(x)$
0	0	c	$2c$	$3c$	$6c$
1	$2c$	$3c$	$4c$	$5c$	$14c$
2	$4c$	$5c$	$6c$	$7c$	$22c$
$f_Y(y)$	$6c$	$9c$	$12C$	$15c$	

1. $\sum f(x, y) = 1 \Rightarrow 42c = 1 \Rightarrow c = 1/42$
2. $P(X = 2, Y = 1) = 5c = 5\frac{1}{42} = 5/42$
3. $P(X \geq 1, Y \leq 2) = 24c = 24/42 = 4/7$

4.
$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/7, & y = 0 \\ 3/14, & y = 1 \\ 2/7, & y = 2 \\ 5/14, & y = 3 \end{cases}$$

Για να είναι ανεξάρτητες οι μεταβλητές X *και* Y *θα πρέπει να ισχύει η σχέση* $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, *για κάθε* x, y, *αλλά,*

$$f_2(1) \neq f_X(2)f_Y(1) \Leftarrow \begin{cases} f(2,1) = 5/42 \\ f_X(2) = 11/21 \\ f_Y(1) = 3/14 \end{cases}$$

Συνεπώς, οι τυχαίες μεταβλητές X *και* Y *δεν είναι ανεξάρτητες.*

1.11 Να βρεθεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση της διωνυμικής κανανομή $b(\nu, p)$**, καθώς και να υπολογισθεί η μέση τιμή και η διακυμανσή της.**

Λύση:

$$M(t) = E[exp(tX)] = \sum_{x=0}^{\nu} exp(tx)\binom{\nu}{x}p^x q^{\nu-x} = \sum_{x=0}^{\nu}\binom{\nu}{x}\Big(exp(t)p\Big)^x q^{\nu-x} = \Big(pexp(t)+q\Big)^{\nu}$$

Ακολούθως, θα βρούμε την πρώτη και την δεύτερη τάξης παραγώγους της ροπογεννήτριας συνάρτησης για $t = 0$ *και θα έχουμε ότι,*

$$M'(0) = \nu\Big(pexp(t)+q\Big)^{\nu-1}pexp(t)|_{t=0} = \nu(p+q)^{\nu-1}p = \nu(1)^{\nu-1}p = \nu p = E[X]$$

και

$$M''(0) = \nu(\nu-1)\Big(pexp(t)+q\Big)^{\nu-2}p^2exp(2t) + \nu pexp(t) = \nu(\nu-1)(1)^{\nu-2}p^2 + \nu p = \nu(\nu-1)p^2 + \nu p = E[X^2]$$

Συνεπώς, η διακύμανση της διωυμικής κατανομής θα δίδεται από την σχέση,

$$V[X] = E[X^2] - E^2[X] = \nu p + \nu(\nu-1)p^2 - \nu^2p^2 = \nu p + \nu^2p^2 - \nu p^2 - \nu^2p^2 = \nu p(1-p) = \nu pq$$

1.12 Να βρεθεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κανονικής κατανομής, $N(\mu, \sigma^2)$**, καθώς και η μέση τιμή και η διακυμανσή της.**

Λύση: *Η μέση τιμή της κανονικής κατανομής θα είναι,*

$$M_X(t) = E[exp(tx)] = \int_{-\infty}^{\infty} exp(tx)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\Big(-\frac{x^2-2x\mu+\mu^2}{2\sigma^2}+xt\Big)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\Big(-\frac{x^2-2x\mu+\mu^2-2\sigma^2xt}{2\sigma^2}\Big)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\Big(-\frac{x^2-2x(\mu+t\sigma^2)+\mu^2+t^2\sigma^4-t^2\sigma^4+2\mu t\sigma^2-2\mu t\sigma^2}{2\sigma^2}\Big)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\Big(-\frac{x^2-2x(\mu+t\sigma^2)+(\mu+t\sigma^2)^2-t^2\sigma^4-2\mu t\sigma^2}{2\sigma^2}\Big)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\Big(-\frac{\Big(x-(\mu+t\sigma^2)\Big)^2}{2\sigma^2}+\frac{t^2\sigma^4+2\mu t\sigma^2}{2\sigma^2}\Big)dx$$

$$= exp\Big(\frac{t^2\sigma^4+2\mu t\sigma^2}{2\sigma^2}\Big)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\Big(-\frac{\Big(x-(\mu+t\sigma^2)\Big)^2}{2\sigma^2}\Big)dx = exp\Big(\frac{t^2\sigma^4+2\mu t\sigma^2}{2\sigma^2}\Big)*1 = exp\Big(\frac{1}{2}t^2\sigma^2+\mu t\Big)$$

Η πρώτη παράγωγος θα είναι,

$$M'(0) = \Big(exp\Big(\frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \mu t\Big)\Big)' = exp\Big(\frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \mu t\Big) = exp\Big(\frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \mu t\Big)(t\sigma^2 + \mu)|_{t=0} = \mu$$

και η δεύτερη παράγωγος θα είναι,

$$M''(0) = \Big(exp\Big(\frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \mu t\Big)\Big)'(t\sigma^2 + \mu) + \Big(exp\Big(\frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \mu t\Big)\Big)(t\sigma^2 + \mu)'$$

$$exp\Big(\frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \mu t\Big)(t\sigma^2 + \mu)(t\sigma^2 + \mu) + exp\Big(\frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \mu t\Big)\sigma^2|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2$$

Συνεπώς, η διακύμανση της ροπογεννήτριας συνάρτησης είναι ίση με,

$$V[X] = E[X^2] - E^2[X] = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

1.13 Έστω μαι συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f(x) = \lambda exp(-\lambda x)$. Ποια είναι η ροπογεννήτρια της X;

Λύση: *Η ροπογεννήτρια της X είναι,* $m(t) = E[exp(tX)] = \int_{-\infty}^{\infty} exp(tx)\lambda exp(-\lambda x)dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda - t)exp(-\lambda x + tx)dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, $t < \lambda$, *διότι τότε ισχύει η σχέση* $\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda - t)exp(-\lambda x + tx)dx = 1$.

1.14 Έστω μια τυχαία μεταβλητή X με ροπογεννήτρια συνάρτηση που δίδεται από την σχέση $M_X(t) = exp\Big(t + 2t^2\Big)$, να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(-1 < X < 2)$.

Λύση: *Η μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή ίση με την μονάδα και διακύμανση ίση με 2, $X \sim N(1, 2^2)$, κάτι που μπορούμε να το διακρίνουμε από την δοθείσα ροπογεννήτρια συνάρτηση, δηλαδή,*

$$exp\Big(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\Big) = exp(1 * t + 2 * t^2)$$

Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα την πιθανότητα ως εξής,

$$P(-1 < X < 2) = P\Big(\frac{-1 * (-1)}{2} < \frac{X - 1}{2} < \frac{2 * (-1)}{2}\Big) = P(-1 < z < \frac{1}{2}) = \Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-1) = 0,5328$$

1.5 Ασκήσεις για λύση

1.15 Αν ρίξουμε τρία ζάρια, υπολογίστε τις πιθανότητες:

α΄) Να έρθει άθροισμα 9.

β΄) Να έρθει άθροισμα 10.

γ΄) Να έρθει άθροισμα 14.

1.16 Σε μια παρτίδα Πόκερ με πόσους τρόπους μπορεί ένας παίκτης να πάρει 5 φύλλα στο χέρι του, από το σύνολο των 52 φύλλων μιας τράπουλας

1.17 Ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών στο χρηματιστήριο της Αμερικής περιέχει μια μετοχή της εταιρείας Apple και μια της εταιρείας Amazon και ένα δεύτερο χαρτοφυλάκιο περιέχει μία μετοχή της εταιρείας Bitcoin και μία μετοχή της εταιρείας Amazon. Επιλέγοντας ένας επενδυτής να αγοράσει μία μετοχή από κάθε ένα από τα χαρτοφυλάκια:

α΄) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος Ω;

β΄) Ποιος είναι ο χώρος ενδεχομένων A;

1.18 Μέσω μιας πλατφόρμας ηλεκτρονικών συναλλαγών σε μετοχές που περιέχει 50 μετοχές αριθμημένες από το 1 έως το 5, επιλέγουμε 20 μετοχές στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα ο μεγαλύτερος αριθμός στο δείγμα να είναι 21. Ποια είναι η πιθανότητα ο μεγαλύτερος αριθμός στο δείγμα να είναι 21·

1.19 Έστω δύο ενδεχόμενα $A, B, \Gamma \in \mathcal{A}$ *και δεδομένου ότι* $P(A) > P(B)$ *μπορεί να ισχύει* $P(A|\Gamma) > P(B|\Gamma)$*;*

1.20 Ένας υπάλληλος ενός δικηγορικού γραφείου, το οποίο ασχολείται με την ενημέρωση των δανειολυπτών για τα μή εξυπηρετούμενα δάνεια τους από τις τράπεζες της Ελλάδας έχει αναλάβει τρείς περιφερειακές ενότητες: Αττική, Βορείου και Νοτίου Αιγαίου. Από προηγούμενες ενημερώσεις γνωρίζουμε ότι το 30% των τηλεφωνημάτων στην περιφέρεια Αττικής έχουν αποτέλεσμα (ο καλούμενος δίνει χρήματα για την κάλυψη των δανειακών του υποχρεώσεων), ομοίως 20% στην περιφέρεια Βορείου Αιγάιου και 50% στην περιφέρεια Νοτίου Αιγαίου. Αν ο υπάλληλος πραγματοποιήσει 5000 τηλεφωνήματα στην περιφέρεια Αττικής, 500 στην περιφέρεια Βορείου Αιγαίου και 200 στην περιφέρεια Νοτίου Αιγαίου, ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχαίο τηλεφώνημα να έχει αποτέλεσμα;

1.21 Να αποδείξεται ότι ισχύει η σχέση $p_{X,Y}(X,Y) = p_X(x)p_Y(y)$, χρησιμοποιώντας την σχέση $P(x < X < x+dx) = \int_x^{x+dx} p(u)du = p(x)dx$

1.22 Να αποδείξεται ότι $\int_A XdP = \int_A YdP$.

1.23 Έστω μία τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κανονική κατανομή, χρησιμοποιώντας την ροπογεννήτρια συναρτησή $m(t) = E[exp(tX)] = exp\Big(\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}\Big)$ **να δείξετε ότι:**

α') $E[Y^n] = exp\Big(n\mu + \frac{n^2\sigma^2}{2}\Big)$, *όπου* $Y = exp(X)$.

β') *Ημέση τιμή και η διακύμναση της τυχαίας μεταβλητής* $Y = exp(X)$ *είναι* $E[Y] = exp\Big(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\Big)$ *και* $V[Y] = exp(2\mu + \sigma^2)\Big(exp(\sigma^2) - 1\Big)$.

1.24 Έστω X και Y συμβολίζονται τα ποσοστά της αγοράς που κατέχουν δύο ανταγωνιστικά προϊόντα. Αν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X, Y είναι:

$$f(x,y) = \begin{cases} 8(x+y), & 0 < x < 1/2 \textbf{ και } 0 < y < 1/2 \\ 0, & \textbf{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογισθεί η πιθανότητα, δεδομένου ότι ένα από τα προϊόντα κατέχει τουλάχιστον ποσοστό μεγαλύτερο του 25%.

1.25 Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των χρόνων ζωής δύο λαμπτήρων που συμβολίζονται ως X και Y, σε χιλιάδες ώρες είναι:

$$F(x,y) = \begin{cases} \Big(1 - exp(-2x)\Big)\Big(1 - exp(-y^2)\Big), & x > 0 \textbf{ και } y < 0 \\ 0, & \textbf{αλλού} \end{cases}$$

α') Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

β') Να υπολογισθούν οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής.

γ') Να υπολογισθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας

δ') Οι μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες ;

ε') Ποια είναι η πιθανότητα μετά από 1000 ώρες λειτουργίας να μην λειτουργεί κανένας λαμπτήρας;

ϛ΄) Ποια είναι η πιθανότητα μετά από 1000 ώρες λειτουργίας να λειτουργεί τουλάχιστον ένας λαμπτήρας;

ζ΄) Ποια είναι η πιθανότητα και οι δύο λαμπτήρες να ζήσουν περισσότερο από 1000 ώρες;

η΄) Ποια είναι η πιθανότητα ο συνολικός χρόνος ζωής των δύο λαμπτήρων να είναι περισσότερος από 1000 ώρες και ταυτόχρονα λογότερος από 2000 ώρες;

1.26 Η απο κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας διακριτής δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y)**, η οποία δίδεται από τον κάτωθι πίνακα:**

x/y	**-1**	**0**	**1**	$f_X(x)$
-1	**1/8**	**1/8**	**1/8**	**3/8**
0	**1/8**	**0**	**1/8**	**2/8**
1	**1/8**	**1/8**	**1/8**	**3/8**
$f_Y(y)$	**3/8**	**2/8**	**3/8**	**1**

Να βρεθεί εάν $E[X], E[Y]$ **και** $E[XY]$ **είναι ανεξάρτητες**;

1.27 Έστω X **μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας** $f(x) = c^x, x = 1, 2, \ldots,$ **τότε:**

α΄) να βρεθεί η ροπογεννήτρια της μεταβλητής X**,**

β΄) να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c**,**

γ΄) και να υπολογισθεί η μέση τιμή και η διακύμανσγ τγς μεταβλητής X**.**

1.28 Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της κατανομής Poisson, $P(\lambda)$**, καθώς και η μέση τιμή και η διακυμανσή της.**

1.29 Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Κεφάλαιο 2

Προσδοκώμενες τιμές

Η προσδοκώμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής είναι η αναμενόμενη τιμή της ίδιας της τυχαίας μεταβλητής, υπολογισμένη σύμφωνα με την δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας. Για να κατανοήσουμε την προσδοκώμενη τιμή θα δώσουμε έναν απλουστευμένο ορισμό, ο οποίος μας λέει ότι, για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X πρέπει να παρατηρήσουμε την πραγματοποίηση μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής Y, όταν $Y = y$. Η αναμενόμεη τιμή του X εξαρτάται από την πληροφορία ότι $Y = y$, συνεπώς η X καλείται προσδοκώμενη του X δοθέντος του $Y = y$.

2.1 Προσδωκόμενη μέση τιμή

Στην περίπτωση όπου X και Y είναι δύο τυχαίες διακριτές μεταβλητές, οι οποίες μαζί σχηματίζουν ένα τυχαίο διακριτό διάνυσμα, ο τύπος για τον υπολογισμό της προσδοκώμενης τιμής του X δοθέντος του $Y = y$ είναι μια απλή εφαρμογή του προαναφερθέντος απλουστευμένου ορισμού, στον οποίο οι βαρύτητες του μέσου όρου δίδονται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της προσδοκώμενης τιμής του X.

Ορισμός 2.1 *Έστω X και Y δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές και $R_{X,Y}$ είναι το σύνολο των τιμών που λαμβάνει το X, καθώς και $f_{X|Y}(x|y*)$, $f_{Y|X}(y|x*)$ οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών X και Y, τότε οι δεσμευμένες μέσες τιμές τους θα είναι:*

$$E[X|Y = y*] = \sum_{x \in R_{X,Y}} x f_{X|Y}(x|y*)$$

και

$$E[Y|X = x*] = \sum_{x \in R_{X,Y}} x f_{Y|X}(y|x*)$$

Συνεπώς, ισοδύναμα για την συνάρτηση $h(y)$ θα έχουμε ότι,

$$E[h(y)|X = x^*] = \sum_{x \in R_{X,Y}} h(y) f_{Y|X}(y|x^*)$$

Παράδειγμα 2.1 *Έστω το τυχαίο διάνυσμα δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι $R_{XY} = \{[13], [20], [00]\}$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτητάς τους είναι*

$$P_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1/3, & \textit{εάν } x = 1 \textit{ και } y = 3 \\ 1/3, & \textit{εάν } x = 2 \textit{ και } y = 0 \\ 1/3, & \textit{εάν } x = 0 \textit{ και } y = 0 \\ 0, & \textit{αλλού} \end{cases}$$

Λύση: Το πρώτο βήμα που θα κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του X, δοθέντης $Y = 0$. Η περιθωριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του y , δεδομένου ότι $y = 0$ θα είναι,

$$P_Y(0) = \sum_{(x,y) \in R_{XY} y=0} P_{XY}(x, y) = P_{XY}(2, 0) + P_{XY}(0, 0) = \frac{2}{3}$$

Οι τιμές που λαμβάνει το X είναι $R_X = \{0,1,2\}$, καθώς και οι προσδοκώμενες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας του X δοθέντος του $Y = 0$ είναι,

$$P_{X|Y=0}(x) = \begin{cases} \frac{P_{XY}(0,0)}{P_Y(0)} = \frac{1/3}{2/3} = 1/2, & \text{εάν } x = 0 \\ \frac{P_{XY}(1,0)}{P_Y(0)} = \frac{0}{2/3} = 0, & \text{εάν } x = 1 \\ \frac{P_{XY}(2,0)}{P_Y(0)} = \frac{1/3}{2/3} = 1/2, & \text{εάν } x = 2 \\ 0, & \text{εάν } x \notin R_X \end{cases}$$

Συνεπώς η προσδοκώμενη τιμή του X δοθέντος του $Y = 0$ είναι,

$$E[X|Y=0] = 0P_{X|Y=0}(0) + 1P_{X|Y=0}(1) + 2P_{X|Y=0}(2) = 0 * \frac{1}{2} + 1 * 0 + 2 * \frac{1}{2} = 1$$

Ορισμός 2.2 *Έστω X και Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και $f_{X|Y}(x|y*)$, $f_{Y|X}(y|x*)$ οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών X και Y, τότε οι δεσμευμένες μέσες τιμές τους θα είναι:*

$$E[Y|X = x^*] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x^*)dy$$

Τότε, ισοδύναμα για μια συνάρτηση $h(y)$ θα ισχύει ότι,

$$E[h(y)|X = x^*] = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_{Y|X}(y|x^*)dy$$

Παράδειγμα 2.2 *Έστω το τυχαίο διάνυσμα δύο τυψαίων μεταβλητών X και Y είναι το $R_{XY} = [0,\infty) * [2,4]$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τους είναι,*

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y exp(-xy), & \text{εάν } x \in \infty \text{ και } y \in [2,4] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Υπολογίζοντας την προσδοκώμενη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του X, δοθέντος του $Y = 2$, οι τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή Y είναι $R_Y = [2,4]$. Όταν $y \notin [2,4]$, η οριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του Y είναι μηδέν·

Λύση: *Όταν ισχύει ότι $y \in [2,4]$, η οριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι*

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(xy)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} y exp(-xy)dx = \frac{1}{2}[-exp(-xy)]_0^{\infty} = \frac{1}{2}[0-(-1)] = \frac{1}{2}$$

Επίσης, η οριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής Y είναι η κάτωθι,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{εάν } y \in [2,4] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εάν ισχύει η ισότητα $y = 2$, τότε $f_Y(2) = \frac{1}{2}$ και οι τιμές που λαμβάνει το X είναι $R_X = [0,\infty)$. Επιπροσθέτως, η προσδοκώμεη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του X, δοθέντος του $Y = 2$ είναι η

$$f_{X|Y} = 2(x) = \frac{f_{XY}(x,2)}{f_Y(2)} \begin{cases} 2exp(-2x), & \text{εάν } x \in [0,\infty) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Συνεπώς, η προσδοκώμενη τιμή του X, δοθέντος του $Y = 2$ είναι,

$$E[X|Y=2] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=2}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x2exp(-2x)dx \xRightarrow{t=2x}$$

$$E[X|Y=2] = \frac{1}{2}\Big[[-texp(-t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} exp(-t)dt\Big] = \frac{1}{2}\Big[0 - 0 + [exp(-t)]_0^{\infty}\Big] = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

Θεώρημα 2.1 **Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y, τότε ισχύει ότι $E\Big[E[X|Y]\Big] = E[X]$ και $E\Big[E[Y|X]\Big] = E[Y]$, δεδομένου ότι $m(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx$ και $m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy$.**

Απόδειξη:

$$E\Big[E[X|Y]\Big] = E[m(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} m(y) f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx\Big) f_Y(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f_Y(y)} x f(x,y) f_Y(y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dxdy = E[X]$$

2.1.1 Ιδιότητες Προσδοκώμενης Τιμής

Από τα προηγούμενα, καθίσταται σαφές ότι η προσδοκώμενη τιμή υπολογίζεται ακριβώς όπως η αναμενόμενη τιμή, με την μόνη διαφοροποίηση ότι οι πιθανότητες και οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας αντικαθίστανται από προσδοκώμενες πιθανότητες και προσδοκώμενες συναρτήσεις πιθανότητας. Δεδομένου ότι X και Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ισχύουν οι ιδιότητες:

1. Στην περίπτωση της γραμμικότητας ισχύει η σχέση,

$$E[aX + bY|G] = aE[X|G] + bE[Y|G], \forall a, b \in \mathcal{R}$$

2. Αφαιρώντας μία τυχαία μεταβλητή από το προβλέψιμο κομμάτι:

$$E[XY|G] = XE[Y|G]$$

   και γενικότερα αν η τυχαία μεταβλητή X είναι G-προβλέψιμη ισχύει η σχέση $E[X|G] = X$.

3. Θεώρημα του πύργου (Iterated Expectations):

$$E\Big[E[X|G]|H\Big] = E[X|H], \text{ εάν } H \subset G$$

4. Θετικότητα:

$$E[X|G] \geq 0, \text{ εάν } X \geq 0$$

5. Η προσδοκία μίας σταθεράς είναι η ίδια η σταθερά:

$$E[c|G] = c$$

6. Αφαίρεση μια ανεξάρτητης συνθήκης:

$$E[X|G] = E[X]$$

   δεδομένου ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι ανεξάστητη από G.

2.2 Δεσμευμένη διακύμανση

Ορισμός 2.3 *Έστω η συνάρτηση $g(\omega) = \Big(\omega - m(y)\Big)^2$, για ένα συγκεκριμένο y. Η συνάρτηση $g(X)$ δίδεται από τον τύπο $g(X) = \Big(X - m(y)\Big)^2$, όπου $m(y) = E[X|Y = y]$. Τότε, η ποσότητα $E[g(x)|Y = y] = \delta(y)$ καλείται δεσμευμένη διακύμανση της X, δοθέντος $Y = y$, δηλαδή $V[X|Y = y]$. Επίσης, η τυχαία μεταβλητή $\delta(Y)$, καλείται δεσμευμένη διακύμανση της X, δοθέντος του Y, δηλαδή $V[X|Y]$.*

2.2.1 Ιδιότητες δεσμευμένης διακύμανσης

Οι σημαντικότερες ιδιότητες της δεσμευμένης διακύμανσης είναι:

1. $E\Big[E[g(X)|Y]\Big] = E[g(X)]$
2. $E\Big[E[h(y)|X]\Big] = E[h(Y)]$
3. $E[aX + b|Y = y] = aE[X|Y = y] + b$
4. $E[g(x) + h(x)|Y = y] = E[g(X)|Y = y] + E[h(X)|Y = y]$
5. $V[X] = E\Big[V[X|Y]\Big] + V\Big[E[X|Y]\Big]$

Θεώρημα 2.2 **Έστω ένα πείραμα τύχης, όπου A είναι ένα ενδεχομενό του και X μια τυχαία μεταβλητή τότε,**

- **εάν η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x)$:**

$$P(A) = \sum_{x \in R_X} P(A|X = x) f_X(x)$$

- **και εάν η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$:**

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X = x) f_X(x) dx$$

Απόδειξη: Αρχικά θα ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή Y, η οποία θα είναι ίση με 1 εάν συνέβη το ενδεχόμενο A, διαφορετικά θα είναι ίση με 0 εάν δεν συνέβη το ενδεχόμενο A. Άρα,

$$E[Y] = 1 * P(Y = 1) + 0 * P(Y = 0) = P(Y = 1) = P(A)$$

Εν συνεχεία,

$$E[Y] = E\Big[E[Y|X]\Big] = \int_{-\infty}^{\infty} E[Y|X = x] f_X(x) dx \quad \textit{(1)}$$

αλλά δεδομένου ότι, $E[Y|X = x] = 1 * P(Y = 1|X = x) + 0 * P(Y = 0|X = x) = P(Y = 1|X = x) = P(A|X = x)$ *(2)*
και συνδυάζοντας τις σχέσεις *(1)* και *(2)* εξάγουμε την ζητούμενη ποσότητα,

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X = x) f_X(x)$$

2.3 Συνδιακύμανση

Ορισμός 2.4 *Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y με μέσες τιμές $E[X] = \mu_X$ και $E[Y] = \mu_Y$ αντίστοιχα. Τότε η δεσμευμένη συνδιακύμανση θα δίδεται από την σχέση:*

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

2.3.1 Ιδιότητες συνδιακύμανσης

Οι σημαντικότερες ιδιότητες της δεσμευμένης συνδιακύμανσης είναι:

1. $Cov(X, X) = V[X]$ και $Cov(Y, Y) = V[Y]$,
2. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$,
3. $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$,

4. $Cov(\alpha X+\beta, \gamma Y+\delta)=\alpha\gamma Cov(X,Y)$,

5. $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$,

6. και $Cov(X,Y+Z)=Cov(X,Y)+Cov(X,Z)$.

Παρατήρηση 2.1 *1. Όταν $Cov(X,Y)>0$, τότε συνεπάγεται ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι θετικά συσχετισμένες.*

2. Όταν $Cov(X,Y)<0$, τότε συνεπάγεται ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι αρνητικά συσχετισμένες.

3. Όταν $Cov(X,Y)=0$, τότε συνεπάγεται ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ασυσχέτιστες. Τονίζεται ότι, όταν δύο τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, τότε θα είναι και ασυσχέτιστες, κάτι που δεν υφίσταται αντίστροφα.

Παράδειγμα 2.3 Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y με συνάρτηση πιθανότητας,

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & \textbf{\textit{εάν}}\ 0<x<y<1\\ 0, & \textbf{\textit{αλλού}}\end{cases}$$

Να βρείτε την συνδιακύμανση $Cov(X,Y)$.

Λύση:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_x^1 2dy=2(1-x),\ 0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_0^y 2dx=2y,\ 0<y<1$$

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x2(1-x)dx=2\Big[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=2\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 2y^2dy=2\Big[\frac{y^3}{3}\Big]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$E[XY]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^y 2xydxdy=\int_0^1 y^3dy=[\frac{y^4}{4}]_0^1=\frac{1}{4}$$

Συνεπώς,

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{1}{36}$$

2.4 Λυμένες ασκήσεις

2.1 Έστω το διακριτό τυχαίο διάνυσμα $[XY]$, το οποίο λαμβάνει τις τιμές $R_{XY}=\{[22],[20],[12],[02]\}$ και την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας,

$$P_{XY}(x,y)=\begin{cases}1/4, & \textbf{\textit{εάν}}\ x=2\ \textbf{\textit{και}}\ y=2\\ 1/4, & \textbf{\textit{εάν}}\ x=2\ \textbf{\textit{και}}\ y=0\\ 1/4, & \textbf{\textit{εάν}}\ x=1\ \textbf{\textit{και}}\ y=2\\ 1/4, & \textbf{\textit{εάν}}\ x=0\ \textbf{\textit{και}}\ y=2\\ 0, & \textbf{\textit{αλλού}}\end{cases}$$

Να βρεθεί η προσδοκώμενη τιμή του X, δοθέντος του $Y=2$.

Λύση: Το πρώτο βήμα που κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την προσδοκώμενη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του X, δοθέντος του $Y = 2$.

$$P_Y = \sum_{\{(x,y) \in R_{XY(y=2)}\}} P_{XY}(x,y) = P_{XY}(2,2) + P_{XY}(1,2) + P_{XY}(0,2) = \frac{3}{4}$$

,όπου οι τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή X είναι $R_X = [0,1,2]$. Το δεύτερο βήμα που θα κάνουμε 'είναι να υπολογίσουμε την περιθωριακή συνάρτηση πιθανότητας του X, δοθέντος του $Y = 2$ και θα έχουμε ότι:

$$P_{X|Y=2}(x) = \begin{cases} \frac{P_{XY}(0,2)}{P_Y(2)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3, & \text{εάν } x = 0 \\ \frac{P_{XY}(1,2)}{P_Y(2)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3, & \text{εάν } x = 1 \\ \frac{P_{XY}(2,2)}{P_Y(2)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3, & \text{εάν } x = 2 \\ 0, & \text{εάν } x \notin R_X \end{cases}$$

Συνεπώς, η προσδοκώμενη τιμή του X για $Y = 2$ δίδεται λύνοντας την σχέση,

$$E[X|Y=2] = 0P_{X|Y=2}(0) + 1P_{X|Y=2}(1) + 2P_{X|Y=2}(2) = 0\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} = 1$$

2.2 Έστω το συνεχές τυχαίο διάνυσμα $[XY]$ που λαμβάνει τις τιμές $R_{XY} = [1,2] \times [0,2]$ και με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & \textbf{εάν } x \in [1, \frac{3}{2}] \textbf{ και } y \in [0,1] \\ 1, & \textbf{εάν } x \in (\frac{3}{2}, 2] \textbf{ και } y \in (1,2] \\ 0, & \textbf{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η προσδοκώμενη τιμή του Y, δοθέντος $X = 1$.

