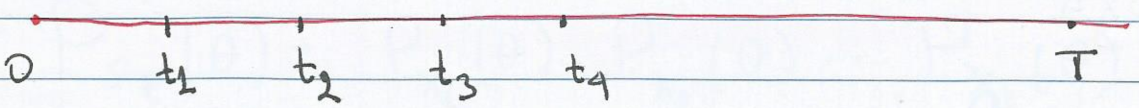
Κίνηση Brown

Θέλουμε σε ένα συμμετρικό random walk να μικρύνουμε τις στιγμές, και τις κάνουμε απειροστές.

- Χωρίζουμε μια χρονική περίοδο $[0, T]$ σε $\boxed{n}$ διαστήματα ίσου μήκους: $\boxed{\Delta t = \frac{T}{n}}$



Προφανώς $\boxed{t_k = k\Delta t}$, $k = 0, 1, \ldots, n$

Ορίζουμε το random-walk:

$$X_k = \begin{cases} y, & p = 1/2 \\ -y, & p = 1/2 \end{cases} \implies k = 0, 1, \ldots, n$$

$$E[X_k] = y \cdot \frac{1}{2} + (-y) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$Var[X_k] = E[X_k^2] - E^2[X_k] = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}(-y)^2 - 0 = y^2$$

Άρα για την θέση έχουμε:

$$E[S_n] = E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = n \cdot 0 = 0$$

$$Var[S_n] = Var[X_1 + X_2 + \dots + X_n] =$$

$$= Var[X_1] + Var[X_2] + \dots + Var[X_n] = n y^2 =$$

$$= \frac{T}{\Delta t} y^2 = \boxed{T \frac{y^2}{\Delta t}}$$

Θέλουμε νά ορίσουμε το Y έτσι ώστε ή παραπάνω ποσότητα νά έχει νόημα όταν $\Delta t \to 0$.

Ένας τρόπος νά το πετύχουμε είναι μέ $Y = \sqrt{\Delta t}$

$\Downarrow$

1ος ορισμός: Κίνηση Brown, είναι ένας random-walk σε ένα διάστημα $[0, T]$, με

$$X_k = \begin{cases} \sqrt{\Delta t}, & p = 1/2 \\ -\sqrt{\Delta t}, & p = 1/2 \end{cases} \quad \text{και} \quad \Delta t \to 0 \iff n \to \infty$$

Ιδιότητες: $E[S_n] = 0$

$$Var[S_n] = T$$

Κατανομή S_n: Για να βρούμε την κατανομή της S_n, θα χρησιμοποιήσουμε ροπογεννήτρια.

Έστω $M(\theta) = M_{S_n}(\theta)$.

Επειδή $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow M(\theta) = M_{X_1}(\theta) \cdot M_{X_2}(\theta) \cdots M_{X_n}(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(\theta) = \left[M_{X_k}(\theta) \right]^n$$

αφού όλες οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ έχουν την ίδια κατανομή.

Αλλά $M_{X_k}(\theta) = E\left[e^{\theta X_k}\right] =$

$$= \frac{1}{2} e^{\theta\sqrt{\Delta t}} + \frac{1}{2} e^{-\theta\sqrt{\Delta t}}$$

αλλά $e^{\omega} = 1 + \frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^2}{2!} + \dots$ $\Rightarrow$

Επειδή $\Delta t \to 0$ οι παρακάτω όροι παραλείπονται.

$$M_{X_k}(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\theta\sqrt{\Delta t}}{1!} + \frac{(\theta\sqrt{\Delta t})^2}{2!}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \theta\sqrt{\Delta t} + \frac{(\theta\sqrt{\Delta t})^2}{2!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\theta\sqrt{\Delta t}}{2} + \frac{\theta^2 \Delta t}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\theta\sqrt{\Delta t}}{2} + \frac{\theta^2 \Delta t}{4}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\theta^2 \Delta t \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{M(\theta) = \left(1 + \frac{1}{2}\theta^2 \Delta t\right)^n}$$

Καθώς $n \to +\infty$, η κατανομή του S_n συγκλίνει στην κατανομή που ορίζεται από το όριο της ροπογεννήτριας:

$$M(\theta) = \left(1 + \frac{1}{2}\theta^2 \Delta t\right)^n \Longrightarrow \ln M(\theta) = n \ln\left(1 + \frac{1}{2}\theta^2 \Delta t\right)$$

όταν $y \to 0$ $\ln(1+y) \simeq y$ $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\xRightarrow{\Delta t \to 0} \ln M(\theta) = n \frac{1}{2}\theta^2 \Delta t \\ &T = n \Delta t \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \ln M(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 T$$

$$\Longrightarrow \boxed{M(\theta) = e^{\frac{1}{2}\theta^2 T}}$$

Αυτή είναι η ροπογεννήτρια μίας τ.μ. Z που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά T, $N(0, T)$

(*)

Κίνηση Brown Ορισμός

Έστωσαν οι τ.μ. $B(t)$, $t \geq 0$

Η τυχαία ανέλιξη $B(t)$ λέγεται τυπική κίνηση Brown ή ~~διαδ~~ ανέλιξη Wiener αν:

① $B(0)=0$

② $B(t)$ τυχαία, για κάθε $t \geq 0$

③ Έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή αν $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \Longrightarrow$

$B(t_2)-B(t_1)$, $B(t_3)-B(t_2)$, $\dots$ $B(t_n)-B(t_{n-1})$

είναι ανεξάρτητες

$$\Updownarrow$$

αν $0<t<s$ η $B(s)-B(t)$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο

④ $B(t+u)-B(u) \sim N(0,u)$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $B(t_2)-B(t_1) \sim N(0, t_2-t_1)$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $B(t) \sim N(0,t)$

Ιδιότητες

① $E[B^2(t)] = t$

$Var\{B(t)\} = t$

$Var[B(