Λύση: *Το πρώτο βήμα που κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την προσδοκώμενη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του Y, δοθέντος του $X = 1$, χρησιμοποιώντας την σχέση*

$$f_{Y|X=1}(y) = \frac{f_{XY}(1,y)}{f_X(1)}$$

Χρησιμοποιώντας τα indicator functions η προηγούμενη σχέση θα γραφεί ως εξής,

$$f_{XY}(x,y) = 1_{\{x \in [1,3/2]\}} 1_{\{y \in [0,1]\}} + 1_{\{x \in (3/2,2]\}} 1_{\{y \in [1,2]\}}$$

Το δεύτερο βήμα που θα κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την περιθωριακή συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x)$ και θα έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(1_{\{x \in [1,3/2]\}} 1_{\{y \in [0,1]\}} + 1_{\{x \in (3/2,2]\}} 1_{\{y \in [1,2]\}} \Big) = \int_0^1 1_{\{x \in [1,3/2]\}} dy + \int_1 2 1_{\{x \in (3/2,2]\}} dy$$

$$1_{\{x \in [1,3/2]\}} \int_0^1 dy + 1_{\{x \in (3/2,2]\}} \int_1 2dy = 1_{\{x \in [1,3/2]\}}(1-0) + 1_{\{x \in (3/2,2]\}}(2-1) = 1_{\{x \in [1,3/2]\}} + 1_{\{x \in (3/2,2]\}}$$

, όπου για $x = 1$, τότε $f_X(1) = 1$, καθώε και $f_{XY}(1,y) = 1_{\{y \in [0,1]\}}$. Η προσδοκώμενη συνάρτηση πιθανότητας του Y, δοθέντος του $X = 1$ είναι

$$f_{Y|X=1}(y) = \frac{f_{XY}(1,y)}{f_X(1)} = 1_{\{y \in [0,1]\}}$$

Συνεπώς, η προσδοκώμενη τιμή του Y, για $Y = 1$ υπολογίζεται ως εξής:

$$E[Y|X=1] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X=1}(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y 1_{\{y \in [0,1]\}} dy = \int_0^1 y dy = \Big[\frac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

2.3 Έστω ότι X και Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές, χρησιμοποιήστε την ιδιότητα $V[X] = E[X^2] - E[X]^2 \Rightarrow V[X|Y = y] = E[X^2|Y = y] - E[X|Y = y]^2$ και το θεώρημα του πύργου για να αποδείχθεί η σχέση

$$V[X] = E\Big[V[X|Y = y]\Big] + V\Big[[E[X|Y = Y]\Big]$$

Λύση:

$$V[X] = E[X^2]-E[X]^2 = E\Big[E[X^2|Y = y]\Big]-E\Big[E[X|Y = y\Big]^2 = E\Big[V[X|Y = y]+E[X|Y = y]^2\Big]-E\Big[E[X|Y = y\Big]^2$$

$$E\Big[V[X|Y = y] + E[E[X|Y = y]^2\Big] - E\Big[E[X|Y = y\Big]^2 = E\Big[V[X|Y = y]\Big] + V\Big[E[X|Y = y]\Big]$$

2.4 Να αποδείξεται ότι $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Λύση: Αυτή η σχέση είναι μία παραλαγή του θεωρήματος $Fubini$, που στην περίπτωση αυτή δηλώνει ότι ένα διπλό ολοκλήρωμα είανι στην ουσία η διασπασή του σε δύο ξεχωριστά ολοκληρώματα. Έστω ότι, $p_X, p_Y, p_{X,Y}$, δηλώνουν την συνάρτηση πιθανότητας των X, Y και (X, Y) αντίστοιχα. Από την πόρισμα του εδαφίου 1.2.4 και αποδεικνύεται ότι,

$$E[XY] = \int\int xyp_{X,Y}(x, y)dxdy = \int xp_X(x)dx \int yp_Y(y)dy = E[X]E[Y]$$

2.5 Να δείξεται ότι η δεσμευμένη προσδοκώμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, δοσμμένης της πληροφορίας $\mathcal{A}$ είναι ο ίδιος της ο εαυτός, δηλαδή $E[X|\mathcal{A}] = X$.

Λύση: Από τον ορισμό των τυχαίων μεταβλητών γνωρίζουμε ότι, οι τυχαίες μεταβλητές X και $E[X|\mathcal{A}]$ είναι $\mathcal{A}$-προβλέψιμες, τότε από τον ορισμό της δεσμευμένης προσδοκόμενης τιμής θα έχουμε ότι,

$$\int_A E[X|\mathcal{A}]dP = \int_A XdP, \forall A \in \mathcal{A}$$

το οποίο και επιβεβαιώνεται από το πόρισμα 1.1. του θεωρήματος Nikodym, δηλαδή $E[X|\mathcal{A}] = X$.

2.6 Να αποδειχθεί η σχέση $E\Big[E[X|G]|H\Big] = E[X|H]$, εάν $H \subset G$ (θεώρημα του πύργου) για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Λύση: Δεδομένου ότι X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή και κάνοντας χρήση της σχέσης $m_g = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|G}(x|g) = \int_{-\infty}^{\infty} x\dfrac{f(x, g)}{f_G(g)}$

$$E\Big[E[X|G]|H\Big] = E[m(G)] = \int_{-\infty}^{\infty} m(y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf_{X|Y}(x|y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}f_Y(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dxdy = E[X]$$

2.7 Να αποδειχθεί το θεώρημα του πύργου για την περίπτωση των διακριτών και συνεχών αντίστοιχα τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Λύση:

1. *Για την περίπτωση των διακριτών τυχαίων μεταβλητών, έχουμε ότι,*

$$E[E[X|Y]] = \sum_{y\in R_Y} E[X|Y=y]p_Y(y) \quad \text{(από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής)}$$
$$= \sum_{y\in R_Y}\sum_{x\in R_X} x p_{X|Y=y}(x)p_Y(y) \quad \text{(από τον ορισμό την προσδοκώμενης τιμής)}$$
$$= \sum_{x\in R_X} x \sum_{y\in R_Y} p_{XY}(x,y) = \sum_{x\in R_X} x p_X(x) \quad \text{(περιθωριακή συνάρτηση οριακής πιθανότητας)}$$
$$= E[X] \quad \text{(από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής)}$$

2. *Για την περίπτωση των συνεχών τυχαίων μεταβλητών, έχουμε ότι,*

$$E[E[X|Y]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y]f_Y(y)dy \quad \text{(από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής)}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x)dx f_Y(y)dy \quad \text{(από τον ορισμό την προσδοκώμενης τιμής)}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x) f_Y(y)dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x,y)dydx \quad \text{(όπου } f_{XY} \text{ είναι από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας)}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \quad \text{(περιθωριακή συνάρτηση οριακής πιθανότητας)}$$
$$= E[X] \quad \text{(από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής)}$$

2.8 Έχει παρατηρηθεί ότι αν μια χρηματιστηριακή αγορά λειτουργεί για t ώρες η μέση τιμή και η διασπορά των συναλλαγών είναι $5t$. Αν η αγορά λειτουργήσει για έναν τυχαίο αριθμό ωρών που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ οχτώ και δέκα ωρών. Να βρείτε την μέση τιμή και την διασπορά που θα ακολοθήσουν οι συναλλαγές.

Λύση: *Ορίζουμε ως T τον χρόνο λειτουργίας και $N(t)$ τον αριθμό των συναλλαγών σε t ώρες λειτουργίας της χρηματιστηριακής αγοράς. Ζητάμε $E[N(T)]$ και $V[N(T)]$ και γνωρίζουμε ότι $E[N(T)] = V[N(T)] = 5t$ και ότι,*

$$E(T) = \frac{10+8}{2} = 9, \quad V(T) = \frac{(10-8)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

Διαδοχικά έχουμε :

$$E[N(T)] = E\Big[E[N(T)|T]\Big] = E[m(T)], \text{ αλλά } E[N(T)|T=t] = m(t) = E[N(t)] = 5t. \text{ Συνεπώς,}$$

$$E[N(T)] = E[5T]5E[T] = 5*9 = 45$$

Αντίστοιχα για την διασπορά έχουμε:

$$V[N(T) = E\Big[V[N(T)|T]\Big] + V\Big[E[N(T)|T]\Big], \text{ αλλά } V[N(T)|T=t] = V[N(t)] = 5t. \text{ Συνεπώς,}$$

$$V[N(T)] = E[5T] + V[5T] = 5E[T] + 25V[T] = \frac{160}{3}$$

2.9 Έστω δύο ταμεία ενός πολυκαταστήματος, όπου ως X δυμβολίζεται το πλήθος στην ¨ουρά¨ του ταμείου Α και ως Y συμβολίζεται το πλήθος στην ¨ουρά¨του ταμείου Β την ίδια χρονική στιγμή, κάθε ημέρα ενός μήνα λειτουργίας του πολυκαταστήματος. Να βρεθούν:

α') $f_{X|Y}(x|0) =;$,

β') $f_{Y|X}(y|1) =;$,

γ') $f_{X|Y}(x|1) =;$,

δ') $E[Y|X=1] =;$

ε') $E[X|Y=1] =;$

λαμβάνοντας υπόψιν σας τον κάτωθι πίνακα,

x/y	**0**	**1**	**2**	$f_X(x)$
0	**0.1**	**0.04**	**0.02**	**0.16**
1	**0.08**	**0.2**	**0.06**	**0.34**
2	**0.06**	**0.14**	**0.3**	**0.5**
$f_Y(y)$	**0.06**	**0.14**	**0.3**	**1**

Λύση:

α')

$$f_{X|Y}(x|0) = \frac{f(x,0)}{f_Y(0)} = \begin{cases} \frac{0{,}1}{0{,}24} = 0,42, \ x = 0 \\ \frac{0{,}08}{0{,}24} = 0,33, \ x = 1 \\ \frac{0{,}06}{0{,}24} = 0,25, \ x = 2 \end{cases}$$

β')

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{f(1,y)}{f_X(1)} = \begin{cases} \frac{0{,}08}{0{,}34} = 0,23, \ y = 0 \\ \frac{0{,}2}{0{,}34} = 0,59, \ y = 1 \\ \frac{0{,}06}{0{,}34} = 0,18, \ y = 2 \end{cases}$$

γ')

$$f_{X|Y}(x|1) = \frac{f(x,1)}{f_Y(1)} = \begin{cases} \frac{0{,}01}{0{,}38} = 0,03, \ x = 0 \\ \frac{0{,}2}{0{,}38} = 0,53, \ x = 1 \\ \frac{0{,}14}{0{,}38} = 0,37, \ x = 2 \end{cases}$$

δ') $E[Y|X=1] = \sum_{y=0}^{2} y f_{Y|X}(y|1) = 0*(0,23) + 1*(0,59) + 2*(0,18) = 0,83$

ε') $E[X|Y=1] = \sum_{x=0}^{2} y f_{X|Y}(x|1) = 0*(0,03) + 1*(0,53) + 2*(0,37) = 1,27$

2.10 Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}x(x+y), & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \textbf{αλλού} \end{cases}$$

Να βρείτε:

α') $f_{Y|X} =;$

β') $f_{X|Y} =;$

γ') $E[X|Y = y^*]$

Λύση: *Το πρώτο βήμα που θα κάνουμε είναι να βρούμε τις συναρτήσεις πιθανότητας* $f_X(x)$ *και* $f_Y(y)$*,*

$$f_X(x) = \int_0^2 \frac{3}{5}x(x+y)dy = \frac{6}{5}x(x+1), \ 0 < x < 1$$

και

$$f_U(u) = \int_0^1 \frac{3}{5}x(x+y)dx = \frac{3y+2}{10}, \ 0 < y < 2$$

α') $f_{Y|X}(y|x^*) = \frac{f(x^*,y}{f_X(x^*)} = \frac{x^*+y}{2(x^*+1)}, \ 0 < y < 2$

β) $f_{X|Y}(x|y^*) = \frac{f(x,y^*)}{f_Y(y^*)} = \frac{6x(x+y^*)}{ey^*+2},\ 0 < x < 1$

γ) $E[X|Y = y^*] = \int_0^1 x \frac{6x(x+y^*)}{3y^*+2} dx = \frac{6}{2+3y^*} \int_0^1 x(y^* + x)dx = \frac{6}{2+3y^*} \Big(\int_0^1 y^* x dx + \int_0^1 x^2 dx \Big)$

$$= \frac{6}{2+3y^*} \Big([\frac{y^* x^2}{2}]_0^1 + [\frac{x^3}{3}]_0^1 \Big) = \frac{6}{2+3y^*} \Big(\frac{3y^*+2}{6} \Big) = \frac{6(2+3y^*)}{6(2+3y^*)} = 1$$

2.11 Να αποδειχθεί η σχέση $V[X] = E\Big[V[X|Y]\Big] + V\Big[E[X|Y]\Big]$**.**

Λύση:

$$V[X] = E[X^2 - E^2(X) \Rightarrow V[X|Y] = E[X^2|Y] - E^2(X|Y) \Rightarrow E\Big[V[X|Y]\Big] = E\Big[E[X^2|Y]\Big] - E\Big[E^2[X|Y]\Big]$$

$$= E[X^2] - E\Big[E^2[X|Y]\Big] \quad \textit{(1)}$$

και

$$V\Big[E[X|Y]\Big] = E\Big[E^2[X|Y]\Big] - \Big(E\Big[E[X|Y]\Big] \Big)^2$$

$$= E\Big[E^2[X|Y]\Big] - E^2[X] \quad \textit{(2)}$$

$$\textit{(1)} + \textit{(2)} \Rightarrow E\Big[V[X|Y]\Big] + V\Big[E[X|Y]\Big] = E[X^2] - E^2[X] = V[X]$$

2.12 Αν ένα μηχάνημα λειτουργήσει για t **ώρες, η μέση τιμή και η διακύμανση του αριθμού των βλαβών είναι** $5Tt$**. Αν το μηχάνημα λειτουργεί για τυχαίο αριθμό ωρών μεταξύ και πιο συγκεκριμένα μεταξύ** 8 **και** 10 **ωρών, βρείτε την μέση τιμή και την διακύμανση του αριθμού των βλαβών.**

Λύση: Αρχικά, ορίζουμε ως T, τον χρόνο λειτουργίας του μηχανήματος και ως $N(t)$ τον αριθμό των βλαβών σε t ώρες λειτουργίας. Επίσης, γνωρίζουμε ότι, $E[N(t)] = V[N(t)] = 5t$, $E[T] = \frac{10+8}{2} = 9$ και $V[T] = \frac{(10-8)^2}{12} = \frac{1}{3}$.

Για την μέση τιμή θα έχουμε ότι,

$$E[N(T)] = E\Big[E[N(T)|T]\Big] = E[m(T)]$$

$$E[N(T)|T = t] = m(t) = E[N(t)] = 5t$$

Συνεπώς,

$$E[N(T)] = E[5T] = 5E[T] = 45$$

Για την διακύμανση θα έχουμε ότι,

$$V[N(T)] = E\Big[V[N(T)|T]\Big] + V\Big[E[N(T)|T]\Big]$$

$$V[N(T)|T = t] = V[N(t)] = 5t$$

Επομένως,

$$V[N(T)] = E[5T] + V[5T] = 5E[T] + 25V[T] = \frac{160}{3}$$

2.5 Ασκήσεις για λύση

2.13 Έστω η δίκλαδη συνάρτηση $f(x,y)$, που παρουσιάζεται παρακάτω

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{3}(x+2y), & 0<x,y<1\\ 0 & \textbf{αλλού}\end{cases}$$

Να υπολογίσετε,

α') $E[X|Y]=E[X]$

β') $E\Big[E[X|Y]\Big]=E[X]$

2.14 Να βρεθεί η προσδοκώμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, σύμφωνα με το παράδειγμα 1.8.

2.15 Να αποδειχθεί η σχέση $V[X]=E[(X-E[X])^2]$.

2.16 Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y, να αποδείξετε ότι $E\Big[E[Y|X]\Big]=E[Y]$, δεδομένου ότι $m(x)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy$.

2.17 Να αποδείξετε ότι μία μη σταθερή τυχαία μεταβήτή έχει μια μη μηδενική διακύμανση.

2.18 Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή (X,Y), που δίδεται από τον τύπο,

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{exp(-\frac{x}{y})exp(-y)}{y}, & 0<x,y<\infty\\ 0 & \textbf{αλλού}\end{cases}$$

Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη μέση τιμή $E[X|Y=y]$, όπου $y<0$.

2.19 Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας μιας διδιάστατης διακριτής διανυσματική τυχαίας μεταβλητής (X,Y), δίδεται από τον τύπο,

$$p(x,y)=\frac{1}{15}(x+y)$$

,όπου $x=0,1,2$ και $y=1,2$. Να υπολογίσετε τις δεσμευμένες μέσες τιμές $E[X|Y=1],E[Y|X=1]$ και να συγκριθούν μεταξύ τους.

2.20 Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας διδιάστατης συνεχούς διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής, δίδεται από τον τύπο,

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x,y<1\\ 0 & \textbf{αλλού}\end{cases}$$

Να υπολογίσετε:

(α') τις συναρτήσεις $f_X(x),f_Y(y),f_{X|Y}(x|y)$ και $f_{U|Q}(x|y)$,

(β') καθώς και τις ποσότητες $E\Big[X|Y=\frac{1}{2}\Big]$ και $E\Big[U|X=\frac{1}{3}\Big]$.

2.21 Σε μια στατιστική έρευνα ως $N(t)$ συμβολίζεται ο αριθμός των ¨ενδιαφερόμενων¨ και ως $M(t)$ συμβολίζεται ο αριθμός των ¨συμμετεχόντων¨ στην έρευνα, σε ένα διάστημα $[0,t]$. Αν κάθε ¨ενδιαφερόμενος¨, ¨συμμετέχει¨ με πιθανότητα P και $E[N(t)]=\lambda t$, να βρείτε την ποσότητα $E[M(t)]$.

2.22 Να υπολογίσετε το μέσο πλήθος των δοκιμών που απαιτούνται μέχρι την εμφάνιση δύο διαδοχικών επιτυχιών σε μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli.

2.23 Σε μια εταιρεία οικονομικών ελεγκτών, ο χρόνος που χρειάζεται ο υπάλληλος A για να διεκπεραιώσει μια διαδικασία $\sim \lambda_1 exp(-\lambda_1 x),\ x>0$, ενώ ο υπάλληλος $B\sim\lambda_2 exp(-\lambda_2 x),\ y>0$. Να βρεθεί η πιθανότητα, με την οποία ο υπάλληλος B θα διεκπεραιώση πιο ¨γρήγορα¨ την διαδικασία σε σχέση με τον A.

Κεφάλαιο 3

Martingales

Στην θεωρία των options γίνεται εκτεταμένη χρήση των αναμενόμενων τιμών των τυχαίων διαδικασιών, οι οποίες υπολογίζονται με την γνώση κάποιας ιστορικότητας, οι οποίες καλούνται προσδοκώμενες τιμές (βλ. Κεφ. 2). Martingale καλείται μια τυχαία διαδικασία της οποίας η υπό όρους προσδοκία ή προσδοκώμενη τιμή έχει ιδιαίτερη χρήσιμότητα. Με απλά λόγια martingale είναι ένα μαθηματικό μοντέλο για ένα δίκαιο στοίχημα. Παίρνει το όνομά του από το la grande martingale, τη στρατηγική για τα στοιχήματα με ισοτιμία (π.χ. το παίγνιο της ρουλέτας) στο οποίο κανείς διπλασιάζει το στοίχημα μετά από κάθε απώλεια. Με τον όρο δίκαιο στοίχημα, στα μαθηματικά ενοούμε ότι τα αναμενόμενα κέρδη πρέπει να είναι μηδενικά ή η προσδοκώμενη τιμή του κέρδους να είναι μηδενική κατά την διάρκει του στοιχήματος. Για να γίνει πιο έυκολα κατανοητό ο όρος 'δίκαιο', αναλογιστείτε το παιχνίδι με τρία διαφορετικά νομίσματα. Το πρώτο νόμισμα είναι ένα δίκαιο κέρμα, το δεύτερο ένα μη ισορροπημένο κέρμα με την πιθανότητα να έρθει κορώνα ίση με $2/3$ και το τρίτο νόμισμα είναι ένα μη ισορροπημένο με την πιθανότητα να έρθει γράμματα ίση με $2/3$. Πρώτα στρίβουμε το δίκαιο νόμισμα και αν έρθει κορώνα η πιθανότητα είναι $P(heads) = 2/3$, εάν έρθει γράμματα στρίβουμε το επόμενο νόμισμα. Το στοιχημά μας θα επικεντρωθεί ισόποσα τόσα στην περίπτωση να φέρουμε κορώνα ή γράμματα αντιστοίχα. Σε αυτή την περίπτωση, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ακριβώς πότε στοιχηματίζουμε. Εάν ποντάρουμε πριν το πρώτο κέρμα πέσει, λόγω της συμμετρίας θα έχουμε πενήντα - πενήντα πιθανότητες να κερδίσουμε το στοίχημά μας και θα κερδίσουμε ένα ευρώ αν υποθέσουμε σωστά και το χάσουμε αν κάνουμε λάθος. Έτσι το στοίχημα είναι δίκαιο. Αλλά αν στοιχηματίσουμε, αφού δούμε το αποτέλεσμα της πρώτης νίκης, έχουμε πολύ περισσότερες πιθανότητες να κερδίσουμε το στοίχημά μας. Αν αναλάβουμε το ρίσκο να ποντάρουμε όλο το ποσό των χρημάτων που διαθέτουμε κατευθείαν δεν υφίσταται ο όρος 'δίκαιο στοίχημα', αλλά έχουμε περισσότερες πιθανότητες να κερδίσουμε το στοίχημα. Έτσι, η προσδοκώμενη τιμή μας δίνει όλη την απαραίτητη γνώση την χρονική στιγμή του στοιχήματος, η οποία πρέπει να είναι μηδενική. Προκειμένου να προβούμε στην καλύτερη κατανόηση των επόμενων εδαφίων, θα μοντελοποιήσουμε μια σειρά διαδοχικών στοιχημάτων παρακολουθώντας το συνολικό ποσό που διαθέτουμε και την τύχη μας σε κάθε πόντάρισμα. Έστω ότι X_0 είναι η αρχική μας περιουσία (ως περιουσία ορίζουμε τα χρηματικά μας διαθέσιμα), X_1 είναι η περιουσία μας έπειτα από το πρώτο μας στοίχημα, X_2 είναι η περιουσία μας μετά από το δεύτερο ποντάρισμα, και ούτω καθεξής. Την στιγμή κατά την οποία ποντάρουμε είμαστε στην θέση να γνωρίζουμε την περιουσία μας κάθρε χρονική στιγμή, αλλά δεν μπορούμε να γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του στοιχήματος. Τα κέρδη μας το n-οστό ποντάρισμα θα είναι $X_n - X_{n-1}$. Η τυπική προυπόθεση του δίκαιου στοιχήματος έχει προσδοκώμενη τιμή $X_n - X_{n-1} = 0$, δίνοντας μας σημαντική πληροφόρηση την στιγμή του πονταρίσματος. Με όσα έχου ναναφερθεί το πρώτο κεφάλαιο, στο n -οστό ποντάρισμα η πληροφόρηση δίδεται από την sigma field $\mathcal{F}_n$. Τότε θα έχουμε ότι $E\{X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}\} = 0$, ή $E\{X_n|\mathcal{F}_{n-1}\} = X_n$.

3.0.1 Martingales, Submartingales and Supermartingales

Ορισμός 3.1 *Η διαδικασία που καλείται filtration σε ένα χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *είναι μια ακολουθία* $\{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$, *όπου για όλα τα* n *ισχύει ότι* $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. *Το filtration αναπαριστά την γνώση μας στις περιπτώσεις των επιτυχων μας πονταρισμάτων. Είναι δυναμικό και ανάλογο με τον χρόνι, διότι όσο αυξάνεται ο χρόνος αυξάνεται και αυτό.*

Ορισμός 3.2 *Στοχαστική διαδικασία είναι ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών, ορισμένων στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Η στοχαστική διαδικασία $X = [X_n, n = 0, 1, 2, \ldots]$, είναι προσαρμοσμένη στο $\mathcal{F}_n$ (filtration) εάν για όλα τα n η στοχαστική διαδικασία $\mathcal{F}_n$ είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη.*

Ορισμός 3.3 *Μια διαδικασία $X = [X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots]$, είναι ένα martingale εάν για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$ ισχύει ότι*

1. *$[\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots]$ είναι ένα filtration και η στοχαστική διαδικασία X είναι προσαρμοσμένη στο $(\mathcal{F}_n)$,*
2. *$\forall\ n$, το X_n είναι ολοκληρώσιμο,*
3. *και $\forall\ n, E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$.*

Ορισμός 3.4 *Η στοχαστική διαδικασία $X = [X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots]$ είναι ένα submartingale ή αντίστοιχα ένα supermartingale, έαν $\forall\ n = 0, 1, 2, \ldots$ ισχύει ότι,*

1. *$[\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots]$ είναι ένα filtration και X είναι προσαρμοσμένο στο $(\mathcal{F}_n)$,*
2. *$\forall\ n$, το X_n είναι ολοκληρώσιμο,*
3. *και $\forall\ n, X_n \leq E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ και αντίστοιχα για το supermartingale θα ισχύει η σχέση $X_n \geq E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$.*

Παρατήρηση 3.1 *Δεδομένου ότι η παράμετρος n είναι ο χρόνος, και $\mathcal{F}_n$ είναι το παρελθοντικό path τον χρόνο n. Εάν μια τυχαία μεταβλητή είναι μετρήσιμη, λαμβάνοντας υπόψιν της την ιστορικότητα $\mathcal{F}_n$, εξαρτάται μόνο από ότι έχει πραγματοποιηθεί στο παρελθόν πρίν τον χρόνο n. Η διαδικασία X_n, η οποία είναι προσαρμοσμένη στο $\mathcal{F}_n$, τότε κάθε διαδικασία εξαρτάται μόνο από τα πεπραγμένα του παρελθόντος, πρίν από τον χρόνο n. Αυτές οι διαδικασίες μερικές φορές καλούνται και ως αναμενόμενες, επειδή δεν μπορούν να προβλέψουν τα αποτελέσματα στο μέλλον.*

Παρατήρηση 3.2 *Μπορούμε να ορίσουμε την έννοια ενός martingale σε διακριτό χρόνο, σε σχέση με οποιοδήποτε υποσύνολο των πραγματικών αξόνων, δηλαδή μιας σταθερής κλίμακας έτσι ώστε κάθε πραγματικός αριθμός να αντισοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο του συγκεκριμένου άξονα. Εάν $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο και παράλληλα ισχύει ότι $\mathcal{F}_t, t \in I$ είναι ένα filtration, όπου $s, t \in I$ και $s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, τότε η στοχαστική διαδικασία $X_t, t \in I$ είναι ένα submartingale εάν $s \leq t \Rightarrow X_s \leq E[X_t|\mathcal{F}_s]$. Εξετάζωντας ένα σύνολο διακριτών παραμέτρων $t_1 < t_2 < \ldots$, δεδομένου ότι η κύρια ιδιότητα που έχει ένα διακριτό σύνολο παραμέτρων είναι η τάξη του, έτσι χωρίς κανένα σφάλμα της γενικότητας, μπορούμε να χαρτογραφήσουμε το t_n στο n και να λαμβάνει τιμές ως ένα υποσύνολο των ακεραίων. Εάν είναι πεπερασμένο λαμβάνει τις τιμές $0, 1, 2, \ldots, n$ και αν είναι μη πεπερασμένο λαμβάνει τις τιμές $\mathbb{N}^+ \equiv 0, 1, 2, \ldots, \mathbb{N}^- \equiv \cdots - 2, -1$ ή $\mathbb{N} \equiv \ldots, 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση του πεπερασμένου, εξετάζοντας τις διαδικασίες $X_n, n = 0, 1, 2, \ldots$. Εάν ένα martingale αναπαριστά μια επένδυση χωρίς risk premium (δίκαιη επένδυση), τότε ένα submartingale αναπαριστά μία επένδυση της οποίας η αναμενόμενη κερδοφορία είναι θετική και ένα supermartingale, στο οποίο είναι άγνωστη η έκβαση του αποτελέσματος, συνεπώς και οι επενδυτικές αποφάσεις που θα ακολοθηθούν. Είναι αξιοσημείωτο να αναφέρουμε ότι στον κλάδο των επιχειρήσεων, οι χρηματοοικονομικοί αναλυτές ακολουθούν τις μεγάλες περιόδους για να σιγουρέψουν να επενδύσουν σε submartingales και όχι σε supermartingales.*

Ιδιότητες 3.1 *Κάποιες σημαντικές ιδιότητες που φέρουν οι κατηγορίες των κατηγορίων των martingales είναι οι κάτωθι:*

1. *Μια στοχαστική διαδικασία $X \equiv [X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots]$ είναι ένα submartingale αν και μόνο αν το X είναι ένα supermartingale. Επίσης, είναι ένα martingale αν και μονο αν είναι και τα δύο, δηλαδή ένα submartingale και ένα supermartingale.*
2. *Εάν υποθέσουμε ότι το X_n είναι ένα submartingale, το οποίο σχετίζεται με το filtration $\mathcal{F}_n$, τότε $\forall\ m < n$ ισχύει η σχέση $X_m \leq E[X_n|\mathcal{F}_m$.*
3. *Εάν X είναι ένα martingale, δηλαδή ισχύει η σχέση $E[X_n] = E[X_0]\ \forall\ n$. Εάν $m < n$ και εάν X είναι ένα submartingale, τότε ισχύει η σχέση $E[X_m] \leq E[X_n]$, ενώ εάν X είναι ένα supermartingale, τότε θα ισχύει ότι $E[X_m] \geq E[X_n]$.*

4. *Εάν X_n είναι ένα submartingale, το οποίο σχετίζεται με το filtration $\mathcal{F}_n$, τότε είναι ένα submartingale, σε σχέση με το filtration $G_n \equiv \sigma[X_0, \ldots, X_n]$.*

Συγκεντρωτικά πλέον, λόγω της πρώτης ιδιότητας (1.), θα επικεντρωθούμε περισσότερο στα αποτελεσματά μας που αφορούν τα submartingales. Από την τρίτη ιδιότητα (3.) τα martingale, έχουν σταθερές προσδοκίες, οι προσδοκίες για τα submartingales αυξάνονται με την πάροδο του χρόνου και οι προσδοκίες των supermartingales μειώνονται. Από την ιδιότητα (4.) εξάγουμε ότι, εάν κριθεί απαραίτητο μπορούμε να χρησιμοποιούμε το filtration των διαδικασιών. Μόλαταύτα, είναι χρηστικό να μπορούμε να επιλέγουμε μεγαλύτερα filtrations.

Πρόταση 3.1

- *Υποθέτουμε ότι $X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι ένα martingale και ϕ είναι μια κυρτή συνάρτηση με πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Τότε, εάν $\phi(X_n)$ ολοκληρώνεται για όλα τα n, δηλαδή για τα $\phi(X_n), \mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ τότε είναι ένα submartingale.*

- *Υποθέτουμε ότι $X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι ένα submartingale και ϕ είναι μια αύξουσα κύρτη συνάρτηση με πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Τότε, εάν $\phi(X_n)$ ολοκληρώνεται για όλα τα n, δηλαδή για τα$\phi(X_n), \mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ τότε είναι ένα submartingale.*
  Είναι αξιοσημείωτο να αναφέρουμε ότι εάν X_n είναι ένα martingale, λαμβάνοντας ως δεδομένη της συνθήκη ότι ολοκληρώνεται, τότε τα $|X_n|, X_n^2, exp(X_n)$ και $exp(-X_n)$ είναι submartingales, ενώ εάν $X_n > 0$, τότε τα $\sqrt{X}_n$ και $\log(X_n)$ είναι supermartingales. Επιπροσθέτως, εάν X_n είναι ένα submartingale, K είναι μια σταθερά και το x είναι μια αυξουσα κυρτή συνάρτηση, δηλαδή ισχύει ότι $x \mapsto max(x, K)$, τότε εξάγουμε ότι $max(X_n, K)$ είναι ένα submartingale και $min(X_n, K)$ είναι ένα supermartingale.

Παράδειγμα 3.1 Έστω $Y_1, Y_2, \ldots$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, και ισχύει ότι $E[Y_n] \geq 0 \ \forall \ n$. Επίσης, θέτουμε ως αρχική συνθήκη $X_0 = 0$ και ισχύει η σχέση $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ για $n \geq 1$, καθώς και η σχέση $F_n = \sigma[Y_1, \ldots, Y_n]$. Να δείξετε ότι το $Q_n, \ n \geq 0$ είναι ένα submartingale.

Λύση: *Πράγματι, ισχύει η σχέση,*

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[X_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \Rightarrow E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n + E[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$

Αλλά δεδομένου ότι Y_{n+1} είναι ανεξάρτητη μεταβλητή από την ακολουθία $Y_1, \ldots, Y_n$ και ως εκ τούτου του $\mathcal{F}_n$. Συνεπώς, το X είναι ένα submartingale, δηλαδή σύμφωνα και με την προαναφερθείσα σχέση θα έχουμε ότι $X_n + E[Y_{n+1}] \geq X_n$.

Παράδειγμα 3.2 Ένας τζογαδόρος ποντάρει ένα ευρώ κάθε φορά σε ένα παίγνιο και ως Y_j συμβολίζεται το κέρδος ή η ζημία στο j-οστό πονταρισμά του. Το παίγνιο είναι δίκαιο εάν $E[Y_j] = 0 \ \forall \ j$ και ισχύει ότι $E[Y_j] \geq 0 \ \forall \ j$ και αν είναι άδικο το παίγνιο ισχύει η σχέση $E[Y_j] \leq 0$. Να δείξετε εάν μπορεί ένα παίγνιο να τροποποιηθεί από τη μεταβολή στο ποσό των στοιχημάτων.

Λύση: *Υποθέτουμε ότι το n-οστό πουτάρισμα ο τζογαδόρος αποφασίζει να στοιχιματίσει K_n ευρώ, με απαραίτητη προϋπόθεση $K_n \geq 0$ και μπορεί ο ίδιος να μεταβάλει τα στοιχήαμτα ανάλογα με την κατάσταση που επικρατεί στο παίγνιο (π.χ. blackjack) ή σε μια τυχαία ιδιοτροπία που φέρει ο εκάστοτε τζογαδόρος. Κατά την διάρκει του πονταρίσματος, ο τζογαδόρος δεν γνωρίζει το αποτέλεσμα Y_n του n-οστού πονταρίσματος, αλλά έχει όλη την απαραίτητη ιστορία των πονταρισμάτων, που δίδονται από την ακολουθία $Y_1, \ldots Y_{n-1}$, οπότε η μεταβλητή K μπορεί να υπολογισθεί δεδομένου του $\mathcal{F}_{n-1}$. Για λόγο απλούστευσης θα ορίσουμε την νέα μεταβλητή $\hat{X}$. Επίσης, η μελλοντική ρευστότητα του τζογαδόρου έπειτα από το n-οστό πουτάρισμα είναι $\hat{X}_n = \hat{X}_{n-1} + K_n Y_n$, όπου K_n είναι μια $\mathcal{F}_{n-1}$ μετρήσιμη και θετική τυχαία μεταβλητή. Έως ότου K_n είναι θετική, τότε η μεταβλητή $\hat{X}$ είναι ένα martingale και αντίστοιχα ένα submartingale ή ένα supermartingale, καθώς και η διαδικασία σταθερού πονταρίσματος X είναι ένα martingale και αντίστοιχα ένα submartinale ή ένα supermartingale. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, δεν μπορούμε να τροποποιήσουμε το παίγνιο μεταβάλλοντας το μέγεθος των στοιχημάτων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό των καζίνο, δείχνοντας την υπεροχή της χρηματιστηριακής αγοράς, διότι ένα καζίνο δεν μπορεί κανείς να στοιχηματίσει αρνητικά.*

3.0.2 Αναπροσαρμοσμένη ή Διαβαθμισμένη Ανισότητα (Upcrossing Enequality)

Η γνώση της απόδειξης του συγκεκριμένου τύπου ανισότητας, μπορεί να μας διδάξει ακόμη περισσότερα για κάτι που πιστεύαμε ότι καταλαβαίνουμε με την προαναφερθείσα γνώση, αρκετά καλά.

Ας καθορίσουμε τον αριθμό των αναπροσαργμογών ή διαβαθμίσεων ενός διαστήματος $[a, b]$ από την ακολουθία πεπερασμένων των πραγματικών μεταβλητών x_0, x_1, x_N. Αυτός είναι ο αριθμός των φορών που η ακολουθία βρίσκεται κάτω από το a και πάνω από το b. Πρίν συνεχίσουμε είναι απαραίτητο να δώσουμε τους ορισμούς δύο σημαντικών μαθηματικών εννοιών, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε. Infimum, το οποίο συμβολίζεται ως inf ενός υποσυνόλου κάποιου συνόλου είναι το μεγαλύτερο στοιχείο, που δεν περιέχεται απαραίτητα στο υποσύνολο, το οποίο είναι μικρότερο ή ίσο με όλα τα στοιχεία του υποσυνόλου. Αντίστοιχα supremum, το οποίο συμβολίζεται ως sup ενός υποσυνόλου κάποιου συνόλου είναι το μικρότερο στοιχείο, που δεν περιέχεται απαραίτητα στο υποσύνολο, το οποίο είναι μεγαλύτερο ή ίσο με όλα τα στοιχεία του υποσυνόλου. Δεδομένου ότι σημείο εκκινησής μας είναι το $a_0 = 0$, τότε θα ισχύει ότι,

$$a_1 = \begin{cases} inf\{n \leq N : x_n \leq a\} \\ N + 1, \quad \text{αν δεν υπάρχει τέτοιο } n \end{cases}$$

και για $k \geq 1$ θα ισχύει ότι,

$$b_k = \begin{cases} inf\{n \geq \alpha_k : x_n \geq b\} \\ N + 1, \quad \text{αν δεν υπάρχει τέτοιο } n \end{cases}$$

$$a_{k+1} = \begin{cases} inf\{n \geq \beta_k : x_n \geq b\} \\ N + 1, \quad \text{αν δεν υπάρχει τέτοιο } n \end{cases}$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι, εάν $\beta_k \leq N, x_{\beta_k} \geq b$ και $x_{a_k} \leq a$, έτσι ώστε η ακολουθία να αναπροσαρμόζεται στο διάστημα$[a, b]$ και πιο συγκεκριμένα μεταξύ των α_k και β_k. Οι κατώτερες αναπροσαρμογές του διαστήματος πραγματοποιούνται κατά την διάρκει των συμπληρωματικών διαστημάτων $[\beta_k, \alpha_{k+1}]$.

Ορισμός 3.5 *Ο αριθμός των αναπροσαρμογών του διασήματος $[a, b]$ από την ακόλουθία $x_0, x_1, \ldots, x_N$ είναι $\nu_N(a, b) \equiv sup\{k : \beta_k \leq N\}$. Έστω ότι έχουμε το filtration $\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, N$ και μια μια στοχαστική διαδικασία $X_n, n = 0, 1, \ldots$ προσαρμοσμένη στο $\mathcal{F}_n$. Αντικαθιστώντας την ακολουθία $x_0, x_1, \ldots, x_N$ με την ακολουθία $X_0(\omega), \ldots, X_N(\omega)$, τότε τα α_k και β_k ορίζονται ως stopping times (βλ. κεφάλαιο stopping times) και $\nu_N(a, b)$ είναι ο αριθμός των αναπροσαρμογών στο διάστημα $[a, b]$ της διαδικασίας $X_0, \ldots, X_N$.*

Θεώρημα 3.1 *Η Upcrossing Ανισότητα Έστω $X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, N$ είναι ένα submartingale και ισχύει η ανίσωση $a < b$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε ο αριθμός των αναπροσαρμογών $\nu_N(a, b)$ στο διάστημα $[a, b]$ και ικανοποιεί την διαδικασία X_n από την κάτωθι σχέση:*

$$E[\nu_N(a, b)] \leq \frac{E[(X_N - a)^+]}{b - a} \qquad (3.1.1)$$

Απόδειξη: Έστω, $\hat{X}_n = X_n \vee a$ ($\vee$ υποδηλώνει τη λογική διάζευξη) για $n \geq 0$, τότε $\hat{X}_n$ είναι ένα submartingale και έχει τον ίδιο αριθμό αναπροσαρμογών στο διάστημα $[a, b]$, όσες έχει και η διαδικασία X. Ορίζουμε την διαδικασία για $n = N + 1$, θέτωντας $\hat{X}_{N+1} = \hat{X}_N$. Η διαδικασία διατηρία την ιδιότητα της ως ένα submartingale και δίδεται από την σχέση:

$$\hat{X}_N - \hat{X}_0 = \hat{X}_{\alpha_1} - \hat{X}_0 + \sum_{n=1}^{N}(\hat{X}_{\beta_n} - \hat{X}_{\alpha_n}) + \sum_{n=1}^{N}(\hat{X}_{\alpha_{n+1}} - \hat{X}_{\beta_n})$$

Είναι σημαντικό να κατανοούμε ότι στην περίπτωση που $\alpha_n \leq N$, τότε $\hat{X}_n \leq a$, άρα $\beta_n \geq 1 + \alpha_n$, τέτοιο ώστε $\alpha_n = n$ και πιο συγκεκριμένα στο παραπάνω άθροισμα ισχύει ότι $\alpha_{N+1} = N + 1$. Παίρνωντας τις προσδοκίες της προηγούμενης σχέση θα έχουμε ότι:

$$E[\hat{X}_N - \hat{X}_0] = E[\hat{X}_{\alpha_1} - \hat{X}_0] + E\Big[\sum_{n=1}^{N}(\hat{X}_{\beta_n} - \hat{X}_{\alpha_n})\Big] + E\Big[\sum_{n=1}^{N}(\hat{X}_{\alpha_{n+1}} - \hat{X}_{\beta_n})\Big]$$

Εν προκειμένου, το $\hat{X}$ είναι ένα submartingale, καθώς και α_n και β_n είναι τα stopping times. Από το θεώρημα του συστήματος βλ. κεφάλαιο στοππινγ τιμες, $\hat{X}_N - \hat{X}_0, \hat{X}_{\alpha_1} - \hat{X}_0$ και $\hat{X}_{\alpha_{n+1}} - \hat{X}_{\beta_n}$ είναι θετικές προσδοκίες και θα ισχύει ότι,

$$\geq E\Big[\sum_{n=1}^{N}(\hat{X}_{\beta_n} - \hat{X}_{\alpha_n}\Big]$$

Στην περίπτωση όπου $\beta_n \leq N$, σηματοδοτεί το τέλος των αναπροσαρμογών στο $[a, b]$, οπότε $\hat{X}_{\beta_n} + \hat{X}_{\alpha_n} \geq b - a$. Έτσι, υπάρχουν τουλάχιστον $\nu_N(a, b)$ όροι του πρώτου ποσού που υπερβαίνουν το $b - a$ και η προσδοκία οποιωνδήποτε υπόλοιπων όρων είναι θετική και δίδεται από την σχέση:

$$\geq (b - a)E[\nu_N(a, b)]$$

Τοιουτοτροπώς, $E[\nu_N(a, b)] \leq E[\hat{X}_N - \hat{X}_0]/(b - a)$ και για την διαδικασία έχουμε ότι $\hat{X}_N - \hat{X}_0 \leq X_N \vee a - a = (\hat{X}_N - a)^+$. Η απόδειξη είναι πλήρης.

Πόρισμα 3.1 *Εάν $X = X_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι μια διαδικάσια ή ένα πεπερασμένο σύνολο παραμέτρων, οι οποίες ορίζουν τον αριθμό των αναπροσαρμογών $\nu_\infty(a, b$ του X από την σχέση,*

$$\nu_\infty(a, b) = \lim_{N\to\infty} \nu_N(a, b)$$

Συνεπως, η σχέση (3.1.1) θα τροποποιηθεί ως εξής:

$$E[\nu_\infty(a, b)] \leq \frac{sup_N E[(X_N - a)^+]}{b - a}$$

3.0.3 Σύγκλιση Martingale

Θεώρημα 3.2 *Έστω $X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots$ είναι ένα submartingale και υποθέτουμε ότι $E[|X_n|]$ είναι οριθετημένο (δεν κυμαίνεται ανεξέλεγκτα). Τότε με πιθανότητα ίση με ένα, υπάρχει μια πεπερασμένη ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή X_∞ τέτοια ώστε σχεδόν παντού να ισχύει ότι,*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$$

Απόδειξη: *Πρώτα θα δείξουμε ότι $\lim inf X_n(\omega) = \lim sup X_n(\omega)$ (γύρω από το σημείο το οποίο συσσωρεύεται μια ακολουθία, συνάρτηση ή σύνολο, τα κατώτερα ή superior και ανώτερα ή inferior όρια εξάγουν το μικρότερο και το μεγαλύτερο από αυτά, ο τύπος του σημείου και το μέτρο του μεγέθους εξαρτώνται από το περιβάλλον, αλλά η έννοια των ακραίων ορίων είναι αμετάβλητη). Κάνοντας χρήση της θεωρίας για την upcrossing inequality, υποθέτουμε ότι η ακολουθία δεν συγκλίνει. Τότε υπάρχουν οι ρητοί αριθμοί a και b, τέτοιοι ώστε $\lim inf X_n(\omega < a < b < \lim sup X_n(\omega)$. Συνακόλουθα, υπάρχει μια υποακολουθία n_k, τέτοια ώστε $X_{n_k}(\omega) \to \lim inf X_n(\omega)$, καθώς και μια άλλη υποακολουθία n_j, τέτοια ώστε $X_{n_j}(\omega) \to \lim sup X_n(\omega)$. Γενικότερα ισχύει ότι, $X_{n_k} < a$ και $X_{n_j} < b$ για πεπερασμένα k και j αντίστοιχα. Συνεπάγεται δηλαδή ότι, υπάρχουν πεπερασμένες αναπροσαρμογές στο διάστημ $[a, b]$. Έτσι, εάν $\lim sup X_n(\omega) > \lim inf X_n(\omega)$, υπάρχουν ρητοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει η σχέση $a < b$ και άρα ο αριθμός των αναπροσαρμογών στο $[a, b]$ είναι πεπερασμένος. Για κάθε ένα ζεύγος $r_1 < r_2$ των ρητών αριθμών ισχύει ότι, $E[\nu_\infty(r_1, r_2) \leq sup_n E[(X_N - a)^+]/(b - a) \leq sup_N(E[|X_N|] + a)/(b - a) < \infty$. Από αυτό προκύπτει ότι $P[\nu_\infty(r_1, r_2) = \infty] = 0$, για κάθε ένα αριθμό των ζευγών που μετρήθηκε r_1, r_2, ως εκ τούτου $P\exists\ r_1 < r_2 \in \mathbb{Q} : \nu_\infty(r_1, r_2) = \infty\} = 0$. Από αυτό συνεπάγεται ότι για οποιοδήποτε ω ισχύει η ισότητα, $\lim sup X_n(\omega) = \lim inf X_n(\omega)$. Για να επιβεβαιώσουμε ότι και το όριο είναι εκ των πραγμάτων πεπερασμένο, ισχύει από το λήμμα του Fatou ότι $E[\lim |X_n|] \leq \lim inf E[|X_n|] < \infty$ και a priori θα ισχύει σχεδόν οπουδίποτε ότι, $\lim |X_n| < \infty$.*

Προκειμένου να μπορέσουμε να δείξουμε την σύγκλιση ενός martingale, submartingale ή supermartingale, οφείλουμε να αποδείξουμε ότι η κατ' απόλυτη τιμή η προσδοκία του είναι φραγμένη.

Πόρισμα 3.2 *Ένα θετικά ορισμένο supermartingale και ένα αρνητικά ορισμένο submartingale, συγκλίνουν με πιθανότητα ίση με την μονάδα. Αυτό εύκολα αποδεικνύεται, εάν $X_n, \mathcal{F}_n$, με $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι ένα supermartingale, τότε $E[|X_n|] = E[X_n] \leq E[X_0]$, οπότε η διαδικασία συγκλίνει σχεδόν παντού σύμφωνα και με το θεώρημα 3.2.*

3.1 Λυμένες ασκήσεις

3.1 Να αποδείξεται τα κάτωθι:

α΄) Εάν υποθέσουμε ότι το X_n είναι ένα submartingale, το οποίο σχετίζεται με το filtration $\mathcal{F}_n$, τότε $\forall\ m < n$ ισχύει η σχέση $X_m \leq E[X_n|\mathcal{F}_m]$.

β΄) Εάν X είναι ένα martingale, δηλαδή ισχύει η σχέση $E[X_n] = E[X_0]\ \forall\ n$. Εάν $m < n$ και εάν X είναι ένα submartingale, τότε ισχύει η σχέση $E[X_m] \leq E[X_n]$, ενώ εάν X είναι ένα supermartingale, τότε θα ισχύει ότι $E[X_m] \geq E[X_n]$.

γ΄) Εάν X_n είναι ένα submartingale, το οποίο σχετίζεται με το filtration $\mathcal{F}_n$, τότε είναι ένα submartingale, σε σχέση με το filtration $G_n \equiv \sigma[X_0, \ldots, X_n]$.

Λύση:

α΄) Από τον ορισμό του submartingale, γνωρίζουμε την initial condition $n = m + 1$ και υποθέτουμε ότι είναι αληθής για $n = m + k$, τότε θα ισχύει η ανισότητα $X_m \leq E[X_{m+k}|\mathcal{F}_m$. Αλλά από την ανισότητα του submartingale έχουμε ότι, $X_{m+k} \leq E[X_{m+k+1}|\mathcal{F}x_{m+k} \Rightarrow X_m \leq E\Big[E[X_{m+k+1}|\mathcal{F}_{m+k}]|\mathcal{F}_m\Big]$. Επίσης, δεδομένου ότι $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_{m+k}$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του πύργου θα έχουμε ότι $X_m \leq E\Big[E[X_{m+k+1}|\mathcal{F}_{m+k}]|\mathcal{F}_m\Big] = E[X_{m+k+1}|\mathcal{F}_m]$. Συνεπώς, αποδεικνύεται το ζητούμενο αφού για $n = k + 1$ και $\forall\ n > m$ ισχύει η επαγωγή.

β΄) Εάν X_n είναι ένα submartingale, τότε ισχύει η ανίσωση $X_n \leq E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \Rightarrow E[X_n] \leq E\Big[E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\Big] \Rightarrow E[X_n] \leq E[X_{n+1}]$, αντίστοιχη είναι και η διαδικασία για ένα supermartingale, αλλάζοντας την φορά της ανίσωσης.

γ΄) Δεδομένου ότι $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$ προκειμένου το X να είναι προσαρμοσμένο στο filtration και ισχύεί ότι $m < n \Rightarrow X_m \leq E[X_n|\mathcal{F}_n]$, τότε αποδεικνύεται το ζητούμενο της εκφώνησης ως εξής,

$$E[X_n|\mathcal{G}_m] = E\Big[E[X_n|\mathcal{F}_m]|\mathcal{G}_m\Big] \geq E[X_m|\mathcal{G}_m] = X_m$$

3.2 Υποθέτουμε ότι $X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι ένα martingale και ϕ είναι μια κυρτή συνάρτηση με πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι, εάν $\phi(X_n)$ ολοκληρώνεται για όλα τα n, δηλαδή για τα $\phi(X_n), \mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ τότε είναι ένα submartingale.

Λύση: *Από το θεώρημα 2.1 (ανισότητα του Jensen) για τις προσδοκώμενες τιμές έχουμε ότι,*

$$\phi(X_m) = \phi(E[X_n|\mathcal{F}_m]) \leq E[\phi(X_n|\mathcal{F}_m]$$

3.3 Έστω $Y_1, Y_2, \ldots$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών με πιθανότητες, $P(Y_j = 1)$ και $P(Y_j = 0) = 1 - p$. Τότε να δείξετε ότι η σχέση που ακολουθεί είναι ένα martingale,

$$X_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{Y_j}{p}$$

Λύση: *Πράγματι είναι ένα θετικό martingale, το οποίο συγκλίνει στο μηδέν με πιθανότητα ένα, και ισχύει η κάτωθι εξίσωση,*

$$E[X_{n+1}|Y_1, \ldots, Y_n] = E[X_n Y_{n+1}/p|Y_1, \ldots, Y_n] = X_n E[Y_{n+1}/p] = X_n$$

3.2 Ασκήσεις για λύση

3.4 Υποθέτουμε ότι $X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ **είναι ένα submartingale και** ϕ **είναι μια αύξουσα κύρτη συνάρτηση με πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι, εάν** $\phi(X_n)$ **ολοκληρώνεται για όλα τα** n**, δηλαδή για τα** $\phi(X_n), \mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ **τότε είναι ένα submartingale.**

3.5 Να βρεθούν οι πιθανότητες για ένα παιχνίδι μεταξύ δύο φίλων με τρία νομίασματα, τα οποία είναι δίκαια, εάν ποντάρουμε αφότου έχει χρησιμοποιηθεί το π΄ρώτο νόμισμα.

3.6 Να δείξετε ότι το max **δύο submartingales, είναι ένα submartingale, δεδομένου ότι έχουν το ίδιο filtration.**

3.7 Έστω Y_n **μια ακολουθία θετικών ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με** $E[Y_j] = 1 \; \forall \; j$**. Λαμβάνοντας υπόψιν σας ότι** $X_0 = 1$ **και** $X_n = \Pi_1^n Y_j, \; n \geq 1$**. Να δείξετε ότι** $X_0, X_1, \ldots$ **είναι ένα martingale.**

3.8 Να αποδειχθεί η σχέση,

$$E[\nu_\infty(a,b)] \leq \frac{sup_N E[(X_N - a)^+]}{b-a}$$

3.9 Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **είναι μια υποακολουθία των πραγματικών αριθμών και έστω ότι εξ΄ ορισμού** $x' = x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ **είναι μια υποακολουθία. Να δείξετε ότι, εάν** $a < b$**, ο αριθμός των αναπροσαρμογών στο διάστημα** $[a,b]$ **του** x' **είναι μικρότερο ή ίσον με τον αιρθμί των αναπροσαρμογών στο διάστημα** $[a,b]$ **του** x**.**

Κεφάλαιο 4

Τυχαίοι Περίπατοι - Random Walks

Για αρκετά χρόνια οι επιστημονικοί κλάδοι των οικονομικών, της στατιστικής και της χρηματοοικονομικής έδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον προκειμένου να μπορέσουν να αναπτύξουν και να δοκιμάσουν μοντέλα, τα οποία θα μπορούν να περιγράφουν την συμπεριφορά της αξίας των μετοχών. Ένα από αυτά τα βασικά μοντέλα, ήταν αυτό που καλείται μοντέλο ή θεωρία τυχαίων περιπάτων. Οι υποστηρικτές των τυχαίων περιπάτων, υποστηρίζουν ότι η τρέχουσα τιμή της αγοράς μιας δεδομένης μετοχής είναι ανεξάρτητη και ασυσχέτιστη με τα παρελθοντικά μοτίβα της αγοράς. Η χρήση αυτής της θεωρίας, υποδηλώνει ότι μια σειρά τροποποιήσεων στις τιμές των μετοχών δεν έχουν μνήμη, δηλαδή ότι κανένας από τους μετέχοντες στις χρηματιστηριακές συναλλαγές δεν έχει την γνώση να προβλέψει τις μελλοντικές τιμές της αγοράς με βάση την ιστορική συμπεριφορά των τιμών των μετοχών. Επίσης, η θεωρία υποδηλώνει ότι, οποιαδήποτε χρονική στιγμή η πραγματική τιμή αγοράς μιας μετοχής αντιπροσωπεύει την καλύτερη εκτίμηση της αγοράς για την ¨εγγενή¨ αξία της εν λόγω μετοχής, βασισμένη στο σύνολο των διαθέσιμων πληροφοριών. Αυτή η εγγενής αξία καθορίζεται από μια θεμελιώδη ανάλυση, για την αναμενόμενη μελλοντική απόδοση των κερδών της εισηγμένης εταιρείας στην χρηματιστηριακή αγορά. Στην περίπτωση που μια νέα πληροφορία είναι διαθέσιμη για την διαπραγματευόμενη μετοχή, οι επενδυτές ίσως αναθεωρήσουν τις εκτιμήσεις τους για τα αναμενόμενα μελλοντικά κέρδη τους και αυτές οι αναθεωρήσεις με την δική τους σειρά, θα επηρεάσουν την εκτιμησή τους για την εγγενή αξία της μετοχής. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα, η στιγμιαία αξία της διαπραγματεύσιμης μετοχής ίσως να τροποιηθεί, επηρεαζόμενη από την νέα πληροφορία που υπάρχει στην αγορά. Ωστόσο, αυτές οι τροποποιήσεις στην αξία της μετοχής είναι μια αντανάκλαση των τροποποιήσεων που συμβάινουν στην αγορά εκτιμόντας την εγγενή αξία της μετοχής, η οποία όμως δεν σχετίζεται με τις προηγούμενες τιμές της μετοχής(παρελθοντικές τάσεις της τιμής). Η θεωρία των τυχαίων περιπάτων υποδηλώνει ότι η αγορά εξομοιώνει νέες πληροφορίες με τέτοιο τρόπο ώστε τυχόν αποκλίσεις στην εγγενή αξία να είναι τυχαίες. Εάν, για κάποιο λόγο, οι αποκλίσεις αυτές γίνουν συστηματικές, οι υποστηρικτές της θεωρίας θα υποστήριζαν ότι υπάρχουν ορισμένοι συμμετέχοντες στην αγορά που θα αναγνωρίζουν το επαναλαμβανόμενο πρότυπο αποκλίσεων και θα αγοράζουν ή πωλούν για να επωφεληθούν από αυτές. Οι κερδοσκοπικές πράξεις αυτές (arbitrage) αυτών των συμμετεχόντων στην αγορά θα τείνουν να εξαλείψουν κάθε κέρδος που βασίστηκε σε μη τυχαίες διακυμάνσεις της εγγενούς αξίας. Επομένως, η θεωρία των τυχαίων περιπάτων συνεπάγεται μια αποτελεσματική αγορά όπου δεν υπάρχουν συστηματικές υπερεκτιμήσεις ή υποεκτιμήσεις των μετοχών. Υπάρχουν απλώς πάρα πολλοί παράγοντες της αγοράς με επαρκείς πόρους που είναι σε θέση να επωφεληθούν από τέτοιες ευκαιρίες κέρδους. Αυτοί οι συμμετέχοντες ανταγωνίζονται μεταξύ τους μέχρις ότου όλες οι τυχαίες διακυμάνσεις της εγγενούς αξίας γίνουν τόσο μικρές ώστε να μην μπορούν να αξιοποιηθούν για κέρδος. Ως αποτέλεσμα, ο trader δεν θα ήταν σε θέση να προβλέψει τις μελλοντικές τιμές αγοράς αποκλειστικά βάσει της παρελθούσας συμπεριφοράς των τιμών. Σύμφωνα με την θεωρία τυχαίων περιπάτων οι αλλαγές των τιμών της αγοράς για μια μετοχή είναι ανεξάρτητες και αυτό συνεπάγεται ότι, ο trader δεν μπορεί να επωφεληθεί από τη γνώση της προηγούμενης συμπεριφοράς των τιμών της μετοχής.

4.1 Συμμετρικός Τυχαίος Περίπατος

Πολλά χρόνια οι ερευνητές αναρωτήθηκαν γιατί η διακύμανση είναι ανάλογη προς το χρόνο, αυτό το ερώτημα θα διευκρινιστεί τώρα με την κατασκευή μιας τυχαίας διαδικασίας ως το λεγόμενο όριο στη κατανομή ενός συμμετρικού τυχαίου περιπάτου (Symmetric Random Walk). Λαμβάνοντας το διάστημα $[0, T]$ και διαμεριζοντάς το σε n διαστήματα με μήκος $\Delta_t := T/n$, τότε έχουμε ότι, $t_k := k\Delta_t,\ k = 0, \ldots, n$. Το σημείο στόχος λαμβάνει την τιμή 0, και κινείται πάνω και κάτω, κάθε διακριτή χρονική στιγμή με ίση πιθανότητα. Οι διαδοχικές αυξήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και δηλώνονται ως $\sqrt{\Delta}$. Καλείται συμμετρικός τυχαίος περίπατος, διότι η συμμετρία προκαλείται από τις ίσες πιθανότητες των άνω και κάτω προσαυξήσεων. Ένας τυχαίος περίπατος δίδεται από τον τύπο:

$$S_t = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_t$$

,όπου

- t είναι η εποχή ή χρονική στιγμή,
- $t_2 - t_1$ είναι η διάρκεια ή ο χρόνος
- X_t είναι μια τυχαία μεταβλητή, η οποία δηλώνει την απόφαση ή την δράση την χρονική στιγμή t,
- S_t είναι η θέση, όπου αν $t \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow S_t$ είναι ένας διακριτός τυχαίος περίπατος,
- και $\{(t, S_t)\}$, όπου $S_t = s_t$ καλείται μονοπάτι (path) ή τροχία την χρονική στιγμή t και πιο συγκεκριμένα αν $t = 0, 1, \dot{;} k$ τότε το μονοπάτι διέρχεται από την εκάστοτε θέση που αναλογή για την χρονική στιγμή 0 έως την k.

Κάποιοι σημαντικοί ορισμοί των οποίων κρίνεται απαραίτητη η γνώση τους για την κατανόηση των συμετρικών τυχαίων περιπάτων είναι οι κάτωθι:

(i) Το σύνολο $\{t, s_t\}$, όπου $S_t = s_t$ καλείται ¨μονοπάτι¨, όπου εάν $t = 0, \ldots, k$ το συγκεκριμένο μονοπάτι ακολουθεί μια διαδρομή από 0 έως k.

(ii) Το μονοπάτι s επισκέπτεται την θέση k την εποχή t, εάν ισχύει η ισότητα $s_t = k$.

(iii) Αν για μια θέση (t, k), υπάρχει κάποιο μονοπάτι που την επισκέπτεται, τότε η συγκεκριμένη θέση καλείται ¨προσιτή θέση¨.

(iv) Αν $(t_0, k_0), (t_1, k_1)$ ανήκουν στο ίδιο μονοπάτι, τότε η θέση (t_1, k_1) είναι προσιτή από την (t_0, k_0), όταν $t_1 > t_0$.

(v) Ως $N_{t,k}$ ορίζεται το πλήθος των μονοπατιών, τα οποία επισκέπτονται την θέση (t, k).

(vi) Ένας τυχαίος περίπατος ή ένα μονοπάτι επιστρέφει στην θέση 0 την εποχή t, εάν ισχύει ότι $S_t = 0$ ή $0 \in S_t$.

(vii) Ένας τυχαίος περίπατος επιστρέφει στην θέση 0 για πρώτη φορά την εποχή t, όταν $S_1, S_2, \ldots S_{t-2} \neq 0$ και $S_t = 0$.

4.1.1 Ιδιότητες Random Walk

Ένα Random Walk έχει ιδιότητες, των οποίων η κατανόηση είναι σημαντική για την επίλυση των ασκήσεων. Συγκεκριμένα η θεωρία τυχαίου περιπάτου έχει τις κάτωθι ιδιότητες:

1. $E[X_t] = 0, \quad \forall\ t$.
2. $V[X_t] = E[X_t^2] - E^2[X_t] = 1$.
3. Οι αποφάσεις X_t για $t = 0, 1, \ldots, n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.
4. $E[S_t] = 0$ και $V[S_t] = t$.
5. Το συνολικό αποτέλεσμα των διάφορων αποφάσεων S_t για $t = 0, 1, \ldots, n$, είναι ένα martingale.

6. Το αποτέλεσμα των διαφόρων αποφάσεων S_t έχει την ιδιότητα Markov, είναι δηλαδή ένα μαθηματικό σύστημα που μεταβάλλεται από μια κατάσταση σε μια άλλη, ανάμεσα σε ένα πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Είναι μια τυχαία διαδικασία που δε διατηρεί μνήμη για τις προηγούμενες μεταβολές, καθώς και η επόμενη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την τωρινή κατάσταση και σε καμιά περίπτωση από αυτές που προηγήθηκαν. Αυτή δίδεται από τον τύπο:

$$P(S_{t+1} = p|S_t = K_t, \ldots S_1, K_1) = P[S_{t+1} = p|S_t = K_t]$$

7. Από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα έχουμε ότι, $\dfrac{S_t}{\sqrt{t}} \in N(0,1)$, όταν $t \to \infty$.

8. Υπάρχουν 2^t τιμές ή 2^t μονοπάτια (paths) που διέρχονται την εποχή t με πιθανότητα $1/2^t$.

9. Προκειμένου ένα ζεύγος (t,k) να είναι προσιτό, πρέπει να υπάρχουν ακέραιοι ϕ και θ έτσι ώστε:

$$t + k = 2\phi \text{ και } t - k = 2\theta$$

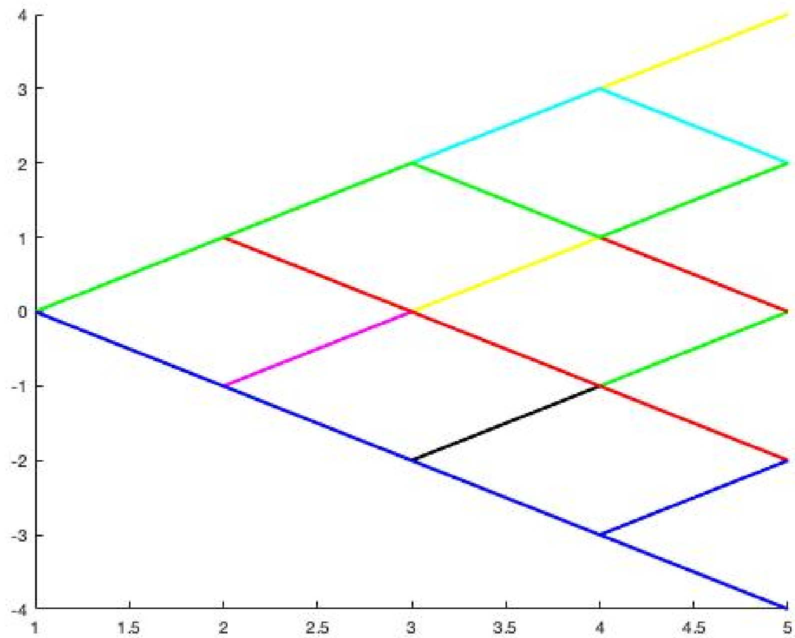
Συνεπώς, $t+k$ και $t-k$ είναι άρτιοι, καθώς και θα ικανοποιείται η συνθήκη:

$$N_{t,k} = \binom{t}{\frac{t+k}{2}} = \binom{t}{\frac{t-k}{2}} \text{ όπου } t+k > 0 \text{ και } t-k > 0$$

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η προαναφερθείσα σχέση μες δείχνει το πλήθος των μονοπατιών.

Παράδειγμα 4.1 *Έστω ένα σώμα, το οποίο βρίσκεται στην θέση 0, δηλαδή στο σημείο εκκίνησης, κινείται προς τα άνω $+1$ με πιθανότητα $1/2$, καθώς και προς τα κάτω -1 με πιθανότητα $1/2$, δηλαδή,*

$$X_t = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ -1 & p = 1/2 \end{cases}$$



4.2 Επιστροφή στην θέση μηδέν

Για να είναι το μονοπάτι $(t, 0)$ προσιτό, τότε η σχέση $t + 0$ πρέπει να είναι άρτιος αριθμός και συνεπάγεται ότι $t = 2m$. Συνεπώς, θα ισχύει η σχέση:

$$u_{2m} = P(S_{2m} = 0) = \frac{N_{2m,0}}{2^{2m}} = \binom{2m}{m} \frac{1}{2^{2m}}, \quad m \geq 0$$

Λήμμα 4.1 *Έστω οι πιθανότητες,*

$P(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2m} \neq 0)$
$P(S_1 \geq 0, \ldots, S_{2m} \geq 0)$
$P(S_1 \leq 0, \ldots, S_{2m} \leq 0)$
$2P(S_1 > 0, \ldots, S_{2m} > 0)$
$2P(S_1 < 0, \ldots, S_{2m} < 0)$
είναι ίσες. Η πρώτη επιστροφή στο μηδέν γίνεται σε άρτια ¨εποχή¨, $t = 2m$, δηλαδή ισχύει ότι $f_{2m} = P($πρώτη επιστροφή στο 0 την εποχή$t = 2m)$. Συνεπώς για το υπολογιατικό κομμάτι θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση:

$$f_{2m} = u_{2m-2} - u_{2m} = \frac{1}{2m-1} \binom{2m}{m} \frac{1}{2^{2m}}, \quad m \geq 0$$

Παράδειγμα 4.2 Να δείξετε ότι με πιθανότητα 1 ο τυχαίος περίπατος επιστρέφει στο 0.

Λύση:

$$P(\textbf{κάποτε επιστρέφει στο 0}) = P\Big(U_{m=1}^{\infty} \textbf{πρώτη επιστροφή την στιγμή } 2m\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{2m}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} [u_{2m-2} - u_{2m}] = u_0 = 1$$

Παράδειγμα 4.3 Να δείξετε ότι με πιθανότητα 1, ο τυχαίος περίπατος επιστρέφει στο 0, απείρως συχνά, δεδομένου ότι $u \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$.

Λύση:

$$E[(\textit{πρώτη επιστροφή 0 })] = \sum_{m=1}^{0} 2m f_{2m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m}{2m-1} u_{2m} \quad (1)$$

, αλλά δεδομένου ότι:

$$\frac{2m}{2m-1} u_{2m} = \frac{2m}{2m-1} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

,καθώς και από την χρήση των σειρών και συγκεκριμένα της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων καταλήγουμε στο ζητούμενο του παραδείγματος,

$$(1) \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} 2m f_{2m} = \infty$$

Παρατηρήσεις 4.1 *Η καταστροφή του τζογαδόρου (gambler's ruin) είναι ένας τυχαίος περίπατος με πιθανότητα $p = 1/2$ και βήμα $h = \pm 1$.*

4.3 Λυμένες ασκήσεις

4.1 Μέσω μια διαδικασίας τυχαίου περιπάτου, να βρεθούν οι λύσεις των κάτωθι:

(α') $\boldsymbol{P\Big(-\sqrt{t} \leq S_t \leq \sqrt{t}\Big)}$

(β') $\boldsymbol{P\Big(10 \leq S_{100} \leq 15\Big)}$

Λύση:

(α') Διαιρούμε με την ρίζα του t και θα έχουμε ότι,

$$P\Big(-\sqrt{t} \leq S_t \leq \sqrt{t}\Big) = P\Big(-1 \leq \frac{S_t}{\sqrt{t}} \leq 1\Big) = P\Big(-1 \leq \frac{S_1}{\sqrt{1}} \leq 1\Big)$$
$$= P(-1 \leq z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0,6827$$

(β') Διαιρούμε με την ρίζα του 100 και θα έχουμε ότι,

$$P(10 < S_{100} < 15) = P\Big(\frac{10}{\sqrt{100}} < \frac{S_{100}}{\sqrt{100}} < \frac{15}{\sqrt{100}}\Big) = P(1 < z < 1,5)$$
$$= \Phi(1,5) - \Phi(1) = 0,9332 - 0,8413 = 0,0919$$

4.2 Έστω δύο παίκτες A και B, παίζουν το παιχνίδι κορώνα ή γράμματα με κέρδος ± 1. Ο πρώτος παίκτης A έχει τρία ευρώ στο πορτοφόλι του και ο δεύτερος παίκτης B έχει έξι ευρώ στο πορτοφόλι του. Ποια είναι η πιθανότητα ο πρώτος παίκτης να κερδίσει στον δέκατο γύρο του παιχνιδιού;

Λύση: *Δηλώνουμε ότι η απόφαση, που αντιπροσωπεύει το κέρδος του πρώτου παίκτη A*

$$X_t = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ -1 & p = 1/2 \end{cases}$$

Ο τύπος που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το κέρδος είναι:

$$P_p = \frac{\begin{pmatrix} t \\ \frac{t+k}{2} \end{pmatrix}}{2^t} = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ \frac{10+6}{2} \end{pmatrix}}{2^{10}} = \frac{\frac{10!}{8!(10-8)!}}{2^{10}} = \frac{\frac{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10}{1*2*3*4*5*6*7*8*1*2}}{2^{10}} \Rightarrow$$

$$P_p = \frac{9*10}{2^{11}} \simeq 0$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι στο βρισκόμαστε σημείο $(0,3)$ και θέλουμε να μετακινηθούμε στο σημείο $(10,9)$, που είναι η θέση του πρώτου παίκτη. Επιπροσθέτως, λόγω της συμμετρίας είμαστε στο σημείο $(0,0)$ και θέλουμε να μετακινηθούμε στο σημείο $(10,6)$, που είναι η θέση του δεύτερου παίκτη.

4.3 Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η πιθανογεννήτρια συνάρτηση ενός τυχαίου περιπάτου.

Λύση: *Είναι γνωστό ότι εάν γνωρίζει την ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής X_1, τότε το άθροισμα είναι το γινόμενο των ροπογεννητριών.*

$$S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_t = M_{S_t}(\theta) \Rightarrow M_{X_1}(\theta) * \cdots * M_{X_t}(\theta)$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι,

$$M_{X_1}(\theta) = E\Big[e^{\theta X_1}\Big] = e^{\theta 1}\frac{1}{2} + e^{\theta(-1)}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})$$

Ως αποτέλεσμα των δύο προηγούμενων εξισώσεων εξάγουμε τον τελικό τύπο, ο οποίος αναπαριστά την πιθανογεννήτρια συνάρτηση του τυχαίου περιπάτου,

$$M_{S_t} = \left[\frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta}\right]^t$$

Τέλος, εάν θέλουμε να βρούμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση πρέπει να αντικαταστήσουμε την μεταβλητή θ *με* $\ln\theta$ *και θα έχουμε ότι,*

$$P_{S_t} = M_{S_t}(\ln\theta) = \left[\frac{1}{2}(\theta + \theta^{-1})\right]^t$$

4.4 Έστω X_i είναι η απόφαση ενός τυχαίου περιπάτου και $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Να δείξετε ότι η $S_n^2 - n$ είναι martingale.

Λύση:

$$E\Big[S_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n\Big] = E\Big[(S_n + X_{n+1})^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n\Big]$$

$$= E\Big[S_n^2 + 2S_nX_{n+1} + X_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n\Big]$$

$$= E\Big[S_n^2|\mathcal{F}_n\Big] + E[2S_nX_{n+1}|\mathcal{F}_n] + E\Big[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\Big] - (n+1)$$

$$= S_n^2 + 2S_nE[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] + 1^2\frac{1}{2} + (-1)^2\frac{1}{2} - (n+1)$$

$$= S_n^2 + 2S_n * 0 + 1 - (n+1) = S_n^2 - n$$

4.5 Έστω το ζεύγος (n,k) είναι προσιτό. Ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη επίσκεψη στο k να συμβεί την εποχή $t = n$·

Λύση:

$$P(\textit{πρώτης επίσκεψης στο k την εποχή n}) = \frac{k}{n}\binom{n}{\frac{n-k}{2}}\frac{1}{2^n}$$

4.6 Δύο παίκτες A και B παίζουν το παιχνίδι κορρόνα ή γράμματα με ένα δίκαιο κέρμα με κέρδος - ζημία$= \pm 1$. O A έχει 3 ευρώ και ο B έχει 6 ευρώ. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης A στην 10η ρίψη;

Λύση: *Είναι κατανοητό ότι η άσκηση αναφέρεται σε έναν τυχαίο περίπατο της μορφής,*

$$X_t = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ -1 & p = 1/2 \end{cases}$$

Θέλουμε ξεκινώντας από το σημείο $(0,3)$ *να πιάσουμε το σημείο* $(10,9)$*, που συνεπάγεται ότι ξεκινώντας από το σημείο εκκίνησης* $(0,0)$*, να πιάσουμε το σημείο* $(10,6)$.

$$P[\textit{πιάνει το σημείο (10,6)}] = \frac{\textit{paths from (10,6)}}{\textit{total number of paths}} = \frac{N_{10,6}}{2^{10}} = \frac{\binom{10}{\frac{10-6}{2}}}{2^{10}} = \frac{\binom{10}{2}}{2^{10}}$$

$$\frac{10!}{2!8!2^{10}} = \frac{90}{2^{11}} \simeq 0$$

4.4 Ασκήσεις για λύση

4.7 Να υπολογιστεί η πιθανότητα του φαινομένου της καταστροφής του τζογαδόρου ή gambler's ruin εάν ο τυχαίος περίπατος δεν είναι συμμετρικός, δηλαδή εάν $P(Y_j = 1) = p$ και $P(Y_j) = -1) = 1 - p$ για $0 < p < 1, p \neq 1/2$. Για την δική σας βοήθεια ψάξτε για ένα martingale που θα είναι της μορφής $Z_n = r^{X_n}$.

4.8 Να δείξετε ότι με πιθανότητα ίση με την μονάδα, ο απλό συμμετρικός τυχαίος περίπατος περνάει από όλους τους ακεραίους απείρως συχνά.

4.9 Να κατασκευάσετε ένα διάγραμμα απλό συμμετρικού τυχαίου περιπάτου με βήμα $\pm h$ και πιθανότητα p και $1 - p$, και να το ερμηνεύσετε.

4.10 Δίνεται ένας απλός τυχαίος περίπατος Ποια είναι η πιθανότητα $10 < S_{100} < 15$;

4.11 Δεδομένου ενός τυχαίου περιπάτου της μορφής,

$$X_t = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ -1 & p = 1/2 \end{cases}$$

Ποια είναι η πιθανότητα το σημείο (n, k) να είναι προσιτό;

4.12 Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει αρχικό κεφάλαιο X_0, σε κάθε ¨εποχή¨ λαμβάνει $Y_1, Y_2, \ldots$ και πληρώνει $W_1, W_2, \ldots$. Να βρείτε ποθα είναι η πιθανότητα να πάψει την λειτουργία της η εταιρεία.

Κεφάλαιο 5

Διαδικασίες $Poisson$

5.1 Ορολογία

Οι διαδικασίες $Poisson$, είναι το τμήμα εκείνο των στοχαστικών διαδικασιών που ασχολείται με τις κατα τυχαίο τρόπο αφίξεις ή τα τυχαία γεγονότα, που λαμβάνουν χώρα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

> Ορίζουμε ως **διαδικασία** $Poisson$ την τυχαία μεταβλητή $N(t)$, που μετρά τον αριθμό των γεγονότων που λαμβάνουν χώρα στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

- Τα γεγονότα που λαμβάνουν χώρα στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ λέγονται **αφίξεις.**
- T_1 είναι η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει την χρονική περίοδο από την χρονική στιγμή 0 μέχρι να συμβεί το πρώτο γεγονός.
- T_2 είναι η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει την χρονική περίοδο από την χρονική στιγμή 0 μέχρι να συμβεί το δεύτερο γεγονός.
- T_i είναι η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει την χρονική περίοδο από την χρονική στιγμή 0 μέχρι να συμβεί το i γεγονός.
- Οι χρονικές στιγμές t_i, που συμβαίνουν τα γεγονότα, λέγονται **σημεία συμβάντων**.
- Η τυχαία μεταβλητή Z_n, που μετράει την χρονική διάρκεια μεταξύ του $n-1$ και n συμβαντος, λέγεται **ενδιάμεσος χρόνος.**
- Η τυχαία μεταβλητή $W(t)$, που μετράει την χρονική διάρκεια από την χρονική στιγμή t, μέχρι να συμβεί το επόμενο γεγονός, ονομάζεται **χρόνος αναμονής.**

5.2 Βασικές Ιδιότητες

- Η $N(t)$ παίρνει θετικές ακέραιες τιμές.
- $N(0) = 0$
- Για κάθε δύο χρονικές στιγμές s, t έτσι ώστε $0 \leq s < t$, η ποσότητα (τυχαία μεταβλητή) μετράει τον αριθμό των γεγονότων (αφίξεων) που έλαβαν χώρα στο χρονικό διάστημα: $(s, t]$.
- Ισχύει η σχέση: $\boxed{Z_n = T_n - T_{n-1}}$.
- Ισχύει η σχέση:

$$\boxed{T_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}$$

- Για κάθε t, η $N(t)$ έχει την ιδιότητα των *independent increments*, δηλαδή: εαν $0 \le t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές: $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_3) - N(t_2)$, ..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες. Ισοδύναμα, αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των αφίξεων σε ξένα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

- Η $N(t)$ έχει την ιδιότητα των *stationary increments*, δηλαδή: για κάθε $t_2 \ge t_1 \ge 0$, οι τυχαίες μεταβλητές $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_2 - t_1)$ και $N(t_2 + \tau) - N(t_1 + \tau)$, $\tau >$ έχουν την ίδια κατανομή.

5.3 Ο τύπος του *Khinchin* (1955)

$$\boxed{P[N(t) = k] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad \lambda > 0}$$

$$\boxed{E[N(t)] = \lambda t \quad , \quad Var[N(t)] = \lambda t}$$

5.4 Στοιχειώδης Απόδειξη του τύπου του *Khinchin*

Βασική Υπόθεση:

> Αν $\lambda > 0$ είναι η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός στην μονάδα του χρόνου, τότε η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός σε χρονικό διάστημα $\delta > 0$, είναι $\lambda\delta$.

Χωρίζουμε το χρονικό διάστημα $(0, t]$ σε διαστήματα μήκους δ:

$$(0, \delta], (\delta, 2\delta], (2\delta, 3\delta], ...$$

το πλήθος αυτών των διαστημάτων είναι $n = \dfrac{t}{\delta}$.

Σε κάθε τέτοιο διάστημα γίνεται ένα εικονικό πείραμα τύχης, όπου η επιτυχία του ισοδυναμεί με το να συμβεί ένα γεγονός (να έχουμε ¨ άφιξη ¨). Αν το πλάτος του διαστήματος δ, είναι μικρό, τότε μία μόνο άφιξη μπορεί να συμβεί σε αυτό το χρονικό διάστημα με πιθανότητα λδ.

Επομένως, $N(t)$= το πλήθος των επιτυχιών σε $n = t/\delta$ επαναλήψεις του πειράματος, με πιθανότητα επιτυχίας την μία φορά, ίση με λδ. Άρα:

$$N(t) \sim Binomial(n, p) = \mathcal{B}\left(\frac{t}{\delta}, \lambda\delta\right)$$

$$\text{εάν } \delta \to 0 \Rightarrow n = \frac{t}{\delta} \to +\infty \text{ και } np = \frac{t}{\delta}\lambda\delta = t\lambda > 0 \text{ (σταθερό)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(t) \sim \mathcal{P}(t\lambda) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

5.5 Βασικοί Τύποι

Ιδιότητα 5.1 *Έστω $N(t)$ διαδικασία Poisson με παράμετρο λ. Ισχύει ο τύπος:*

$$\boxed{Cov[N(t_1), N(t_2)] = \lambda \min\{t_1, t_2\},\ t_1, t_2 \geq 0}$$

Ιδιότητα 5.2 *Έστω $N(t)$ διαδικασία Poisson με παράμετρο λ. Ισχύει ο τύπος:*

$$\boxed{R_N(t_1, t_2) = \lambda \min\{t_1, t_2\} + \lambda^2 t_1 t_2,\ t_1, t_2 \geq 0}$$

Ιδιότητα 5.3 *Έστω $N(t)$ διαδικασία Poisson με παράμετρο λ. Η ροπογεννήτρια της δίδεται από τον τύπο:*

$$\boxed{M_{\mathcal{P}}(\theta) = e^{\lambda t(e^{\theta}-1)}}$$

Ιδιότητα 5.4 *Έστω $N(t)$ διαδικασία Poisson με παράμετρο λ. Η πιθανογεννήτρια της δίδεται από τον τύπο:*

$$\boxed{P_{\mathcal{P}}(\theta) = e^{\lambda t(\theta-1)}}$$

5.6 Αυστηρός Ορισμός Διαδικασιών *Poisson*

5.6.1 Συνάρτηση $O(\Delta t)$

Το $O(\Delta t)$ είναι μία συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Χρησιμοποιείται για να εκφράσουμε ¨ ασήμαντες ¨ ποσότητες.

5.6.2 Ορισμός Διαδικασίας *Poisson*

Μία στοχαστική διαδικασία $N(t)$, λέγεται στοχαστική διαδικασία *Poisson*, με μέσο λ, αν πληροί τις κάτωθι ιδιότητες:

1. $N(t)$ ακέραιος.
2. $N(t) \geq 0$
3. $N(0) = 0$
4. $N(s) \leq N(t)$ εάν $s \leq t$.
5. $N(t) - N(t) =$ αριθμός γεγονότων, από ένα πιθανόν συμβάν, που λαμβάνουν χώρα το χρονικό διάστημα: $(s, t]$.
6. Η $N(t)$ έχει την ιδιότητα των *independent increments*.
7. Η $N(t)$ έχει την ιδιότητα των *stationary increments*.
8. $P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1] = \lambda \Delta t + O(\Delta t)$
9. $P[N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2] = O(\Delta t)$ (Είναι πρακτικά μηδέν).

5.6.3 Θεωρήματα

Θεώρημα 5.1 *Εάν $N(t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$, με μέσο λ, τότε ισχύει η σχέση:*

$$P[N(t+\Delta t)-N(t)=0]=1-\lambda\Delta t+O(\Delta t)$$

όταν $\Delta t \to 0$.

Απόδειξη: Διαδοχικά έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P[N(t+\Delta t)-N(t)=k]=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[N(t+\Delta t)-N(t)=0]+P[N(t+\Delta t)-N(t)=1]+P[N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2]=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[N(t+\Delta t)-N(t)=0]+\lambda\Delta t+O(\Delta t)+O(\Delta t)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[N(t+\Delta t)-N(t)=0]=1-\lambda\Delta t+O(\Delta t)$$

Θεώρημα 5.2 ***Εάν** $N(t)$ **είναι μία διαδικασία** $Poisson$**, με μέσο** λ **και** $p_n(t)=P[N(t)=n]$**, τότε:***

$$\boxed{p_n(t)=P[N(t)=n]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

Απόδειξη: Θα δουλέψουμε επαγωγικά, υπολογίζοντας πρώτα την $p_0(t)$. Γνωρίζουμε ότι: $p_0(t)=P[N(t)=0]$. Θεωρούμε μία απειροστή μεταβολή του χρόνου Δt και έχουμε:

$$p_0(t+\Delta t)=P[N(t+\Delta t)=0]=P[N(t)=0 \text{ και } N(t+\Delta t)-N(t)=0]=$$

$$=P[N(t)=0]\cdot P[N(t+\Delta t)-N(t)=0]=p_0(t)[1-\lambda\Delta t+O(\Delta t)]$$

Άρα, μετά από πράξεις:

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}=-\lambda p_0(t)+\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}$$

Θεωρώντας ότι $\Delta t \to 0$, η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται στην διαφορική εξίσωση:

$$\boxed{p_0'(t)=-\lambda p_0(t)}$$

Επιλύοντας έχουμε: $p_0(t)=ke^{-\lambda t}$. Αλλά, εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη: $p_0(0)=P[N(0)=0]=1$, θα πάρουμε $k=1$, οπότε τελικά:

$$\boxed{p_0(t)=e^{-\lambda t}}$$

Υπολογίζουμε τώρα την πιθανότητα: $p_n(t)=P[N(t)=n]$. θεωρώντας και πάλι μία απειροστή μεταβολή του χρόνου Δt, έχουμε:

$$p_n(t+\Delta t)=P[N(t+\Delta t)=n]=P[N(t)=n \text{ και } N(t+\Delta t)-N(t)=0]+$$

$$P[N(t)=n-1 \text{ και } N(t+\Delta t)-N(t)=1]+P[N(t)=n-2 \text{ και } N(t+\Delta t)-N(t)=2]+$$

$$+\cdots+P[N(t)=0 \text{ και } N(t+\Delta t)-N(t)=n-1]=$$

$$=P[N(t)=n]\cdot P[N(t+\Delta t)-N(t)=0]+P[N(t)=n-1]\cdot P[N(t+\Delta t)-N(t)=1]+$$

$$+P[N(t)=n-2]\cdot P[N(t+\Delta t)-N(t)=2]+\cdots+P[N(t)=0]\cdot P[N(t+\Delta t)-N(t)=n]=$$

$$=p_n(t)\cdot[1-\lambda\Delta t+O(\Delta t)]+p_{n-1}[\lambda\Delta t+O(\Delta t)]+$$

$$+p_{n-2}O(\Delta t)+p_{n-3}O(\Delta t)+\cdots+p_0O(\Delta t)$$

Επομένως,

$$p_n(t+\Delta t) = p_n(t) - p_n(t)\lambda\Delta t + p_n(t)O(\Delta t) + p_{n-1}\lambda\Delta t + p_{n-1}O(\Delta t) +$$
$$+O(\Delta t)\cdot(p_{n-2}+p_{n-3}+\cdots+p_0)$$

Μεταφέροντας το $p_n(t)$ στο πρώτο μέρος και διαιρώντας με το Δt, έχουμε:

$$\frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{\Delta t} = -\lambda p_n(t) + p_n(t)\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} + p_{n-1}\lambda +$$
$$+p_{n-1}\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t}\cdot(p_{n-2}+p_{n-3}+\cdots+p_0)$$

Παίρνοντας $\Delta t \to 0$, οπότε $\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$, έχουμε οριακά την διαφορική εξίσωση: $p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$ ή

$$\boxed{p_n'(t) + \lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t)}$$

Αυτή είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. Η λύση της ομογενούς είναι: $p_n(t) = ce^{-\lambda t}$. Για να βρούμε μία μερική λύση, θεωρούμε ότι αυτή έχει την μορφή: $M(t) = h(t)e^{-\lambda t}$, όπου $h(t)$ συνάρτηση προς προσδιορισμό. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$M'(t) + \lambda M(t) = \lambda p_{n-1}(t) \Rightarrow h'(t))e^{-\lambda t} + h(t)(-\lambda))e^{-\lambda t} + \lambda h(t))e^{-\lambda t} = \lambda p_{n-1}(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h(t) = \int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt \Rightarrow M(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt$$

Άρα, τελικά, η λυση της εξίσωσης είναι:

$$p_n(t) = ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt$$

Λαμβάνοντας υπόψη την αρχική συνθήκη: $p_n(0) = 0$, για κάθε n, έχουμε:

$$p_n(0) = ce^0 + e^0\int e^0\lambda\cdot 0dt = 0 \Rightarrow c = 0$$

Άρα, η τελική - τελική λύση της εξίσωσης είναι:

$$\boxed{p_n(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt}$$

Για $n = 1$, έχουμε:

$$p_1(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_0(t)dt = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)$$

Για $n = 2$, έχουμε:

$$p_2(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_1(t)dt = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)dt = e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^2}{2!}$$

Για $n = 3$, έχουμε:

$$p_3(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_2(t)dt = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^2}{2!}dt = e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

Για $n - 1$, έχουμε:

$$p_{n-1}(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-2}(t)dt = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}dt = e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Άρα, εν κατακλείδι:

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} \lambda p_{n-1}(t) dt = e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} \lambda e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \Rightarrow$$

$$\boxed{p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

Θεώρημα 5.3 ***Ισχύει η σχέση:*** $O(\Delta t) = \lambda \Delta t (e^{-\lambda \Delta t} - 1)$**.**

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι: $P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1] = \lambda \Delta t + O(\Delta t)$. Για $t = 0$, η σχέση γίνεται: $P[N(\Delta t) - N(0) = 1] = \lambda \Delta t + O(\Delta t)$ και άρα:

$$P[N(\Delta t) = 1] = \lambda \Delta t + O(\Delta t) \Rightarrow e^{-\lambda t} \frac{(\lambda \Delta t)}{1!} = \lambda \Delta t + O(\Delta t) \Rightarrow O(\Delta t) = \lambda \Delta t (e^{-\lambda \Delta t} - 1)$$

Παράδειγμα 5.1 Έστω $N(t)$ **μία διαδικασία** $Poisson$**, με λόγο** λ**. Ορίζουμε:** $p_n(t) = P[N(t) = n]$**. Χρησιμοποιώντας την ΔΕ** $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$ **και κατάλληλες αρχικές συνθήκες, δείξατε ότι:** $p_0(t) = e^{-\lambda t}$**. Χρησιμοποιώντας την ΔΕ:** $p_n'(t) + \lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t)$ **και κατάλληλες αρχικές συνθήκες, δείξατε ότι:** $p_n(t) = e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} \lambda p_{n-1}(t) dt$**.**

Λύση: Η αρχική συνθήκη είναι $p_0(0) = P[N(0) = 0] = 1$. Η ΔΕ γράφεται: $p_0'(t) + \lambda p_0(t) = 0$. Είναι γραμμική ομογενής και άρα $p_0(t) = Ce^{\lambda t}$. Από την αρχική συνθήκη βρίσκουμε ότι: $C = 1$ και άρα $p_0(t) = e^{-\lambda t}$.

Ισχύει ότι $p_1(0) = P[N(0) = 1]$ αλλά, από ιδιότητες $Poisson$, αυτή η πιθανότητα είναι μηδενική, επομένως $p_1(0) = 0$. Ομοίως, $p_2(0) = 0$, $p_3(0) = 0$, ... και γενικά, $p_n(0) = 0$. Αυτή είναι η αρχική συνθήκη που θα χρησιμοποιήσουμε.

Η ΔΕ: $p_n'(t) + \lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t)$ είναι γραμμική πρώτης τάξεως. Η λύση της ομογενούς είναι: $p_n^{hom}(t) = Ce^{-\lambda t}$.

Για να βρούμε μία μερική λύση, θεωρούμε μία άγνωστη συνάρτηση $U(t)$ προς προσδιορισμό, έτσι ώστε η $p_n(t) = U(t)e^{-\lambda t}$ να είναι λύση της ΔΕ. Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$(U(t)e^{-\lambda t})' + \lambda(U(t)e^{-\lambda t}) = \lambda p_{n-1}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U'(t)e^{-\lambda t} - U(t)\lambda e^{-\lambda t} + \lambda(U(t)e^{-\lambda t}) = \lambda p_{n-1}(t) \Rightarrow U(t) = \int e^{\lambda t} \lambda p_{n-1}(t) dt$$

και επομένως η μερική λύση είναι:

$$p_n^{partial}(t) = e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} \lambda p_{n-1}(t) dt$$

και άρα η γενική λύση είναι:

$$p_n(t) = Ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} \lambda p_{n-1}(t) dt$$

Από την αρχική συνθήκη $p_n(0) = 0 = p_{n-1}(0)$, έχουμε:

$$p_n(0) = 0 = Ce^{-\lambda 0} + e^{-\lambda 0} \int e^{\lambda 0} \lambda p_{n-1}(0) dt \Rightarrow 0 = C + 0 \Rightarrow C = 0$$

και η τελική λύση είναι:

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} \lambda p_{n-1}(t) dt$$

5.7 Ενδιάμεσοι Χρόνοι - Χρόνοι Άφιξης

Επαναλαμβάνουμε τους βασικούς ορισμούς.

Ορισμός 5.1 *Η τυχαία μεταβλητή Z_n, που μετράει την χρονική διάρκεια μεταξύ του $n-1$ και του n συμβαντος, λέγεται **ενδιάμεσος χρόνος.***

Ορισμός 5.2 *Η τυχαία μεταβλητή T_i, που μας δίνει την χρονική περίοδο απο την χρονική στιγμή 0 μέχρι να συμβεί το i-γεγονός, ονομάζεται **χρόνος άφιξης**.*

Ορισμός 5.3 *Έστω t μία χρονική στιγμή που δεν συνβαίνει γεγονός. Ο χρόνος $W(t)$ από την στιγμή t, μέχρι να συμβεί το επόμενο γεγονός, ονομάζεται **χρόνος αναμονής**.*

5.7.1 Κατανομές

Θεώρημα 5.4 *Εάν $N(t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$, με λόγο λ, τότε οι τυχαίες μεταβλητές των ενδιαμέσων χρόνων είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Δηλαδή:*

$$Z_i \sim \mathcal{E}(\lambda), \quad i = 1, 2, ...$$

Θεώρημα 5.5 *Εάν $N(t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$, με λόγο λ, τότε οι τυχαίες μεταβλητές των χρόνων άφιξης, $T_1, T_2, ..., T_n$ ακολουθούν την Γάμμα κατανομή με παράμετρο λ. Δηλαδή:*

$$T_n \sim Gamma(n, \lambda), \quad n = 1, 2, ...$$

με

$$E[T_n] = \frac{n}{\lambda} \quad , \quad V[T_n] = \frac{n}{\lambda^2}$$

Θεώρημα 5.6 *Έστω $N(t)$ μία διαδικασία $Poisson$, με λόγο λ. Υποθέτουμε ότι 1 γεγονός συμβαίνει στο διάστημα $(0, t)$. Η τυχαία μεταβλητή T_1 ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, t)$.*

Θεώρημα 5.7 *Εάν $N(t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$, με λόγο λ, τότε οι τυχαίες μεταβλητές των χρόνων αναμονής $W(t)$, είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Δηλαδή:*

$$W(t) \sim \mathcal{E}(\lambda), \quad t > 0$$

5.8 Συγχώνευση-Διάσπαση Διαδικασιών $Poisson$

5.8.1 Συγχώνευση

Έστωσαν $N_1(t), N_2(t)$, δύο στοχαστικές διαδικασίες $Poisson$ με λόγους λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Ορίζουμε την ανέλιξη: $N(t) = N(t_1) + N(t_2)$. Ισχύουν τα εξής:

- $N(0) = 0$
- $N(t) \in \{0, 1, 2, ...\}$
- Η $N(t)$ έχει την ιδιότητα των *independent increments*.
- Η $N(t)$ έχει την ιδιότητα των *stationary increments*.
- Η $N(t)$ είναι στοχαστική ανέλιξη $Poisson$ με λόγο: $\lambda_1 + \lambda_2$, δηλαδή:

$$\boxed{N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_1 t + \lambda_2 t)}$$

Γενικότερα ισχύει:

Θεώρημα 5.8 *Αν $N_1(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_1 t)$, $N_2(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_2 t)$, ..., $N_m(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_m t)$, τότε:*

$$\boxed{N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \cdots N_m(t) \sim \mathcal{P}((\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m)t)}$$

5.8.2 Διάσπαση

Θεώρημα 5.9 *Έστω $N(t)$, μία στοχαστική ανέλιξη $Poisson$ με λόγο λ. Διασπάμε την $N(t)$ σε δύο ανελίξεις $N_1(t), N_2(t)$, ως εξής: Για κάθε άφιξη διεξάγουμε ένα τυχαίο πείραμα με πιθανότητα επιτυχίας p. Εάν έχουμε επιτυχία, η άφιξη αποδίδεται στην ανέλιξη $N_1(t)$, άλλως στην $N_2(t)$. Ισχύουν:*

1. $N_1(t) \sim \mathcal{P}(\lambda p t)$
2. $N_2(t) \sim \mathcal{P}(\lambda q t), q = 1 - p$
3. *Οι $N_1(t), N_2(t)$ είναι ανεξάρτητες.*

Παράδειγμα 5.2 ***Το πλήθος των πελατών ενός μπαρ σε ένα χρονικό διάστημα $[0, t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$, $N(t)$, με λόγο λ. Ενας πελάτης παραγγέλνει ποτό με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες και την ποσότητα $N(t)$. (α) Βρείτε την κατανομή αυτών που παραγγέλνουν και αυτών που δεν παραγγέλνουν. (β) Βρείτε την από κοινού κατανομή. (γ) είναι ανεξάρτητες·***

Λύση: (α) Ορίζουμε $X(t)$ την ανέλιξη, που μετράει αυτούς που παραγγέλνουν και $Y(t)$, αυτούς που δεν παραγγέλνουν. Από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητος έχω:

$$P[X(t) = k] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X(t) = k | N(t) = n] P[N(t) = n]$$

αλλά,

$$P[N(t) = n] = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} \quad , \quad P[X(t) = k | N(t) = n] = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k q^{n-k}$$

αντικαθιστώντας, έχω:

$$P[X(t) = k] = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k q^{n-k} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{p^k q^{n-k} e^{-\mu t} \mu^n n!}{k!(n-k)! n!} =$$

$$= \frac{e^{-\mu t} (\mu p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\mu t q)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\mu t} (\mu p)^k}{k!} e^{\mu t q} = e^{-\mu t p} \frac{(\mu t p)^k}{k!}$$

Επομένως, η $X(t)$ ακολουθεί $Poisson$, με παράμετρο μp και η $Y(t)$ ακολουθεί $Poisson$, με παράμετρο μq.
(β) Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος είναι:

$$P_{XY}[X(t) = i, Y(t) = j] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X(t) = i, Y(t) = j | N(t) = n] P[N(t) = n]$$

αλλά, $P[X(t) = i, Y(t) = j | N(t) = n] = 0$ εάν $n \neq i + j$, οπότε:

$$P_{XY}[X(t) = i, Y(t) = j] = P[X(t) = i, Y(t) = j | N(t) = i + j] P[N(t) = i + j] =$$

$$P[X(t) = i | N(t) = i + j] P[N(t) = i + j] = \left(\begin{array}{c} i + j \\ i \end{array} \right) p^i q^j e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{i+j}}{(i + j)!} =$$

$$= e^{-\mu t} \frac{(\mu t p)^i (\mu t q)^j}{i! j!} = e^{-\mu t p} \frac{(\mu t p)^i}{i!} \cdot e^{-\mu t q} \frac{(\mu t q)^j}{j!} =$$

$$= P[X(t) = i] \cdot P[Y(t) = j]$$

(γ) Από την προηγούμενη σχέση οι $X(t), Y(t)$ είναι ανεξάρτητες.

5.9 Λυμένες Ασκήσεις

5.1 Έστω $N(t)$ **μία διαδικασία** $Poisson$ **με** $\lambda = 0.5$**. Βρείτε την πιθανότητα να μην συμβεί κανένα γεγονός την περίοδο** $(3,5]$ **καθώς και την πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένα γεγονός σε κάθε μία από τις περιόδους:** $(0,1]$**,** $(1,2]$**,** $(2,3]$ **και** $(3,4]$**.**

Λύση: Αν Y είναι η τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το πλήθος των γεγονότων στο χρονικό διάστημα $(3,5]$, τότε:

$$Y \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot 2) = \mathcal{P}(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Y=0) = e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} = 0.37$$

Έστωσαν τώρα Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 οι τυχαίες μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν το πλήθος των γεγονότων σε κάθε ένα από τα χρονικά διαστήματα: $(0,1]$, $(1,2]$, $(2,3]$ και $(3,4]$. Τότε, $Y_i \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot 1)$ και Y_i ανεξάρτητες. Άρα:

$$P[Y_1=1, Y_2=1, Y_3=1, Y_4=1] = P[Y_1=1] \cdot P[Y_2=1] \cdot P[Y_3=1] \cdot P[Y_4=1] =$$

$$= \left(\frac{e^{-0.5} \cdot 0.5^1}{1!}\right)^4 = 0.0085$$

5.2 Έστω ότι η $N(t)$ **είναι μία διαδικασία** $Poisson$ **με λόγο λ. Βρείτε την πιθανότητα να συμβούν 2 γεγονότα την περίοδο** $(0,2]$ **και 3 γεγονότα την περίοδο** $(1,4]$**.**

Λύση: ΠΡΟΣΟΧΗ, ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΧΡΟΝΙΚΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΑΛΛΗΛΟΕΠΙΚΑΛΥΠΤΟΝΤΑΙ.
Έστωσαν X, Y, Z τρεις τυχαίες μεταβλητές που μετράνε το πλήθος των εμφανίσεων στις χρονκές περιόδους: $(0,1]$, $(1,2]$ και $(2,4]$. Ισχύει ότι:

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot 1) \quad , \quad Y \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot 1) \quad , \quad Z \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot 2)$$

Ζητάμε την πιθανότητα: $P[X+Y=2, Y+Z=3]$. Από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητος, έχουμε:

$$P[X+Y=2, Y+Z=3] = P[X=2 \text{ και } Z=3|Y=0]P[Y=0]+$$

$$+P[X=1 \text{ και } Z=2|Y=1]P[Y=1] + P[X=0 \text{ και } Z=1|Y=2]P[Y=2]$$

Επειδή όμως οι τυχαίες μεταβλητές X, Z είναι ανεξάρτητες, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$P[X+Y=2, Y+Z=3] = P(X=2)P(Z=3)P(Y=0)+$$

$$+P(X=1)P(Z=2)P(Y=1) + P(X=0)P(Z=1)P(Y=2) =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-2\lambda} \cdot \frac{(2\lambda)^3}{3!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-2\lambda} \cdot \frac{(2\lambda)^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!}+$$

$$+e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-2\lambda} \cdot \frac{(2\lambda)^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} = e^{-4\lambda}\left(\frac{2}{3}\lambda^5 + 2\lambda^4\right)$$

5.3 Έστω $N(t)$ **μία διαδικασία** $Poisson$ **με παράμετρο λ. Υπολογίσατε την πιθανότητα να έχουμε 10 αφίξεις στο χρονικό διάστημα** $(0,5]$**, δεδομένου ότι στο χρονικό διάστημα** $(0,10]$ **έχουμε 15 αφίξεις.**

Λύση: Ζητάμε την πιθανότητα: $P[N(5)=10|N(10)=15]$. Διαδοχικά έχουμε:

$$P[N(5)=10|N(10)=15] = \frac{P[N(5)=10 \text{ και } N(10)=15]}{N(10=15)} = \frac{P[N(5)=10] \cdot P[N(10)-N(5)=5]}{N(10=15)}$$

Αλλά οι τυχαίες μεταβλητές: $N(10)-N(5)$ και $N(10-5)=N(5)$ έχουν την ίδια κατανομή, επομένως:

$$P[N(5)=10|N(10)=15] = \frac{P[N(5)=10] \cdot P[N(5)=5]}{N(10=15)} =$$

$$= \frac{\frac{e^{-5\lambda}(5\lambda)^{10}}{10!} \cdot \frac{e^{-5\lambda}(5\lambda)^5}{5!}}{\frac{e^{-10\lambda}(10\lambda)^{15}}{15!}} = \frac{5^{10} \cdot 5^5 \cdot 15!}{10^{15} \cdot 10! \cdot 5!} = \frac{3003}{32768} = 0.0916443$$

5.4 Εάν $X(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ και $Y(t) \sim \mathcal{P}(\mu t)$, να δειχθεί ότι:

$$P[X(t)=2|X(t)+Y(t)=4] = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2$$

Λύση: Διαδοχικά έχουμε:

$$P[X(t)=2|X(t)+Y(t)=4] = \frac{P[X(t)=2 \text{ και } X(t)+Y(t)=4]}{P[X(t)+Y(t)=4]} =$$

$$= \frac{P[X(t)=2 \text{ και } Y(t)=2]}{P[X(t)+Y(t)=4]} = \frac{P[X(t)=2]\cdot P[Y(t)=2]}{P[X(t)+Y(t)=4]}$$

αλλά

$$P[X(t)=2] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!} \quad , \quad P[Y(t)=2] = e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^2}{2!}$$

Τώρα, από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε:

$$P[X(t)+Y(t)=4] = \sum_{k=0}^{4} P[X(t)=k]\cdot P[X(t)+Y(t)=4|X(t)=k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{4} P[X(t)=k]\cdot P[Y(t)=4-k] = \sum_{k=0}^{4} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^{4-k}}{(4-k)!} =$$

$$= e^{-\lambda t}e^{-\mu t}\left(\frac{\lambda^4 t^4}{24} + \frac{1}{6}\lambda^3\mu t^4 + \frac{1}{4}\lambda^2\mu^2 t^4 + \frac{1}{6}\lambda\mu^3 t^4 + \frac{\mu^4 t^4}{24}\right) = e^{-\lambda t}e^{-\mu t}\cdot\frac{1}{24}t^4(\lambda+\mu)^4$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\frac{P[X(t)=2]\cdot P[Y(t)=2]}{P[X(t)+Y(t)=4]} = \frac{e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^2}{2!}\cdot e^{-\mu t}\dfrac{(\mu t)^2}{2!}}{e^{-\lambda t}e^{-\mu t}\cdot\dfrac{1}{24}t^4(\lambda+\mu)^4} =$$

$$= \frac{6\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2$$

5.5 Εάν $X(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, βρείτε την πιθανότητα: $P[X(t)=k|X(t)\geq r]$**, όταν** $k=r,r+1,r+2,...$

Λύση: Χρησιμοποιώντας την υπό συνθήκη πιθανότητα, έχουμε:

$$P[X(t)=k|X(t)\geq r] = \frac{P[X(t)=k \text{ και } X(t)\geq r]}{P[X(t)\geq r]}$$

αλλά

$$P[X(t)\geq r] = 1 - P[X(t)<r] = 1 - \sum_{\nu=0}^{r-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!}$$

και

$$P[X(t)=k \text{ και } X(t)\geq r] = P[X(t)=k] = e^{\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

αντικαθιστώντας έχουμε τελικά:

$$P[X(t)=k|X(t)\geq r] = \frac{\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}}{e^{\lambda t} - \displaystyle\sum_{\nu=0}^{r-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!}}$$

5.6 Αυτοκίνητα φθάνουν κάπου ακολουθώντας μία διαδικασία $Poisson$ με $\lambda = 2|$ώρα. Ο αριθμός των επιβατών τους είναι τυχαία μεταβλητή Y με $Y = 1, 2, 3, 4$ και αντίστοιχες πιθανότητες: $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$, $p_3 = 1/4$, $p_4 = 0$. Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός επιβατών που θα αφιχθούν από την 8η πρωϊνή έως και την 12η, καθώς και η διακύμανση του.

Λύση: Ο αριθμός των επιβατών δίνεται από την τυχαία μεταβλητή:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

Όπου N_t τυχαία μεταβλητή, εκφράζουσα το πλήθος των αυτοκινήτων που αφικνούται στο χρονικό διάστημα $(0, t]$. Δηλαδή, έχουμε άθροισμα όπου το πλήθος των προσθετέων είναι τυχαία μεταβλητή. Άρα,

$$E(X_t) = E(N_t) \cdot E(Y_i) = E(N_t) \cdot \mu$$

Αλλά, $N_t \sim \mathcal{P}(2t)$, άρα η μέση τιμή αφίξεων αυτοκινήτων στο χρονικό διάστημα από 8 έως 12, είναι $E(N_t) = 2 \cdot 4 = 8$. Ακόμα, μ είναι η μέση τιμή των επιβατών, άρα:

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot 0 = 1.75$$

και τελικά: $E(X_t) = 8 \cdot 1.75 = 14$.
Για την διακύμανση ισχύει ο τύπος: $V(X_t) = E(N_t) \cdot \sigma^2 + \mu^2 V(N_t)$. Επειδή $N_t \sim \mathcal{P}(2t) \Rightarrow Var(N_t) = 2 \cdot 4 = 8$ και

$$\sigma^2 = Var(Y_i) = E(Y_i^2) - E^2(Y_i) =$$
$$= 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot 0 - (1.75)^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}$$

Τελικά:

$$Var(X_t) = 8 \cdot \frac{11}{16} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 \cdot 8 = 30$$

5.7 Ο αριθμός των απαιτήσεων που εγείρονται σε ένα χαρτοφυλάκιο, σε μία χρονική περίοδο t, ακολουθούν μια διαδικασία $Poisson$ με $\lambda = 12|$εβδομάδα. Ένα ποσοστό $p = 0.2$ των απαιτήσεων του είναι τύπου Α και οι υπόλοιπες τύπου Β.

1. **Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρξουν το πολύ 2 απαιτήσεις τύπου Α σε διάστημα (α) μιας εβδομάδος (β) ενός μηνός.**

2. **Να βρεθεί ο αναμενόμενος μέσος αριθμός απαιτήσεων τύπου Β, σε μία εβδομάδα.**

Λύση: Συμβολίζουμε:

- $N(t) =$ ο αριθμός των απαιτήσεων στο χρονικό διάστημα $[0, t)$.
- $X(t) =$ ο αριθμός των απαιτήσεων τύπου Α, στο χρονικό διάστημα $[0, t)$.

Ζητάμε την πιθανότητα να έχουμε x απαιτήσεις τύπου Α, στο χρονικό διάστημα $[0, t)$. Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητος έχουμε:

$$P[X(t) = x] = \sum_{\nu=0}^{\infty} P[X(t) = x | N(t) = \nu] \cdot P[N(t) = \nu]$$

αλλά

$$P[X(t) = x | N(t) = \nu] = \begin{cases} 0 & \text{για} \quad \nu < x \\ \begin{pmatrix} \nu \\ x \end{pmatrix} p^x q^{\nu - x} & \text{για} \quad \nu \geq x \end{cases}$$

επομένως, διαδοχικά έχουμε:

$$P[X(t)=x]=\sum_{\nu=0}^{\infty}P[X(t)=x|N(t)=\nu]\cdot P[N(t)=\nu]=\sum_{\nu=x}^{\infty}P[X(t)=x|N(t)=\nu]\cdot P[N(t)=\nu]=$$

$$=\sum_{\nu=x}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\nu\\ x\end{array}\right)p^{x}q^{\nu-x}\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\nu}}{\nu!}=\sum_{\nu=x}^{\infty}\frac{\nu!}{x!(\nu-x)!}p^{x}q^{\nu}q^{-x}\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\nu}}{\nu!}=$$

$$=\frac{p^{x}q^{-x}e^{-\lambda t}(q\lambda t)^{x}}{x!}\sum_{\nu=x}^{\infty}\frac{(q\lambda t)^{\nu-x}}{(\nu-x)!}=\frac{(p\lambda t)^{x}}{x!}e^{q\lambda t-\lambda t}=$$

$$\boxed{=\frac{(p\lambda t)^{x}}{x!}e^{-p\lambda t}}$$

Για $p=0.2$ και $\lambda=12$ και t να μετράει εβδομάδες, έχουμε:

$$P[X(t)=x]=e^{-12\cdot 0.2\cdot t}\frac{(2.4t)^{x}}{x!}$$

Επομένως, για να απαντήσουμε στο ερώτημα (1.α), θέτουμε $t=1$:

$$P[X(1)\leq 2]=P[X(1)=0]+P[X(1)=1]+P[X(1)=2]=0.57$$

Για το ερώτημα (1.β), θέτουμε $t=4.3$ και έχουμε:

$$P[X(4.3)\leq 2]=P[X(4.3)=0]+P[X(4.3)=1]+P[X(4.3)=2]=0.21$$

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα 2, θέτουμε $Z(t)=N(t)-X(t)$ μία τυχαία μεταβλητή, που μετρά τις απαιτήσεις τύπου Β και έχουμε:

$$E[Z(t)]=E[N(t)]-E[X(t)]=\lambda t-\lambda tp=\lambda tq$$

$$\Rightarrow E[Z(1)]=E[N(1)-X(1)]=12\cdot 1\cdot(1-0.2)=9.6$$

5.8 ***Έστω*** $N(t)$ ***μία διαδικασία*** $Poisson$ ***με παράμετρο λ. Υπολογίσατε την συνδιακύμανση*** $Cov[N(t_1),N(t_2)]$**,** $t_1,t_2\geq 0$**.**

Λύση: Ας υποθέσουμε ότι: $t_1\geq t_2\geq 0$. Οι τυχαίες μεταβλητές $N(t_1)-N(t_2)$ και $N(t_2)$ είναι ανεξάρτητες, άρα διαδοχικά έχουμε:

$$Cov[N(t_1),N(t_2)]=Cov[N(t_1)-N(t_2)+N(t_2),N(t_2)]=$$

$$=Cov[N(t_1)-N(t_2),N(t_2)]+Cov[N(t_2),N(t_2)]=0+Cov[N(t_2),N(t_2)]=$$

$$=Var[N(t_2)]=\lambda t_2$$

Αν $t_2\geq t_1\geq 0$ ομοίως καταλήγουμε ότι: $Cov[N(t_1),N(t_2)]=\lambda t_1$, άρα τελικά:

$$Cov[N(t_1),N(t_2)]=\lambda\min\{t_1,t_2\}$$

5.9 ***Υπολογίσατε την ροπογεννήτρια και την πιθανογεννήτρια της διαδικασίας*** $Poisson$**,** $\mathcal{P}(\lambda t)$**.**

Λύση: Διαδοχικά έχουμε:

$$M_{\mathcal{P}}(\theta)=E(e^{\theta N(t)})=\sum_{k=0}^{\infty}e^{\theta t}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k}}{k!}=$$

$$=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{\theta}\lambda t)^{k}}{k!}=e^{-\lambda t}\cdot e^{e^{\theta}\lambda t}=e^{\lambda t(e^{\theta}-1)}$$

Για να βρούμε την πιθανογεννήτρια αντικαθιστούμε στην ροπογεννήτρια, όπου θ το $\ln\theta$ και έχουμε:

$$P_{\mathcal{P}}(\theta)=M_{\mathcal{P}}(\ln\theta)=e^{\lambda t(e^{\ln\theta}-1)}=e^{\lambda t(\theta-1)}$$

5.10 Έστω οτι η $X(t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$ με λόγο λ και οτι η $Y(t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$ με λόγο μ. Δείξατε ότι:

$$P[X(t)=k|X(t)+Y(t)=n]=\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

Λύση: Από ΘΟΠ έχουμε:

$$P[X(t)+y(t)=n]=\sum_{k=0}^{n}P[X(t)=k]P[X(t)+Y(t)=n|X(t)=k]$$

και επειδή $X(t), Y(t)$ ανεξάρτητες, έχουμε:

$$P[X(t)+y(t)=n]=\sum_{k=0}^{n}P[X(t)=k]P[Y(t)=n-k]=$$

$$=e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot\frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!}=e^{-(\lambda+\mu)t}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\lambda^k\mu^{n-k}=$$

$$=e^{-(\lambda+\mu)t}\frac{[(\lambda+\mu)t]^n}{n!},\qquad n=0,1,2,...$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον βασικό τύπο του $Newton$:

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)A^kB^{n-k}$$

Διαδοχικά τώρα έχουμε:

$$P[X(t)=k|X(t)+Y(t)=n]=\frac{P[X(t)=k,X(t)+Y(t)=n]}{P[X(t)+y(t)=n]}=$$

$$=\frac{P[X(t)=k]P[Y(t)=n-k]}{P[X(t)+y(t)=n]}=\frac{e^{-(\lambda)t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\mu t}\dfrac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)t}\dfrac{[(\lambda+\mu)t]^n}{n!}}=$$

$$=\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

5.11 Έστω οτι η $X(t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$ με λόγο λ και οτι η $Y(t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$ με λόγο μ. Δείξατε, χρησιμοποιώντας πιθανογεννήτριες, ότι η μέση τιμή της $X(t)-Y(t)$ είναι $t(\lambda-\mu)$ και η διασπορά: $(\lambda+\mu)t$.

Λύση: Η ροπογεννήτρια της ανέλιξης $Poisson$ είναι: $M(\theta)=e^{\lambda t(e^\theta-1)}$, επομένως η πιθανογεννήτρια είναι: $P(\theta)=M(\ln\theta)=e^{\lambda t(\theta-1)}$. Άρα, η πιθανογεννήτρια της $Z(t)=X(t)-Y(t)$ είναι:

$$P=P_{X-Y}(\theta)=P_X(\theta)\cdot P_{-Y}(\theta)=E[\theta^{X(t)}]\cdot E[(\theta^{-1})^{Y(t)}]=$$

$$=e^{\lambda t(\theta-1)}e^{\mu t(\theta^{-1}-1)}=e^{-t(\lambda+\mu)+t(\lambda\theta+\mu\theta^{-1})}$$

Έχουμε τώρα:

$$E[Z(t)=X(t)-Y(t)]=\left.\frac{dP}{d\theta}\right|_{\theta=1}=t(\lambda-\mu)$$

και

$$Var[Z(t)]=E[Z^2(t)]-E^2[Z(t)]=E[Z(t)(Z(t)-1)+Z(t)]-E^2[Z(t)]=$$

$$=E[Z(t)(Z(t)-1)]+E[Z(t)]-E^2[Z(t)]$$

αλλά,

$$E[Z(t)(Z(t)-1)] = \left.\frac{d^2P}{d\theta^2}\right|_{\theta=1} = (\lambda-\mu)^2t^2 + 2\mu t$$

οπότε τελικά:

$$Var[Z(t)] = [(\lambda-\mu)^2t^2 + 2\mu t] + t(\lambda-\mu) - t^2(\lambda-\mu)^2 = (\lambda+\mu)t$$

5.12 Έστω $N(t)$ μία διαδικασία $Poisson$, με λόγο λ. Δείξατε ότι:

$$R_N(t_1,t_2) = \lambda\min\{t_1,t_2\} + \lambda^2t_1t_2$$

όπου $R_N(t_1,t_2)$ η αυτοσυσχέτιση ($autocorellation$),της διαδικασίας.

Λύση:

$$R_N(t_1,t_2) = Cov[N(t_1),N(t_2)] + E[N(t_1)]E[N(t_2)] =$$
$$= \lambda\min\{t_1,t_2\} + \lambda^2t_1t_2$$

5.13 Υποθέτουμε ότι κάποια ΚΑΚΑ γεγονότα, τα οποία μπορούν καταστρέψουν ένα σύστημα, ακολουθούν μία ανέλιξη $Poisson$ με λ=3/ώρα. Για την προστασία του συστήματος υπάρχει ένας ΦΥΛΑΚΑΣ. Ο ΦΥΛΑΚΑΣ πρέπει να αποσυρθεί από το σύστημα για 10 λεπτά, προκειμένου να επισκευασθεί. (α) Αν ένα ΚΑΚΟ γεγονός αρκεί για να καταστρέψει το σύστημα, βρείτε την πιθανότητα να καταρρεύσει το σύστημα. (β) Αν το σύστημα αντέχει ένα ΚΑΚΟ γεγονός αλλά καταρρέει με δύο, βρείτε την πιθανότητα καταστροφής του συστήματος.

Λύση: (α) Το ερώτημα είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα να συμβεί ένα τουλάχιστον κακό γεγονός μέσα σε 10 λεπτά. Δηλαδή,

$$P[N(1/6)\geq 1] = 1 - P[N(1/6)<1] = 1 - P[N(1/6)=0] =$$
$$= 1 - e^{-3\cdot\frac{1}{6}}\frac{(3\cdot\frac{1}{6})^0}{0!} = 1 - e^{-1/2} = 0.393469$$

(β) Το ερώτημα είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα να συμβούν δύο τουλάχιστον κακά γεγονότα μέσα σε 10 λεπτά. Δηλαδή,

$$P[N(1/6)\geq 2] = 1 - P[N(1/6)<2] = 1 - P[N(1/6)=0] - P[N(1/6)=1] =$$
$$= 1 - e^{-3\cdot\frac{1}{6}}\frac{(3\cdot\frac{1}{6})^0}{0!} - e^{-3\cdot\frac{1}{6}}\frac{(3\cdot\frac{1}{6})^1}{1!} = 1 - \frac{3}{2}e^{-1/2} = 0.090204$$

5.14 Οι ασθενείς που φθάνουν σε ένα νοσοκομείοακολουθούν την ανέλιξη $Poisson$ με $\lambda = 1/10$ ανά λεπτό. Ο ιατρός δεν βλέπει έναν ασθενή μέχρι να περιμένουν 3 τουλάχιστον ασθενείς.
(α) Βρείτε τον μέσο χρόνο αναμονής μέχρι ο ιατρός να δεχθεί τον πρώτο ασθενή.
(β) Ποια είναι η πιθανότητα να μην δει ο ιατρός ασθενή την πρώτη ώρα;

Λύση: (α) Έστω T_3 ο χρόνος άφιξης του τρίτου ασθενούς. Ζητάμε $E(T_3)$. Έχουμε:

$$E(T_3) = E(Z_1+Z_2+Z_3) = E(Z_1)+E(Z_2)+E(Z_3) = 3\cdot\frac{1}{\lambda} = 3\cdot 10 = 30$$

(β) Έστω p η πιθανότητα να μην βλεέπι κανέναν ο ιατρός την πρώτη ώρα. Έχουμε:

$$p = P[N(60)-N(0)\leq 2] =$$
$$= P[N(60)-N(0)=0] + P[N(60)-N(0)=1] + P[N(60)-N(0)=2] =$$
$$= e^{-60/10} + e^{-60/10}\cdot\frac{60}{10} + e^{-60/10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{60}{10}\right)^2 = 0.062$$

5.15 Έστωσαν $X(t)$, $Y(t)$ ανελίξεις $Poisson$, με λόγους λ_X, λ_Y αντίστοιχα. Να βρεθεί η πιθανότητα το πρώτο γεγονός της διαδικασίας $X(t)$ να συμβεί πριν από το πρώτο γεγονός της $Y(t)$.

Λύση: Ορίζουμε:

- $Z_{X,1}$ μία τυχαία μεταβλητή που μετρά που μετρά τον χρόνο μέχρι την εμφάνιση του πρώτου γεγονότος της $X(t)$.
- $Z_{Y,1}$ μία τυχαία μεταβλητή που μετρά που μετρά τον χρόνο μέχρι την εμφάνιση του πρώτου γεγονότος της $Y(t)$.

Οι τυχαίες αυτές μεταβλητές ακολουθούν εκθετικές κατανομές με παραμέτρους λ_X, λ_Y. Η τυχαία μεταβλητή $Z_{Y,1}$, μπορεί να λάβει άπειρες τιμές. Με την χρήση του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητος έχουμε:

$$P[Z_{X,1} < Z_{Y,1}] = \int_0^{+\infty} P[Z_{X,1} < Z_{Y,1} | Z_{Y,1} = y] \cdot P[Z_{Y,1} = y] =$$

$$= \int_0^{+\infty} P[Z_{X,1} < Z_{Y,1} | Z_{Y,1} = y] \cdot \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} P[Z_{X,1} < y] \cdot \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} dy = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda_X y}) \cdot \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} dy - \lambda_Y \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_X + \lambda_Y) y} dy = \frac{\lambda_Y}{\lambda_X + \lambda_Y}$$

5.16 Έστω ανέλιξη $Poisson$ με λόγο $\lambda = 0.5$. Βρείτε την πιθανότητα το 10ο γεγονός να συμβεί μετά την 20η χρονική στιγμή.

Λύση: Με T_{10} συμβολίζουμε την τυχαία μεταβλητή, του πότε θα συμβεί το 10ο γεγονός, θέλουμε $P(T_{10} > 20)$. Η T_{10} ακολουθεί την κατανομή $Erlang$. Έχουμε:

$$P(T_{10} > 20) = \int_{20}^{+\infty} \lambda^{10} \frac{t^9}{9!} e^{-\lambda t} dt = 0.457931 \qquad , \qquad \lambda = 0.5$$

Ισοδύναμα, η πιθανότητα $P(T_{10} > 20)$ είναι ίδια με την $P[N(20) < 10]$, χρησιμοποιώντας την ανέλιξη $Poisson$, έχουμε:

$$P[N(20) < 10] = \sum_{j=0}^{9} e^{-20\lambda} \frac{(20\lambda)^j}{9!} 0.457931 \qquad , \qquad \lambda = 0.5$$

5.17 Αποδείξατε το θεώρημα: 5.4

Λύση: Θα δουλέψουμε επαγωγικά. Έστω Z_1 ο ενδιάμεσος χρόνος μέχρι το πρώτο γεγονός. Η πιθανότητα $P(Z_1 > t)$ είναι ίση με την πιθανότητα: $P($ κανένα γεγονός στο $(0, t])$, επομένως:

$$P(Z_1 > t) = P[N(t) = 0] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

Άρα, για την αθροιστική κατανομή της Z_1 έχουμε:

$$F_{Z_1}(t) = P[Z_1 \le t] = 1 - P[Z_1 > t] = \begin{cases} 1 - e^{\lambda t}, & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

Δηλαδή, η Z_1 ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.
Έστω τώρα, Z_2 ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ του 1ου και του 2ου γεγονότος. Έστω ακόμα t, μία τυχαία χρονική στιγμή. Η πιθανότητα $P(Z_2 > t)$ είναι ίση με την πιθανότητα το πρώτο γεγονός να έχει συμβεί στο χρονικό διάστημα $(0, s]$ και στο διάστημα $(s, s+t]$ να μηνέχει συμβεί γεγονός, δηλαδή με την πιθανότητα: $P[$ καμμία άφιξη στο $(s, s+t] | Z_1 = s]$. Αλλά, λόγω της ιδιότητος των $independent\ increments$, έχουμε:

$$P[\text{ καμμία άφιξη στο } (s, s+t] | Z_1 = s] = P[\text{ καμμία άφιξη στο } (s, s+t]] =$$

$$P[N(t+s)-N(s)=0]=P[N(t+s-s)=0]=P[N(t)=0]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!}=e^{-\lambda t}$$

Άρα, για την αθροιστική κατανομή της Z_2 έχουμε:

$$F_{Z_2}(t)=P[Z_2\leq t]=1-P[Z_2>t]=\begin{cases}1-e^{\lambda t}, & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$$

Δηλαδή, η Z_2 ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.
Ομοίως αποδεικνύεται για την Z_i, $i=3,4,5,....$, ότι ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.
Παραλλαγή απόδειξης. Για να δείξουμε ότι η Z_2 ακολουθεί την εκθετική κατανομή, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

$$P(Z_2>t)=\int_{-\infty}^{+\infty}P[Z_2>t|Z_1=\tau]f_1(\tau)d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}P[N(t+\tau)-N(\tau)=0]f_1(\tau)d\tau=$$

$$=e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)d\tau=e^{-\lambda t}\cdot 1=e^{-\lambda t}$$

όπου $f_1(\tau)$, η συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος της Z_1. Η απόδειξη συνεχίζει όπως πριν.

5.18 Αποδείξατε το θεώρημα 5.5.

Λύση: Θα υπολογίσουμε την αθροιστική κατανμομή της τυχαίας μεταβλητής: T_n. Έστω t μία αυθαίρετη χρονική στιγμή. Διαδοχικά έχουμε:

$$F(t)=P(T_n\leq t)=P[N(t)\geq n]=\sum_{i=n}^{\infty}P[N(t)=i]=\sum_{i=n}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

Πράγματι, $T_n\leq t$ σημαίνει ότι το n-ιοστό γεγονός συμβαίνει πρίν την χρονική στιγμή t, άρα, μέσα στο διάστημα $(0,t]$ συμβαίνουν περισσότερα από n γεγονότα. Για να βρούμε την συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος, παραγωγίζουμε και έχουμε:

$$f(t)=F'(t)=\sum_{i=n}^{\infty}\left[-\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}+e^{-\lambda t}\frac{\lambda(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}\right]=$$

$$=\left[-\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}+e^{-\lambda t}\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]+\left[-\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}+e^{-\lambda t}\frac{\lambda(\lambda t)^n}{(n)!}\right]+\cdots$$

$$\cdots+\left[-\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+2}}{(n+2)!}+e^{-\lambda t}\frac{\lambda(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]+\cdots=$$

$$=-\lambda e^{-\lambda t}\frac{\lambda^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}=\lambda^n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$$

η οποία είναι η συν.π.π. της Γάμμα κατανομής ή της κατανομής $Erlang$.
Επίσης $T_n=Z_1+Z_2+\cdots+Z_n$ με $Z_i\sim Exp(\lambda)$, άρα:

$$E(T_n)=nE(Z_i)=\frac{n}{\lambda}\quad,\quad V(T_n)=nV(X_i)=\frac{n}{\lambda^2}$$

5.19 Αποδείξατε το θεώρημα 5.7.

Λύση: Έστω ότι το n-οστό γεγονός συμβαίνει την χρονική στιγμή t_n και το $n-1$-οστό γεγονός την χρονική στιγμή s. Προφανώς $Z_n = t_n - s$. Έστω t μία χρονική στιγμή ανάμεσα στην s και την t_n, αυτή την χρονική στιγμή δεν συμβαίνει κανένα γεγονός, επομένως $W(t) = t_n - t$. Ισχύει:

$$t_n - t = t_n - s + s - t = t_n - s - (t - s) \Rightarrow W(t) = Z_n - (t - s)$$

Για να βρούμε την αθροιστική κατανομή της $W(t)$ θεωρούμε σταθερή ποσότητα τ και υπολογίζουμε:

$$F_W(\tau) = P[W(t) \leq \tau] = 1 - P[W(t) > \tau]$$

Αλλά, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση,

$$W(t) > \tau \Rightarrow Z_n - (t - s) > \tau \Rightarrow Z_n > t - s + \tau$$

Επομένως,

$$P[W(t) > \tau] = P[Z_n > t - s + \tau | Z_n > t - s] =$$

$$= \frac{P[Z_n > t - s + \tau \cap Z_n > t - s]}{P[Z_n > t - s]} = \frac{P[Z_n > t - s + \tau]}{P[Z_n > t - s]}$$

Το Z_n ακολουθεί την εκθετική κατανομή, επομένως:

$$\frac{P[Z_n > t - s + \tau]}{P[Z_n > t - s]} = \frac{e^{-\lambda(t-s+\tau)}}{e^{-\lambda(t-s)}} = e^{-\lambda\tau} \Rightarrow F_W(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

Επομένως η $W(t)$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

5.20 Αποδείξατε το θεώρημα 5.6.

Λύση: Θα προσδιορίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της T_1. Έχουμε:

$$F_{T_1}(\tau) = P[T_1 \leq \tau] = P[T_1 \leq \tau | X(t) = 1] =$$

$$= \frac{P[T_1 \leq \tau \text{ και } X(t) = 1]}{P[X(t) = 1]} = \frac{P[X(\tau) = 1 \text{ και } X(t) - X(\tau) = 0]}{P[X(t) = 1]} =$$

$$= \frac{\lambda\tau e^{-\lambda\tau} e^{-\lambda(t-\tau)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{\tau}{t}$$

Αυτή είναι, αφού t σταθερό, η αθροιστική κατανομή της ομοιόμορφης κατανομής.

5.10 Ασκήσεις για Λύση

5.21 Έστω $N(t)$ μια διαδικασία Poisson, με $\lambda = 0.5$. Να βρείτε την πιθανότητα να συμβεί ένα ακριβώς γεγονός την περίοδο $(1, 4]$ και να συμβούν 2 ακριβώς γεγονότα σε κάθε μία από τις περιόδους $(0, 2], (3, 6], (6, 7]$.

5.22 Έστω ότι η $N(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson, με λόγολ. Να βρεθεί η πιθανότητα να συμβούν 2 γεγονότα την περίοδο $(0, 2]$ και 3 την περίοδο $(1, 4]$.

5.23 Έστω ότι η $N(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson, με λόγο λ. Βρείτε την πιθανότητα να συμβούν 2 γεγονότα την περίοδο $(1, 4]$ και 3 την περίοδο $(3, 5]$.

5.24 Έστω ότι η $X(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson με λόγο λ και ότι η $Y(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson, με λόγο μ. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση,

$$P[X(t) = k | X(t) + Y(t) = \nu] = \binom{\nu}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{\nu - k}$$

5.25 Έστω $N(t)$ **μία διαδικασία** $Poisson$ **με παράμετρο λ. Να δειχθεί ότι:**

$$P[N(s)=k|N(t)=\nu]=\left(\begin{array}{c}\nu\\k\end{array}\right)\left(\frac{s}{t}\right)\left(1-\frac{s}{t}\right)^{\nu-k}$$

για $t>s$ **και** $\nu\geq k$**.**

5.26 Έστω $N(t)$ **μια στοχαστική διαδικασία Poisson με** $\lambda=1$**. Βρείτε την πιθανότητα να έχουμε 2 γεγονότα στο χρονικό διάστημα** $(0,2]$ **και 1 γεγονός στο διάστημα** $(1,3]$**.**

5.27 Έστω $N(t)$ **μια στοχαστική ανέλιξη Poisson. Να βρείτε την πιθανότητα,**

$$P[N(4)=2|N(6)=3]$$

5.28 Εάν $X(t)\sim\mathcal{P}(\lambda t)$**, βρείτε την πιθανότητα:** $P[X(t)=k|X(t)\leq s]$**, όταν** $k=s,s-1,s-2,...$

5.29 Το πλήθος των πελατών σε μια επιχείρηση υγειονομικού ενδιαφέροντος σε ένα χρονικό διάστημα $[0,t)$ **είναι μια διαδικασία Poisson,** $N(t)$ **με λόγο** λ**. Ένας από τους πελάτες πραγματοποιεί μια παραγγελία για ένα αναψυκτικό με πιθανότητα** p**, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες και την ποσότητα** $N(t)$**. Να βρείτε:**

(α΄) την κατανομή αυτών που πραγματοποιούν παραγγελίες και αυτών που δεν πραγματοποιούν παραγγελίες,

(β΄) την από κοινού κατανομή

(γ΄) και ότι είναι ανεξάρτητες.

Κεφάλαιο 6

Στοχαστικός Λογισμός - Stochastic Calculus

Η τυχαιότητα που εμπεριέχεται στη Μαθηματική και Χρηματοοικονομική επιστήμη, μας οδηγεί στο να καταλάβουμε ότι τα βασικά μαθηματικά εργαλεία των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών θα είναι τεχνικές της θεωρίας πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασιών. Έτσι η έννοια της πιθανότητας, της μέσης τιμής και της διακύμανσης, θα είναι σε καθημερινή χρήση στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά. Φυσικά αυτό δεν είναι αρκετό οπότε θα χρησιμοποιήσουμε συχνά και πιο προχωρημένες έννοιες όπως π.χ. την κίνηση Brown, το στοχαστικό ολοκλήρωμα, τις διαδικασίες Ito και τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Θα θέλαμε να σημειώσουμε εδώ την αμφίδρομη σχέση των Μαθηματικών και των Χρηματοοικονομικών. Οι αυστηρές μαθηματικές τεχνικές της θεωρίας πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασιών μπορεί να παρέχουν ιδιαίτερα ικανοποιητικούς τρόπους για την ποιοτική και ποσοτική αντιμετώπιση σημαντικών πρακτικών προβλημάτων όπως π.χ. την βέλτιστη επιλογή χαρτοφυλακίου ή την αποτίμηση παράγωγων συμβολαίων. Από την άλλη όμως, η εμφάνιση καινούργιων πρακτικών προβλημάτων από τον οικονομικό κόσμο, δημιουργεί την ανάγκη καινούριων μαθηματικών τεχνικών για την αντιμετώπιση τους, οπότε και οδηγεί στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης. Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα, όπου καινούργια μαθηματικά δημιουργήθηκαν για να αντιμετωπιστούν συγκεκριμένα προβλήματα των Χρηματοοικονομικών ή γενικότερα των Οικονομικών.

6.1 Κίνηση BROWN

Ο θεμέλιος λίθος των συνεχών στοχαστικών υποδειγμάτων είναι η κίνηση Brown. Η στοχαστική αυτή διαδικασία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και αποτελεί έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, όσον αφορά τα υποδείγματα σε συνεχή χρόνο. Για να υφίσταται μια κίνηση Brown ή Wiener, όπου $B(t)$ ή B_t τυχαίες μεταβλητές και $t \geq 0$, θα πρέπει να ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες :

1. $B(0) = 0$.
2. $B(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση,όπου $t \geq 0$.
3. Ανεξάρτητες προσαυξήσεις,από τις οποίες συμπεραίνουμε ότι οι κινήσεις Brown $\Big[B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n)\Big]$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (Independent Increment).

$$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n \leftrightarrow B(t_4) - B(t_3)$$

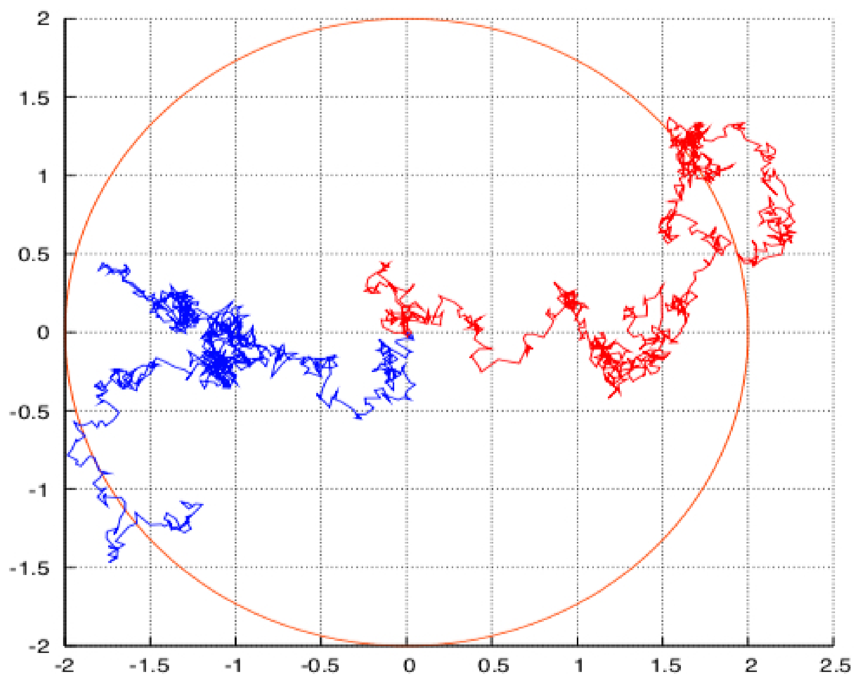
$$B(t_4) - B(t_3), B(t_2) - B(t_1)$$

4. Αν $0 < t < S \rightarrow B(S) - B(t)$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο (Stationary Increment).
5. $B(t) \sim N(0, t) \leftrightarrow B(t_2) - B(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1) \leftrightarrow B(t + n) - B(t) \sim N(0, n)$, όπου από αυτή την ιδιότητα συμπεραίνουμε ότι η μέση τιμή μιας κίνηση Brown είναι πάντα 0.

Η κίνηση Brown ($B(t)$) καλείται και **θόρυβος** ή **λευκός θόρυβος** και έχει τις κάτωθι ιδιότητες:

1. Η τετραγωνική προσδοκώμενη τιμή μιας κίνησης Brown είναι $E[B^2(t)] = t$.
2. Η προσδοκώμενη τιμή των τετραγωνικών μεταβολών μιας κίνησης Brown δίνεται από τον τύπο $E[\Delta B^2(t)] = t$.
3. Η ροπογεννήτρια της είναι $M_B(\theta) = e^{\theta^2 t/2}$.
4. $P[B(t) \leq \alpha] = \Phi\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt(t)}\right)$, όπου αν $\mu = 0$ και αν $\sigma = 1$ (αν δηλαδή $x \sim N(0,1)$), τότε λέμε ότι η μεταβλητή x ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή (standard normal distribution). Επομένως, η συνάρτηση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής είναι $\Phi(z) = P(-\infty < Z < x) = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$.
5. Η κίνηση Brown είναι μία συνάρτηση η οποία είναι μεν συνεχής ως προς t, αλλά δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη ως προς t.

Στο παρακάτω σχήμα, σας παρουσιάζουμε μία δισδιάστατη μορφή της κίνησης Brown.



6.1.1 Στοχαστικό Ολοκληρωμα

Ως στοχαστικό ολοκλήρωμα ορίζουμε ένα άπειρο άθροισμα τυχαίων τιμών, οι οποίες τιμές επιλέγονται με τυχαίο τρόπο. Μια χαρακτηριστική χρήση του στοχαστικού ολοκληρώματος στα χρηματοοικονομικά, είναι ότι το γινόμενο μπορεί να μας δείξει πόσα θα εισπράξει μια οικονομική οντότητα σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t. Ο τύπος του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι:

$$I(f) = \int_0^T f(t, \omega) dB(t)$$

,όπου f είναι μια τυχαία μεταβλητή, $dB(t)$ είναι μία κίνηση Brown και ω είναι ένας τυχαίος αριθμός, δηλαδή μια τυχαία μεταβλητή. Οι ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι οι κάτωθι:

1. $I(f)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή,

2. $I(T)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή,
3. $E[I(f)] = 0$,
4. $V[I(f)] = \int_0^T E[f^2]dt$,
5. η τυχαία μεταβλητή $I(T)$ είναι ένα martingale, συνεπώς θα ισχύει η σχέση,
$$E[I(T)|\mathcal{F}(s)] = I(s)$$
6. $E[I(f)I(g)] = \int_0^T E[fg]dt$ (ιδιότητα γινομένου),
7. $E[I^2] = \int_0^T [f^2]dt$
8. και εάν ισχύει η σχέση $I(t) = \int_0^t p(s)dB(t)$, τότε το $p(s)$ δεν είναι μια τυχαία μεταβλητή, καθώς και το ολοκλήρωμα αυτό ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση $V[I(t)]$.

Παρατηρήσεις 6.1

1. *Ένα απλό μαθηματικό ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως διαφορικό, δηλαδή,*
$$G(x) = \int_0^x f(t)dt \leftrightarrow \frac{dG}{dx} = f(x) \leftrightarrow dG = f(x)dx$$
ή θα μπορούσαμε να σημειώσουμε ότι το ολοκλήρωμα αναιρεί το διαφορικό, δηλαδή $\int_\alpha^\beta dG = G(\beta) - G(\alpha)$. *Συνεπώς, ένας τρόπος να γράψεις ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα ως μια διαφορική εξίσωση, φαίνεται στην κάτωθι ισοδυναμία:*
$$I(f) = \int_0^T f(t,\omega)dB(t) \leftrightarrow dI = f(T,\omega)dB(T)$$
2. *Θα διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις του θεωρήματος του Taylor, με μία και με δύο μεταβλητές αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα:*

   (α') *Έστω ότι, πάρουμε ένα σημείο* x_0 *και ένα σημείο* x *στο σημείο* x_0 *τότε συνεπαγωγικά ισχύει ότι* $dx = x - x_0 \to 0$. *Το θεώρημα του Taylor γράφεται σε αυτή την περίπτωση ως εξής:*
$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(a)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(a)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \cdots \Rightarrow$$
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}dx + \frac{f''(x_0)}{2!}(dx)^2 + \cdots \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}dx + \frac{f''(x_0)}{2!}(dx)^2 + \ldots$$
   Είναι αξιοσημείωτο να αναφερθεί ότι το $(dx)^2$ *είναι πολύ μικρό και συνεπώς κάθε ένα βήμα αύξησης της τάξης θεωρούμε ότι είναι πρακτικά μηδέν. Άρα, η προηγούμενη σχέση θα γίνει,*
$$df = \frac{f'(x_0)}{1!}dx \Rightarrow df = f'(x_0)dx$$
   (β') *Στην περίπτωση της συνάρτησης δύο μεταβλητών* $f(x,y)$ *με σταθερό σημείο το* $(x_0, y_0$, *θα έχουμε ότι:*
   - x *βρίσκεται κοντά στο* $x_0 \to dx = x - x_0 \simeq 0$,
   - *και* y *βρίσκεται κοντά στο* $y_0 \to dy = y - y_0 \simeq 0$.

   Εν συνεχεία, ο τύπος από τον οποίο εξάγεται η τιμή της συνάρτησης στην διαταραγμένη θέση είναι,
$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \ldots$$
$$\Rightarrow f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \ldots$$
$$\Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy$$
   Δεδομένου ότι $(dx)^2$ *και* $(dy)^2$ *είναι πρακτικά μηδέν, ο προηγούμενος τύπος θα λάβει την τελική του μορφή,*
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

6.1.2 Ολοκλήρωμα του *Ito*

Όπως αναφερθήκαμε και παραπάνω η κίνηση Brown δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη, όμως μπορούμε να ολοκληρώσουμε πάνω σε αυτή. Ολοκληρώματα επάνω στην κίνηση Brown, τα οποία ορίστηκαν στα τέλη της δεκαετίας του 1940 από τον Ιάπωνα μαθηματικό Kyoshi Ito βρίσκουν πολύ σημαντικές εφαρμογές στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά.

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μία τυχαία συνάρτηση $f : (0, \infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$, η οποία εξαρτάται με κάποιον τρόπο από την έκβαση κάποιας κίνησης Brown B_t και θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα της επάνω στις μεταβολές της κίνησης Brown, $\int_{\alpha}^{b} f(t, \omega) dB_t$. Με τον όρο $dB(t)$, συμβολίζουμε την διαφορά $B(t+dt) - B(t)$ για ένα απειροστό, δηλαδή πάρα πολύ μικρό dt. Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν το όριο των αθροισμάτων των γινομένων των τιμών της τυχαίας συνάρτησης f σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, επί την μεταβολή της κίνησης Brown μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t + dt$.

Μια διαδικασία f εξαρτάται ρητά από τον χρόνο t και από κάποιες διαδικασίες S, οι οποίες προέρχονται από την κίνηση Brown $f(t, S)$. Για παράδειγμα η f, μπορεί να είναι η αξία ενός παραγώγου μίας μετοχής με τιμή S. Η μεταβολή της f το χρονικό διάστημα t, δίνεται μέσω της επέκτασης του αναπτύγματος Taylor, συμπεριλαμβανομένων όλων των όρων δεύτερης τάξης.

$$\Delta f(t, S) = \frac{\theta f}{\theta t}\Delta t + \frac{\theta f}{\theta S}\Delta S + \frac{1}{2}\frac{\theta^2 f}{\theta t^2}(\Delta t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\theta^2 f}{\theta S^2}(\Delta S)^2 + \frac{\theta^2 f}{\theta t \theta S}\Delta t \Delta S \quad (2)$$

,όπου $\theta f / \theta S$ εκφράζει την παράγωγο της f, στο σημείο $[t, S(t)]$. Υποθέτουμε ότι, το S εξελίσεται σύμφωνα με

$$\Delta S(t) = \mu\Big(t, S(t)\Big)\Delta t + \sigma\Big(t, S(t)\Big)\Delta B(t) \quad (3)$$

,όπου μ και σ είναι οι δεδομένες συναρτήσεις των t και S. Η Δf έχει όρους τους $(\Delta t)^2$, $\Delta t \Delta B(t)$ και $\Big(\Delta B(t)\Big)^2$. Για πολύ μικρά (αμελητέα) Δt , ας θεωρήσουμε 10^{-6}, $(\Delta t)^2$ είναι πολύ μικρότερο από το Δt και επίσης, θεωρείται αμελητέο σε σχέση με το Δt. Άρα, η αναμενόμενη μέση τιμή θα είναι μηδέν και η διακύμναση θα ισούται με $(\Delta t)^2$. Δηλαδή, $E[\Delta t \Delta B(t)] = 0$ και $V[\Delta t \Delta B(t)] = (\Delta t)^2$, όπου το Δt είναι πάρα πολύ μικρό και το $\Delta t \Delta B(t)$ προσεγγίζει το μηδέν. Η διακύμασνη του $\Big(\Delta B(t)\Big)^2$ είναι $2(\Delta t)^2$, η οποία είναι μικρότερη από την αναμενόμενη μέση τιμή Δt. Καθώς το Δt τείνει στο μηδέν, το $\Big(\Delta B(t)\Big)^2$, προσεγγίζει την μη τυχαία αναμενόμενη μέση τιμή του Δt. Στο συνεχές χρόνος το $(\Delta t)^2$, γράφεται ως $(dt)^2 = 0$, το $\Delta t \Delta B(t)$ ως $dtdB(t) = 0$ και το $\Big(\Delta B(t)\Big)^2$ ως $\Big(dB(t)\Big)^2 = dt$.

Τότε η *(2)* θα έχει την κάτωθι μορφή :

$$df(t, S) = \left[\frac{\theta f}{\theta t} + \mu\Big(t, S(t)\Big)\frac{\theta f}{\theta S} + \frac{1}{2}\sigma\Big(t, S(t)\Big)^2\frac{\theta^2 f}{\theta S^2}\right]dt + \sigma\Big(t, S(t)\Big)\frac{\theta f}{\theta S}dB(t)$$

Συνεπώς, αυτός είναι ο τύπος του Ito και ισοδυναμεί με την *(1)*. Ένας χρηστικός τρόπος για τον τύπο του Ito, είναι να γράψουμε μια επέκταση του αναπτύγματος Taylor δεύτερης τάξης, για την συνάρτηση f που αναλύεται, καθώς και να εφαρμόσουμε τον πίνακα πολλαπλασιαμού που σας παρουσιάζουμε στο κάτωθι σχήμα.

	dt	$dB(t)$
dt	0	0
$dB(t)$	0	dt

Παράδειγμα 6.1 Να βρείτε το διαφορικό ή την στοχαστική διαφορική εξίσωση που να έχει για λύση το $B^4(t)$.

Λύση: *Αρχικά ορίζουμε $f(t, S) = S^4$, όπου $S = B(t) \Rightarrow dS = dB(t)$. Άρα, ο αιτιοκρατικός συντελεστής από τον τύπο του Ito είναι $M = 0$ και ο στοχαστικός συντελεστής είναι $\Sigma = 1$.*

Εν συνεχεία, θα υπολογίσουμε τις παραγώγους του τύπου και θα τις αντικαταστήσουμε σε αυτόν,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 4s^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 12s^2$$

Συνεπώς,

$$df = [0 + 0 + \frac{1}{2} 1^2 12s^2]dt + 1 * 4s^3 dB$$

Πραγματοποιώντας τις αντικαταστάσεις καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση,

$$dB^4 = 6B^2 dt + 4B^3 dB$$

Παράδειγμα 6.2 Έστω δύο στοχαστικές ανελίξεις $S(t), R(t)$, να βρεθεί το διαφορικό της συνάρτησης $f(t, S, R)$.

Λύση: *Αρχικά ο τύπος του Taylor θα γίνει,*

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{\partial f}{\partial R}dR + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}(dR)^2 +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial S}dtdS + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial R}dtdR + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial R}dSdR$$

Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι τα S, R είναι drifted από την κίνηση Brown, καθώς και ότι ισχύουν οι κάτωθι σχέσεις:

- $dS = \mu_1 dt + \sigma_1 dB_1(t)$
- $dR = \mu_2 dt + \sigma_2 B_2(t)$

Συνεπώς, πραγματοποιώντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις ο τύπος του Ito με δύο στοχαστικές ανελίξεις θα είναι της μορφής,

$$df = \Big[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial f}{\partial S} + \mu_2 \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}\sigma_2^2\Big]dt + \sigma_1 \frac{\partial f}{\partial S}dB_1 + \sigma_2 \frac{\partial f}{\partial R}dB_2 + \sigma_1\sigma_2 \frac{\partial^2 f}{\partial R \partial S}dB_1 dB_2$$

Παρατηρήσεις 6.2 *Κάποιες από τις βασικές ιδιότητες - τύποι του Ito με δύο στοχαστικές ανελίξεις είναι:*

1. $d(aS + bR) = ad(S) + bd(R)$
2. $d(SR) = RdS + SdR + dSdR$
3. $d\Big(\frac{S}{R}\Big) = \frac{S}{R}\Big[\frac{dS}{S} - \frac{dR}{R} + \Big(\frac{dR}{R}\Big)^2 - \frac{dSdR}{SR}\Big]$

6.2 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις - Σ.Δ.Ε

Έστω X_t μία συνεχής στοχαστική διαδικασία. Εάν dt διαφορικό του t και του διαφορικού της κίνησης Brown B_t, έχουμε μια εκφραση που καλείται στοχαστική διαφορική εξίσωση και δίδεται από τον τύπο:

$$\boxed{dX_t = a(t, B_t, X_t)dt + b(t, B_t, X_t)dB_t \text{ (3)}}$$

Ολοκληρώνοντας την ως άνω σχέση θα πάρουμε τον τύπο:

$$\boxed{X_t = X_0 + \int_0^t a(s, B_s, X_s)ds + \int_0^t b(s, B_s, X_s)dB_s \text{ (4)}}$$

Ενίοτε την σχέση *(3)*, την δεχόμαστε ως ορισμό της στοχαστική διαφορικής εξίσωσης. Ωστόσο, είναι ιδανικό να χρησιμοποιούμε τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις δεδομένου ότι λύνονται κατ' ανάλογο τρόπο με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, σε ένα νέο όμως στοχαστικό περιβάλλον.

Παράδειγμα 6.3 Να λυθεί η κλασσική διαφορική εξίσωση $\frac{dN}{dt} = 3$.

Λύση:

$$dN = 3dt \to N(t) = 3t + c \to N(t) = 3t + N(0)$$

,όπου $N(t) = 3t + c$, είναι η μεταβολή του φαινομένου και $N(t) = 3t + N(0)$ είναι το φαινόμενο την εκάστοτε χρονική στιγμή. Η επίλυση της εξίσωσης ως στοχαστική διαφορική εξίσωση θα είναι, $dN = 3dt + 2dB(t)$, όπου ο όρος $3dt$ είναι το αιτιοκρατικό μέρος της εξίσωσης (drift part) και $2dB(t)$ είναι το στοχαστικό της μέρος (diffusion part).

6.2.1 Arithmetical Brownian Motion

Ο τύπος της Arithmetical Brownian Motion, δίδεται από την σχέση,

$$\boxed{dX(t) = \mu dt + \sigma dB(t) \text{(5)}}$$

, όπου $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Ολοκληρώνοντας την *(5)* θα έχουμε,

$$\int_0^T dX_{(t)} = \mu \int_0^T dt + \sigma \int_0^T dB(t) \Rightarrow X(T) - X(0) = \mu T + \sigma B(T)$$

$$\Rightarrow X(T) = X(0) + \mu T + \sigma B(T)$$

Παρατηρήσεις 6.3

- *Το drift part είναι το $X(0) + \mu T$ και το diffusion part είναι το $\sigma B(T)$.*
- *Στην λύση της, ζητάμε την κατανομή της λύσης,την μέση τιμή και την διασπορά της, δηλαδή γνωρίζουμε ότι $B(t) \sim N(0,T) \to X(T) \sim \Big(X(0) + \mu T, \sigma^2 T\Big)$. Η λύση της $X(T)$ ισούται με τον μη τυχαίο όρο, $X(0) + \mu T$, συν μία κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή $B(T)$, πράγμα που οδηγεί στο να μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές. Οι παράμετροι κατανομής είναι :*

$$E\Big[X(T)\Big] = E\Big[X(0) + \mu T + \sigma B(T)\Big] = X(0) + \mu T + \sigma E\Big[B(T)\Big] = X(0) + \mu T$$

$$V\Big[X(T)\Big] = V\Big[X(0) + \mu T + \sigma B(T)\Big] = V\Big[\sigma B(T)\Big] = \sigma^2 T$$

Η αναμενόμενη μέση τιμή και η διακύμανση αυξάνονται γραμμικά με το T. Αυτό το υπόδειγμα μπορεί να είναι μία κατάλληλη περιγραφή για μια οικονομική μεταβλητή, η οποία αναπτύσεται με σταθερό ρυθμό και χαρακτηρίζεται από την αύξηση της αβεβαιότητας. 'Ομως, καθώς η διαδικασία μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, δεν είναι κατάλληλη ως υπόδειγμα για τις τιμές των μετοχών, δεδομένου ότι η περιορισμένη ευθύνη, αποτρέπει τις μετοχές να συνεχίσουν να λαμβάνουν αρνητικές τιμές.

6.2.2 Geometric Brownian Motion

Ο τύπος μιας γεωμετρικής κίνησης Brown δίδεται από την σχέση,

$$\boxed{dX(t) = \mu X dt + \sigma dXB(t)}$$

Ορίζουμε,

$$\Phi = lnX(t) \Rightarrow d\Phi = dlnX(t) = \Big[0 + \mu X\frac{1}{X} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2\Big(-\frac{1}{X^2}\Big)\Big]dt + \sigma X\frac{1}{X}dB$$

$$\Rightarrow dlnX(t) = \Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)dt + \sigma dB \Rightarrow \int_0^T d\Big(lnX(t)\Big) = \Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)\int_0^T dt + \sigma\int_0^T dB(t)$$

$$\Rightarrow lnX(T) - lnX(0) = \Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)T + \sigma B(T) \Rightarrow lnX(T) = lnX(0) + \Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)T + \sigma B(T)$$

$$\Rightarrow X(T) = X(0)e^{\Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)T + \sigma B(T)}$$

Παράδειγμα 6.4 Αν η $X(t)$ ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown $dX(t) = \hat{\mu}X(t)dt + \hat{\sigma}X(t)dB(t)$, να βρεθεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση για την $F = t + exp\Big(X(t)\Big)$.

Λύση: *Συμπεραίνουμε εύκολα ότι,*

$$M = \hat{\mu}S, \quad \Sigma = \hat{\sigma}S, \quad \tfrac{\partial F}{\partial t} = 1, \quad \tfrac{\partial F}{\partial S} = exp(S), \quad \tfrac{\partial^2 F}{\partial S^2} = exp(S)$$

Συνεπώς, η στοχαστική διαφορική εξίσωση έπειτα από τις αντικαταστάσεις θα είναι της μορφής,

$$dF = [1 + \hat{\mu}Sexp(S) + \frac{1}{2}(\hat{\sigma}S)^2 exp(S)]dt + \hat{\sigma}Sexp(S)dB$$

Παρατηρήσεις 6.4

- *Η γεωμετρική κίνηση Brown είναι πάντοτε θετική και για αυτό τον λόγο δίδει τεράστια χρησιμότητα σε κάποιον που ασχολείται με την κατασκευή ή ανάλυση υποδειγμάτων.*
- *Στην λύση της, ζητάμε την εύρεση της κατανομή που ακολουθεί, την μέση τιμή και την διασπορά της, δηλαδή γνωρίζουμε ότι* $ln\left[\frac{X(T)}{X(0)}\right] \sim N\Big[\Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)T, \sigma^2 T\Big]$.
- *Αν μια στοχαστική ανέλιξη ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown, τότε αυτή είναι η εξίσωση που μπορεί να υπολογίσει την παρούσα αξία μιας μετοχής ή ενός ομολόγου.*

6.2.3 Ornstein-Uhlenbeck (OU)

Η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck είναι μια από τις διάφορες προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση (με μελλοντικές μεταβολές) των επιτοκίων, των συναλλαγματικών ισοτιμιών και των τιμών των βασικών εμπορευμάτων στοχαστικά. Η παράμετρος μ αντιπροσωπεύει την ισορροπία ή τη μέση τιμή που υποστηρίζονται από τα fundamentals. Ως fundamentals ορίζονται οι θεμελιώδεις αρχές περιλαμβάνουν τις βασικές ποιοτικές και ποσοτικές πληροφορίες που συμβάλλουν στην οικονομική ευημερία και την επακόλουθη οικονομική εκτίμηση μιας εταιρείας, ασφάλειας ή νομίσματος. Όπου οι ποιοτικές πληροφορίες περιλαμβάνουν στοιχεία που δεν μπορούν να μετρηθούν άμεσα, όπως η εμπειρία διαχείρισης, η ποσοτική ανάλυση (quantitative analysis χρησιμοποιεί τα μαθηματικά και τα στατιστικά στοιχεία για να κατανοήσει το περιουσιακό στοιχείο και να προβλέψει την μεταβλητότητα. Ως σ ορίζουμε τον βαθμό της μεταβλητότητας γύρω από αυτό που προκαλείται από τις αναταραχές schocks. Μια οικονομική αναταραχή ή σοκ είναι ένα γεγονός που συμβαίνει έξω από μια οικονομία και παράγει μια σημαντική αλλαγή μέσα σε μια οικονομία. Ο τύπος της εν λόγω διαφορικής εξίσωσης δίδεται από την σχέση:

$$\boxed{dX(t) = \lambda X dt + \sigma dX B(t)}$$

Παρατηρήσεις 6.5 1. *Η μέση τιμή θα είναι :*

$$E\Big[X(T)\Big] = e^{-\lambda T}\bigg(X(0) + \sigma E\Big[\int_0^T e^{\lambda t} dB(t)\Big]\bigg) = e^{-\lambda t}\Big(X(0)+0\Big) = e^{-\lambda t}X(0)$$

2. *Η διακύμανση θα είναι :*

$$V\Big[X(T)\Big] = \big(e^{-\lambda t}\big)^2\Big(\sigma^2 V\Big[\int_0^T e^{\lambda t} dB\Big]\Big) = \frac{\sigma^2}{2\lambda}\Big(1-e^{-2\lambda T}\Big)$$

,όπου $V\left[\int_0^T e^{\lambda t)} dB\right] = \int_0^T E\Big[\Big(e^{\lambda t}\Big)^2\Big]dt = \frac{1}{2}\Big(e^{2\lambda T}-1\Big)$

6.2.4 Mean Reversion (MR)

Αυτό το είδος στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, το οποίο καλείται και ως μέση αναστροφή (MR), χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση τυχαίων διαδικασιών, οι οποίες κυμαίνονται γύρω από ένα μέσο επίπεδο. Το κυριότερο παράδειγμα είναι το (συνεχώς αυξανόμενο) επιτόκιο. Παρότι οι τυχαίες διαδικασίες συχνά υποδηλώνονται με κεφαλαία γράμματα, στην συγκεκριμένη περίπτωση ο συγκεκριμένος συμβολισμός r είναι καθιερωμένος και είναι το στοχαστικό επιτόκιο. Η στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι η εξής :

$$\boxed{dr_{(t)} = -\lambda\Big[r(t) - \overline{r}\Big]dt + \sigma dB}$$

,όπου $\lambda, \sigma, \overline{r} > 0$.Ο αιτιοκρατικός συντελεστής $-\lambda[r(t) - \overline{r}]$, ποικίλει ανάλογα με την τελευταία πραγματική τιμή του επιτοκίου $r(t)$. Εάν $r(t) < \overline{r}$, ο αιτιοκρατικός συντελεστής είναι θετικός και υπάρχει μια ανοδική μετατόπιση, ενώ εάν $r(t) > \overline{r}$, ο αιτιοκρατικός συντελεστής είναι αρνητικός και υπάρχει μια καθοδική μετατόπιση. Παρακάτω γίνεται αντιληπτό ότι το r είναι το μακροπρόθεσμο μέσο, έτσι το r επιστρέφει στο μέσο, εξ ου και το όνομα mean reversion. Η παράμετρος λ ελέγχει πόσο γρήγορα μεταβάλεται ο αιτιοκρατικός συντελεστής. Αυτή η Σ.Δ.Ε. έχει την δομή της OU. Μπορεί να μετατραπεί σε μία OU Σ.Δ.Ε. από τον μετασχηματισμό $X(t) = r(t) - \overline{r}$, η οποία είναι μία συνάρτηση με μοναδική μεταβλητή το r. Από τον τύπο του Ito έχουμε ότι, $dX = dr = -\lambda[r(t) - \overline{r}] + \sigma dB$. Αντικαθιστώντας την X στην dX θα πάρουμε τον τύπο $dX = -\lambda X dt + \sigma dB$, της οποίας η λύση σας την παρουσιάζουμε παρακάτω

$$X(T) = e^{-\lambda T}X(0) + e^{-\lambda t}\sigma \int_{t=0}^{T} e^{\lambda T} dB(t)$$

Χρησιμοποιώντας $r(T) = X(T) + \overline{r}$ και $X(0) = r(0) - \overline{r}$ θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} r(T) &= e^{-\lambda T}\Big[r(0) - \overline{r}\Big] + e^{-\lambda T}\sigma \int_{t=0}^{T} e^{\lambda t} dB(t) + \overline{r} \\ &= r(0)e^{-\lambda T} + \overline{r}\Big[1 - e^{-\lambda T}\Big] + e^{-\lambda T}\sigma \int_{t=0}^{T} e^{\lambda t} dB(t) \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 6.6 1. *Η μέση τιμή θα είναι :* $E[r(T)] = r(0)e^{-\lambda T} + \overline{r}\Big[1 - e^{-\lambda T}\Big]$

2. *Η διακύμανση θα είναι :* $V[r(T)] = V[X(T) + \overline{r}] = V[X(T)]$

Δεδομένου ότι r είναι σταθερό και αντιγράφωντας τα αποτελέσματα από την OU Σ.Δ.Ε. έχουμε ότι : $V[r(T)] = \sigma^2(1/2\lambda)\Big[1 - e^{-\lambda T}\Big]$. Για μεγάλα δείγματα T η διακύμανση προσεγγίζει το $\sigma^2(1/2)$. Επίσης, είναι αξιοσημείωτο να αναφέρουμε ότι το επιτόκιο *μπορεί να γίνει αρνητικό* σε αυτό το υπόδειγμα.

6.2.5 Mean Reversion with Square Root Diffusion

Για να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο να πάρει το επιτόκιο αρνητικές τιμές, ο στοχαστικός συντελεστής στο προηγούμενο υπόδειγμα (MR), τροποπποιείται σε $\sigma\sqrt{r(t)}$. Η Σ.Δ.Ε, τότε θα δίνεται από τον κάτωθι τύπο :

$$\boxed{dX = -\lambda\Big[X - \overline{x}\Big]dt + \sigma\sqrt{x}dB}$$

Τόσο ο αιτιοκρατικός, όσο και ο στοχαστικός συντελεστής αλλάζουν συνεχώς. Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι, επειδή μία κίνηση Brown είναι συνεχής, η διαδρομή του επιτοκίου πρέπει να είναι και αυτή συνεχής. Άλματα (Jumps) στην τιμή του r δεν είναι δυνατόν να εμφανιστούν στα πλαίσια αυτού του υπόδειγματος. Επομένως, αν r έχει σήμερα μια μικρή θετική αξία, τότε μια περαιτέρω αρνητική αύξηση της κίνησης Brown, δεν μπορούν να καταστήσουν το επιτόκιο r αρνητικό. Αυτό συμβαίνει διότι το r, πρέπει να μειωθεί με συνεχή τρόπο ως προς το μηδέν και στην συνέχεια το στοχαστικό μέρος της εξίσωσης θα γίνει μηδέν.Συνεπώς το r δεν θα μπορεί να λάβει κατώτερη τιμή, από το μηδέν. Ο αιτιοκρατικός συντελεστής είναι τότε $-\lambda[0-\overline{r}] = \lambda\overline{r}$, ο οποίος είναι θετικός και προκαλεί μια θετική μετατόπιση. Το $r(t)$ ακολουθεί κατανομή x^2, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια για την αξία προιόντων τα οποία βασίζονται στο r, όπως ομόλογα και δικαιώματα προαίρεσης επί των ομολόγων. Πρέπει να σημειώσουμε ότι, ορισμένες μελέτες καθορίζουν το αιτιοκρατικό συντελεστή, στην παραπάνω (MR) Σ.Δ.Ε. με την μορφή $[b-\alpha r(t)] = -\alpha[r(t) - b/\alpha]$, όπου με α εννοούμε το λ και b/α το $\overline{r}$. Έστω $X(T)$ τέτοιο ώστε:

$$X(T) = X(0) - \int_0^T \lambda\Big[X(t) - \overline{x}\Big] + \sigma\int_0^T \sqrt{x}dB \to E[X(T)] = X(0) - E\Big[\int_0^T \lambda[X(t) - \overline{x}\Big]$$

$$dt + \sigma E\Big[\int_0^T \sqrt{x}\Big]dB \Rightarrow E[X(T)] = X(0) - E\Big[\int_0^T \lambda\Big(X(t) - \overline{x}\Big)dt\Big] + 0$$

$$\Rightarrow X(T) = X(0) - \int_0^T \lambda E[X(t) - \overline{x}]dt$$

Εν συνεχεία, θέτουμε $E[X(T)] = m(T)$ και έχουμε ότι,

$$m(T) = X(0) - \int_0^T \lambda[m(t) - \overline{x}]dt \Rightarrow \frac{dm}{dt} = -\lambda\Big(m(T) - \overline{x}\Big) \Rightarrow \frac{dm}{dt} + \lambda m = \lambda\overline{x}$$

Συνεπώς, καταλήγουμε σε μια κλασσική διαφορική εξίσωση. Επιλυοντάς την επιλυσή της θα έχουμε:

$$m(T) = E[X(T)] = \Big(X(0) - \overline{x}\Big)e^{-\lambda T} + \overline{x}$$

6.3 Τρόποι Επίλυσης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων

Υπάρχουν τέσσερις τρόποι επίλυσης στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων:

1. Αμέσου ολοκλήρωσης.

2. Μέθοδος συντελεστών (Exact Solutions).

3. Γινομένου.

4. Ολοκληρωτικών παργόντων.

Εμείς στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε κυρίως με τους τρείς τελευταίους λόγω των διάφορων δυσκολιών που προκύπτουν κατά την υλοποιησή τους.

6.3.1 Μέθοδος Συντελεστών (Exact Solutions)

Η βασική Σ.Δ.Ε. είναι της μορφής $dX = \alpha(t, B) + \beta(t, B)dB$ και η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε για την επιλυσή της χωρίζεται στα παρακάτω βήματα :

- Βήμα 1 : Αντικαθιστούμε όπου $B(t)$ με την x που είναι μια συμβολική μεταβλητή.
- Βήμα 2 : Ζητάμε συνάρτηση $F(t, x)$ έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$\frac{\theta F(t, x)}{\theta t} + \frac{1}{2}\frac{\theta^2 F(t, x)}{\theta x^2} = \alpha(t, x)$$

  και

$$\frac{\theta F(t, x)}{\theta x} = \beta(t, x)$$

- Βήμα 3 : Στην $F(t, x)$ αντικαθιστούμε όπου x το $B(t)$ και θα έχουμε ότι,

$$x(t) = F\Big(t, B(t)\Big)$$

Εμπειρικά γνωρίζουμε ό,τι εάν δεν εμπεριέχεται στους συντελεστές της Σ.Δ.Ε. κανένα $x(t)$, τότε υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να λύνεται με την μέθοδο των συντελεστών. Απαραίτητη προϋπόθεση για την χρήση αυτής της μεθόδου είναι η παρακάτω συνθήκη επιλυσημότητας :

$$\frac{\theta\alpha}{\theta x} = \frac{\theta\beta}{\theta t} + \frac{1}{2}\frac{\theta^2\beta}{\theta x^2}$$

Παράδειγμα 6.5 Βρείτε την μέση τιμή, την διακυμανσή της καθώς και $P[X(t) \leq 1]$ ή $P[X(9) \leq 1]$, όταν :

$$X(t) : e^{-t/2}dX = dt + e^{B(t)}dB(t) \text{ **και** } X(0) = 0$$

Λύση: *Το πρώτο βήμα που πρέπει να κάνουμε είναι να φέρουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση στην σωστή της μορφή, δηλαδή* $dx = e^{-t/2}dt + e^{-t/2}e^{B(t)}dB(t)$
Εν συνεχεία θέτω :

$$\alpha = e^{-t/2} \Rightarrow \frac{\theta\alpha}{\theta x} = 0$$

και

$$\beta = e^{-t/2}e^{x} \Rightarrow \frac{\theta\beta}{\theta t} + \frac{1}{2}\frac{\theta^2\beta}{\theta x^2} = -\frac{1}{2}e^{-t/2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-t/2}e^{x} = 0$$

Drift part: $\frac{\theta F}{\theta x} + \frac{1}{2}\frac{\theta^2 F}{\theta x^2} = \frac{1}{2}e^{-t/2}$ (1)

Diffusion part: $\frac{\theta F}{\theta x} = e^{-t/2}e^{x} \Rightarrow \int dF = \int e^{-t/2}e^{x}dx \Rightarrow F = e^{-t/2}e^{x} + \phi(t)$ (2)

Αντικαθιστώντας την (2) *στην* (1) *εξάγεται ο τύπος* $\phi(t) = -2e^{-t/2} + c$. *Άρα,*

$$F(t, x) = e^{-t/2}e^{x} - 2e^{-t/2} + c \Rightarrow X(t) = e^{-t/2}\Big[e^{B(t)} - 2\Big] + c$$

$$\Rightarrow X(0) = e^{0}\Big(e^{B(0)} - 2\Big) + c \Rightarrow c = 1$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι,

$$X(t) = e^{-t/2}\Big[e^{B(t)} - 2\Big] + 1$$

Το δεύτερο βήμα είναι να βρούμε την μέση τιμή και την διακύμανση της εξίσωσης

$$E[X(t)] = 1 + e^{-t/2}E\Big[e^{B(t)} - 2\Big] = 1 + e^{-t/2}\Big(E\Big[e^{B(t)}\Big] - 2\Big)$$

$$\Rightarrow E[X(t)] = 1 + e^{-t/2}\Big(e^{t/2} - 2\Big)$$

και

$$V[X(t)] = e^{-t}V\Big[e^{B(t)}\Big] \Rightarrow V[X(t)] = e^{-t}\Big(e^{2t} - e^{t}\Big)$$

Το τελευταίο βήμα είναι να υπολογίσουμε τις ζητούμενες πιθανότητες.

$$P[X(t) \leq 1] = P\Big[1 + e^{-t/2}\Big(e^{B(t)} - 2\Big) \leq 1] = P\Big[e^{-t/2}\Big(e^{B(t)} - 2\Big) \leq 0\Big]$$

$$= P\Big[e^{B(t)} \leq 2\Big] = P[B(t) \leq ln2] = P\left[\frac{B(t) - 0}{\sqrt{t}} \leq \frac{ln2 - 0}{\sqrt{t}}\right] = \Phi\left(\frac{ln2}{\sqrt{t}}\right)$$

Συνεπώς, για $t = 9 \Rightarrow P[X(9) \leq 1] = \Phi\left(\frac{ln2}{3}\right)$

6.3.2 Γραμμικές - Γινομένου

Δεδομένου ότι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι οτιδήποτε(αριθμός/συνάρτηση) και $X(0)$ μία αρχική συνθήκη, τότε μια γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση δίδεται από τον τύπο:

$$\boxed{dX(t) = (\alpha + \beta X)dt + (\gamma + \delta X)dB(t)}$$

Έστω ο τύπος $X = YZ$, όπου Y είναι μια άγνωστη στοχαστική ανέλιξη η οποία ακολουθεί μια γεωμετρική στοχαστική εξίσωση και Z μια άγνωστη στοχαστική ανέλιξη, η οποία με την σειρά της ακολουθεί μία αριθμητική στοχαστική εξίσωση. Τότε έχω τις εξής εκφράσεις για τα $Y(t)$ και $Z(t)$ αντίστοιχα:

- Η $Y(t)$ ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown με $U(0) = 1$ και δίδεται από τον τύπο:

$$dY = \mu_Y Y dt + \sigma_Y Y dB(t)$$

- Η $X(t)$ ακολουθεί την αριθμητική κίνηση Brown με $Z(0) = X(0)$ και δίδεται από τον τύπο:

$$dz = \mu_Y dt + \sigma_Z dB(t)$$

Από τις βασικές ιδιότητες γνωρίζουμε ότι:

$$\boxed{dX = d(YZ) = (dY)Z + Y(dZ) + (dY)(dZ)}$$

Στην συνέχεια, επιλύουμε τον κάθε έναν όρο της παραπάνω εξίσωσης με σκοπό την εξεύρεση των τύπων, που θα μας βοηθήσουν για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής.

- $(dY)Z = \mu_Y YZdt + \sigma_Y YZdB(t)$,όπου για $Z = X$ θα έχουμε $\mu_Y Xdt + \sigma_Y XdB$

- $Y(dz) = \mu_Y Ydt + \sigma_Z YdB$

- $(dY)(dZ) = \sigma_Y \sigma_Z Y(dB)^2 = \sigma_Y \sigma_Z Ydt$

Λαμβάνοντας τα παραπάνω θα έχουμε: Drift Part: (dt): $\mu_Y X + \mu_Z Y + \sigma_Y \sigma ZY = \alpha + \beta X(3)$.

Diffusion Part:(dB): $\sigma_Y X + \sigma_Z Y = \gamma + \delta Z(4)$. Επομένως από την χρήση των τύπων (3) και (4) μπορούμε να υπολογίσουμε τις $Z(t)$ και $Y(t)$.

Παράδειγμα 6.6 Να λυθεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση $dX = -\lambda xdt + \sigma dB$

Λύση: Από την Σ.Δ.Ε. έχουμε σαν δεδομένα $\alpha = 0$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = \sigma$, $\delta = 0 \Rightarrow \mu_Y = -\lambda$, $\sigma_Y = 0$, $\mu_Z Y = 0$, $\sigma_Z Y = 0$.

$$dY = -\lambda Ydt + \sigma_Y dB \rightarrow dY = -\lambda Ydt \text{ και } dz = 0dt + \frac{\sigma}{Y}dB \quad (5)$$

Η εξίσωση dY είναι χωριζομένων μεταβλητών και συνεπώς η λύση της είναι $Y(t) = e^{-\lambda t}$ (6). *Αντικαθιστώντας την* (6) *στην* (5) *εξάγεται ο τύπος,*

$$dz = e^{\lambda t}\sigma dB \Rightarrow \int_0^T dz = \sigma \int_0^T e^{\lambda t}dB(t) \Rightarrow Z(T) - Z(0) = \sigma \int_0^T dB$$

Στην συνέχεια αντικαθιστούμε $z(0) = X(0)$ *και λαμβάνουμε την λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, ηοποία είναι* $X(t) = e^{-\lambda t}\Big[X(0) + \sigma \int_0^T e^{\lambda t}dB(t)\Big]$.

6.3.3 Ολοκληρωτικοί Παράγοντες

Ασχολούνται με εξισώσεις της μορφής :

$$\boxed{dX(t) = (\alpha + \beta X)dt + p\Big(t, B(t)\Big)dB}$$

Το πρώτο βήμα που πρέπει να κάνουμε προκειμένου να βρούμε την λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης με αυτή την μέθοδο, είναι να θέσουμε το αιτιοκρατικό μέρος της ως άνω εξίσωσης, ίσο με $A = \int_0^t \beta(s)dS$ και μετά, να πολλαπλασιάσουμε τα πάντα με τον συντελεστή e^{-A}. Ο τύπος στον οποίο θα καταλήξουμε θα είναι της μορφής $d\Big(e^{-A}X(t)\Big) = e^{-A}\alpha dt + e^{-A}dB$. Στο τέλος θα πρέπει να ολοκληρώσουμε προκειμένου να βρούμε την λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 6.7 Να λυθεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση $dX = [2 - X]dt + e^{-t}BdB$**, δεδομένου ότι** $\displaystyle\int_0^T BdB = \frac{1}{2}\left(B^2(t) - T\right)$**.**

Λύση: *Από την Σ.Δ.Ε. έχουμε σαν δεδομένα ότι* $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $p = e^{-t}B$ *και* $A = \displaystyle\int_o^t -1dS = -t \Rightarrow$ $e^{-A} = e^t$ *Συνεπώς,*

$$e^t dx = e^t 2dt + e^t(-x)dt + BdB \Rightarrow e^t dx + xe^t dt = e^t 2dt + BdB \Rightarrow d(e^t x) = e^t 2dt + BdB$$

$$\Rightarrow \int_0^T d\Big(e^t x\Big) = \int_0^T e^t 2dt + \int_o^T BdB \Rightarrow e^T x(T) - X(0) = 2e^t - 2 + \int_0^T BdB$$

$$\Rightarrow X(T) = 2 - 2e^T + \frac{1}{2}\Big(B^2(T) - T\Big) + x(0)e^{-T}$$

6.4 Λυμένες ασκήσεις

6.1 Να επιλυθεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση Ornstein-Uhlenbeck.

Λύση:

$$Y = e^{\lambda t}X \to dY = d\Big(e^{\lambda t}X\Big) = \Big[\lambda e^{\lambda t}X + (-\lambda X)e^{\lambda t} + \frac{1}{2}\sigma^2 0\Big]dt + \sigma e^{\lambda t}dBt$$

$$\Rightarrow d(e^{\lambda t}X) = 0 + \sigma e^{\lambda t}dB(t) \to \int_0^T d\Big(e^{\lambda t}X\Big) = \sigma\int_0^T e^{\lambda t}dB(t) \Rightarrow e^{\lambda T}X(T)$$

$$-X(0) = \sigma\int_0^T e^{\lambda t}dB(t) \Rightarrow X(T) = e^{-\lambda T}\Big[X(0) + \sigma\int_0^T e^{\lambda t}dB(t)\Big]$$

6.2 Αν $B(t)$ είναι μια κίνηση Brown να βρεθούν:

(α') $E[B^2(t)]$

(β') $Var[B^2(t)]$

Λύση: *Δεδομένου ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας κίνησης Brown δίδεται από την σχέση* $M_B(\theta) = exp(\frac{\theta^2 t}{2})$ *και δεδομένου ότι* $\theta = 0$ *θα έχουμε ότι,*

(α')

$$E[B^2(t)] = M_B(\theta) = M_B(0) = \Big[exp\Big(\frac{\theta^2 t}{2}\Big)(\theta t)^2 + exp\Big(\frac{\theta^2 t}{2}\Big)t\Big]_{\theta=0} = exp(0)*0 + exp(0)t = t$$

(β') *Ορίζουμε* $z = B^2(t)$. *Συνεπώς,*

$$V[B^2(t)] = V[z] = E[z^2] - E^2[z] = E[B^4(t)] - E^2[B^2(t)] = M_B''''(0) - t^2 = 3t^2 - t^2 = 2t^2$$

6.3 Αν $B(t)$ είναι μια κίνηση Brown, να δείξετε ότι:

(α') $E[\Delta B^2(t)] = \Delta t$

(β') $V[\Delta B^2(t)] = 2(\Delta t)^2$

Λύση: *Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα που μας αναφέρει ότι, αν μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή, δηλαδή* $x \sim N(0,1)$, *συνεπαγωγικά ισχύει ότι* $x^2 \sim x_1^2$ *με μέση τιμή* $E[x_1^2] = 1$ *και διακύμανση* $V[x_1^2] = 2$. *Επίσης, δεδομένου ότι η κίνηση Brown είναι μια συνάρτηση η οποία είναι μεν συνεχής ως προς τον χρόνο, αλλά δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη ως προς* t, *δηλαδή* $\Delta B(t) \sim N(0, \Delta t)$. *Συνεπώς,*

(α')

$$z = \frac{\Delta B}{\sqrt{\Delta t}} \sim N(0,1) \Rightarrow z^2 \sim x_1^2 \Rightarrow \frac{\Delta B^2}{\Delta t} \sim x_1^2 \Rightarrow \Delta B^2 \sim x_1^2\Delta t \Rightarrow E[\Delta B^2] = \Delta t E[x_1^2] \Rightarrow E[\Delta B^2] = \Delta t$$

(β') *Ομοίως, θα υπολογίσουμε την διακύμανση,*

$$V[\Delta B^2] = (\Delta t)^2 V[x_1^2] = 2(\Delta t)^2$$

6.4 Να δείξετε ότι η κίνηση Brown δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη.

Λύση: *Αυτό που πρέπει να δείξουμε ουσιαστικά είναι ότι όριο* $\lim_{h\to 0}\frac{B(t+h)-B(t)}{h}$ *δεν υπάρχει* $\forall t$. *Πιο συγκεκριμένα διαλέγουμε* $h = 1/n$, *δηλαδή* $h \to 0 \iff n \to \infty$. *Συνεπώς,*

$$\frac{B(t+h)-B(t)}{h} = \frac{B(t+1/n)-B(t)}{1/n} = n[B(t+1/n)-B(t)] = X_n$$

Εν συνεχεία, θα λάβουμε υπόψιν μας τις εξής ιδιότητες:

1. $X_n \sim N(0, 1/n)$
2. $E[X_n] = nE[B(t+1/n) - B(t)] = n * 0 = 0$
3. $V[X_n] = n^2 V[B(t+1/n) - B(t)] = n^2 \frac{1}{n} = n$

Έστω οποιοδήποτε (αυθαίρετο) $k > 0$ τότε,

$$P[|X_n| > k] = 1 - P[|X_n| \leq k] = 1 - P[-k \leq X_n \leq k] = 1 - P\Big[\frac{-k}{\sqrt{n}} \leq z \leq \frac{k}{\sqrt{n}}\Big] = 1 - \Big[\Phi\Big(\frac{k}{\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{-k}{\sqrt{n}}\Big)\Big]$$

Επομένως, όταν $n \to \infty$, η προαναφερθείσα σχέση θα είναι ίση με την μονάδα $\Big(1 - [\Phi(0) - \Phi(0)] = 1\Big)$ η παράγωγος δεν υπάρχει.

6.5 Να βρεθεί η σχέση $Cov[B(s), B(t)] = min\{s, t\}$.

Λύση:

$$0 \geq s < t \Rightarrow Cov[B(s), B(t)] = S$$

$$Cov[B(s), B(t)] = Cov[B(s), B(s) + B(t) - B(s)] = Cov[B(s), B(s)] + Cov[B(s), B(t) - B(s)] = V[B(s)] + 0 = S$$

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι στην προαναφερθείσα εξίσωση ισχύει η ισότητα $Cov[B(s), B(t) - B(s)] = 0$, διότι $(0, s), (s, t)$ δεν επικαλύπτονται και είναι ανεξάρτητα τα $(B(s), B(t) - B(s))$, δηλαδή ισχύου οι ιδιότητες stationary και independent increment.

6.6 Δεδομένου ότι $B(t)$ είναι μια κίνηση Brown, να βρεθεί η πιθανότητα $P(1 < B(1) < 2)$.

Λύση: *Δεδόμενου ότι $B(1) \sim N(0, 1)$ θα έχουμε ότι,*

$$P(1 < B(1) < 2) = P(1 < z < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,136$$

6.7 Δεδομένου ότι $B(t)$ είνια μια κίνηση Brown, να βρεθεί η σχέση $P\Big(B(2) < 3 | B(1) = 1\Big)$

Λύση:

$$B(2) = 1 + [B(2) - 1] = \begin{cases} B(2) = B(1) + B(2) - 1 \\ B(1) = 1 \end{cases}$$

Το δεύτερο μέρος $\Big(1 + [B(2) - 1]$, το συμβολίζουμε ως U και συνεπώς από την ιδιότητα 5 ακολουθεί την κανονική κατανομή. Συνεπώς,

$$E[U] = 1 + E[B(2) - 1] = 1 + 0 = 1$$

και

$$V[U] = V[B(2) - 1] = 1$$

Άρα, $U \sim N(1, 1)$ και

$$P[U < 3] = P\Big[\frac{U-1}{1} < \frac{3-1}{1}\Big] = P[z < 2] = \Phi(2) = 0,98$$

6.8 Να αποδείξετε ότι $-B(t)$ είναι μια κίνηση Brown, δεδομένου ότι $B(t)$ είναι μια κίνηση Brown.

Λύση: *Για να μπορέσουμε να αποδείξουμε το ζητούμενο θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν οι πέντε ιδιότητες μιας κίνησης Brown. Ορίζουμε $X(t) = B(t)$ και έχουμε ότι,*

1. $Q(0) = -B(0) = 0$,
2. $X(t)$ *είναι συνεχής,*
3. $0 < t < S \Rightarrow X(S) - X(t) = -B(s) - \Big(-B(t)\Big) = -\Big(B(S) - B(t)\Big)$,

4. δεν εξαρτάται από τον χρόνο, άρα $X(S)$ και $X(t)$ είναι ανεξάρτητες για non overlappingδιαστήματα,

5. και $X(S) - X(t) \sim$ την κανονική κατανομή

$$E[X(S) - X(t)] = -E[B(S) - B(t)] = 0$$

$$V[X(S) - X(t)] = (-1)^2 V[B(S) - B(t)] = S - t$$

6.9 Δεδομένου ότι $B(t)$ και $B^*(t)$ είναι ανεξάρτητες κινήσεις Brown, να δείξετε ότι:

(α') $Z(t) = \rho B(t) + \sqrt{1-\rho^2} B^*(t), \quad -1 \leq \rho \leq 1$ **είναι μία κίνηση Brown.**

(β') $Corr[Z(t), B(t)] = \rho$.

Λύση:

(α')

- $Z(0) = \rho B(0) + \sqrt{1-\rho^2} B^*(0) = 0$,
- $Z(t)$ *είναι συνεχής,*
- *ισχύουν οι ιδιότητες 3 και 4, διότι εμπεριέχεται ο χρόνος στον τύπο ως συντελεστής και τα διαστήματα δεν είναι επικαλυπτόμενα, αλλά ανεξάρτητα μεταξύ τους,*
- *και* $Z(t)$ *ακολουθεί την κανονική κατανομή. Συνεπώς,*

$$E[Z(t)] = \rho E[B(t)] + \sqrt{1-\rho^2} E[B^*(t)] = 0$$

και

$$V[Z(t)] = \rho^2 V[B(t)] + (\sqrt{1-\rho^2})^2 V[B^*(t)] = \rho^2 t + (1-\rho^2)t = t$$

(β')

$$Corr[Z(t), B(t)] = \frac{Cov[Z(t), B(t)]}{\sqrt{V[Z(t)]}\sqrt{V[B(t)]}}$$

Αρχικά θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα του Covariance,

$$Cov[\alpha x + \beta y, z] = Cov[\alpha x, z] + Cov[\beta y, z] = \alpha Cov[x, z] + \beta Cov(y, z)$$

προκειμένου να υπολογίσουμε τον αριθμητή,

$$Cov[Z(t), B(t)] = Cov[\rho B(t) + \sqrt{1-\rho^2} B^*(t), B(t)] = Cov[\rho B(t), B(t)] + Cov[\sqrt{1-\rho^2} B^*(t), B(t)]$$

$$= \rho Cov[B(t), B(t)] + 0 = \rho V[B(t)] = \rho t$$

Επομένως,

$$Corr[Z(t), B(t)] = \frac{\rho t}{\sqrt{t}\sqrt{t}} = \rho$$

6.10 Να υπολογισθεί το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^T B(t)dB(t)$, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Ito.

Λύση: *Ορίζουμε $f(t,S)$, όπου $S = B(t) \Rightarrow dS = dB(t)$, και κατά συνέπεια $M = 0$, καθώς και $\Sigma = 1$. Επίσης, οι παράγωγοι για τον τύπο του Ito είναι,*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 2S, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 2$$

Άρα,

$$df = [0 + 0 * 2S + 1^2 \frac{1}{2} 2]dt + 1 * 2S dB(t) \Rightarrow df = [\frac{1}{2} 1^2 2]dt + 1 * 2B(t)dB(t)$$

$$\Rightarrow dB^2(t) = dt + 2B(t)dB(t) \Rightarrow \int_0^T dB^2(t) = \int_0^T dt + 2\int_0^T B(t)dB(t)$$

$$B^2(T) - B^2(0) = T + 2I$$

,όπου από την ιδιότητα της κίνησης Brown $B^2(0) = 0$ και $I = 2\int_0^T B(t)dB(t)$. Συνεπώς η προηγούμενη σχέση θα γίνει,

$$I = \frac{1}{2}[B^2(T) - T] \Rightarrow \int_0^T B(t)dB(t) = \frac{1}{2}[B^2(T) - T]$$

6.11 Να υπολογίσετε το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^T exp\Big(B(t)\Big)dB(t)$.

Λύση: *Πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση f, όπου όυαν θα πάμε να αναπτύξουμε το διαφορικό της θα πρέπει να εμφανιστεί το $exp\Big(B(t)\Big)$. Σημειώνεται ότι, θα κινηθούμε σαν να είναι ένα κλασσικό ολοκλήρωμα, για να βοηθηθούμε περισσότερο για την επιλυσή του, δηλαδή να είναι της μορφής $\int exp(x)dx = exp(x)$. Άρα, για την συνάρτηση $f = exp\Big(exp(B(t)\Big) \leftrightarrow f = exp(S)$, όπου $S = B(t)$, θα έχουμε ότι $M = 0$ και $\Sigma = 1$, διότι $dS = 0dt + 1dB$. Εν συνεχεία, θα υπολογίσουμε τις παραγώγους,*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = exp(S), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = exp(S)$$

Εφαρμόζωντας τον τύπου του Ito και αντικαθιστώντας όπου $S = B(t)$ θα έχουμε ότι,

$$df = d\Big(exp(S)\Big) = [0 + 0exp(s) + \frac{1}{2}1^2 exp(S)]dt + 1exp(S)dB(t) \Rightarrow d\Big(exp(s)\Big) = [\frac{1}{2}exp(S)]dt + exp(S)dB(t)$$

$$d[exp(B(t)] = [\frac{1}{2}exp(B(t))]dt + exp(B(t))dB(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^T d(exp(B(t))) = \frac{1}{2}\int_0^T exp(B(t))dt + \int_0^T exp(B(t))dB(t)$$

$$\Rightarrow exp(B(T)) - exp(B(0)) = \frac{1}{2}\int_0^T exp(B(t))dt + I \Rightarrow I = exp(B(T) - 1 - \frac{1}{2}\int_0^T exp(B(t))dt$$

6.12 Έχει παρατηρηθεί ότι αν μια χρηματιστηριακή αγορά λειτουργεί για t ώρες , η μέση τιμή και η διασπορά είναι $5t$. Αν η αγορά λειτουργήσει για έναν τυχαίο αριθμό ωρών, που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 8 και 10 ωρών, να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά που θα καολουθήσουν οι συναλλαγές.

Λύση: *Ορίζουμε ως T τον χρόνο λειτουργίας και ως $N(t)$, τον αριθμό των συναλλαγών σε t ώρε λειτουργίας. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $E[N(t)] = V[N(t)] = 5t$ και υπολογίζουμε εύκολα την μέση τιμή και την διασπορά στον χρόνο λειτουργίας T,*

- $E[T] = \frac{10+8}{2} = 9$
- $V[T] = \frac{(10-8)^2}{12} = \frac{1}{3}$

Διαδοχικά λοιπόν θα έχουμε ότι,

$$E[N(T)] = E\Big[E[N(T)|T]\Big] = E[m(T)]$$

αλλά, $E[N(T)|T_{=t}] = m(t) = E[N(t)] = 5t$. Συνεπώς,

$$E[N(T)] = E[5T] = 5E[T] = 5 * 9 = 45$$

. Αντίστοιχα για την διασπορά έχουμε ότι,

$$V[N(T)] = E\Big[V[N(T)|T]\Big] + V\Big[E[N(T)|T]\Big]$$

αλλά , $V[N(T)|T_{=t}] = V[N(t)] = 5t$. Επομένως,

$$V[N(T)] = E[5T] + V[5T] = 5E[T] + 25V[T] = \frac{160}{3}$$

6.5 Ασκήσεις για λύση

6.13 Να αποδείξετε ότι $Cov[B(s), B(t)] = t$**, λαμβάνωντας υπόψη ότι** $0 \leq t < s$**.**

6.14 Να αποδείξετε ότι η $X(t) = \sqrt{t}Z(t)$ **είναι μία κίνηση Brown, δεδομένου ότι** $Z(t) \sim N(0, 1)$**.**

6.15 Έστω ότι $W(t) = W_t$ **μια κίνηση Brown, τότε ορίζουμε** $X_t = e^{Wt}$**. Να υπολογισθούν:**

(α') $E[X_t]$,

(β') $V[X_t]$,

(γ') και $Cov[X_s, X_t],\ \ 0 \leq s \leq t$.

6.16 Έστω $B(t)$ **μια κίνηση Brown. Υπολογίσατε την πιθανότητα** $P[B(1.5) + B(2) < 3]$**.**

6.17 Έστω $B(t)$ **μια κίνηση Brown. Υπολογίσατε:**

(α') $P[B(4) \leq 3|B(0) = 1]$

(β') Να βρεθεί ένας αριθμός c**, για το οποίο θα ισχύει η σχέση** $P[B(9) < c|B(0) = 1] = 0, 1$**.**

6.18 Έστω $B(t)$ **μια τυπική κίνηση Brown και μια σταθερά** $\rho > 0$**. Δείξατε ότι η ανέλιξη** $W(t) = \rho B\left(\frac{t}{\rho^2}\right)$ **είναι επίσης μια τυπική κίνηση Brown.**

6.19 Έστω $B(t)$ **μια τυπική κίνηση Brown, να υπολογίσετε την ποσότητα** $E[exp(kB(t))]$ **, όπου** k **είναι μια σταθερά.**

6.20 Έστω $B(t)$ **μια τυπική κίνηση Brown, όπως υπολογίσετε την συνδιακύμανση της ανέλιξης** $W(t) = tB(1/t)$**, όπου** $W(0) = 0$**.**

6.21 Μια εταιρεία ζημιώνεται εάν η μετοχή της κατρακυλήσει στο μηδέν. Αν η τιμή της μετοχής περιγράφεται από μία τυπική κίνηση Brown και έχει αρχική τιμή 5**, ποια είναι η πιθανότητα να καταστραφεί η εταιρεία την χρονική στιγμή** $t = 25$**·**

6.22 Να βρεθεί το διαφορικό της $f = exp(\mu t + \sigma B(t)$**, όπου** μ, σ **είναι σταθερές και** $B(t)$ **είναι μια κίνηση Brown.**

6.23 Έστω $X(t)$ **μια στοχαστική ανέλιξη με** $\mu = 0$ **και** $\sigma^2 = t$**, καθώς και** $c > 0$ **μία σταθερά. Να ελέγξετε εάν η ανέλιξη** $Y(t) = X(t)$ **είναι μια κίνηση Brown.**

6.24 Έστω $B(t)$ **είναι μία τυπική κίνηση Brown . Ορίζωντας** $R(t) = |B(t)|$**, να δείξετε ότι** $E[R(t)] = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$ **και** $V[R(t)] = (1 - 2\pi)t$**.**

6.25 Να αποδειχθεί η σχέση $V(X) = E\Big[V[X|Y]\Big] + V\Big[E[X|Y]\Big]$**.**

6.26 Να λυθεί η σχέση $dX(t) = X^3(t)dt - X^2(t)dB(t)$ **και να βρεθεί η τυχαία μεταβλητή** $X(t)$**.**

6.27 Να βρεθεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση που έχει για λύση της, την $F = 2B^3(t) + t$**.**

6.28 Αν η $S(t)$ **ακολουθεί την** $dS = rSdt + \sigma SdB$**, να βρεθεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση της** $S^* = Sexp(-rt)$**.**

6.29 Δεδομένου ότι $Corr(B_1(t), B_2(t)) = \rho$ **να αποδείξετε ότι** $dB_1 dB_2 = \rho dt$**.**

6.30 Να δείξετε ότι $d(SR) = RdS + SdR + dSdR$

6.31 Να υπολογισθεί το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^T B(t)dt$**, το οποίο είναι το εμβαδόν κάτωθεν μιας κίνησης Brown.**

6.32 Μια δισδιάστατη διακριτή κατανομή έχει συνάρτηση πιθανότητας $f(x, y) = \frac{1}{1815}(2x + y)$**, με** $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$ **και** $y = 0, 1, 2, \ldots, 10$**. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες εντολές του microsoft excel, υπολογίσατε τις περιθώριες κατανομές, τις δεσμευμένες περιθώριες κατανομές και επαληθεύσατε ότι** $E[X] = E\Big[E[X|Y]\Big]$**.**

%βεγινενυμερατε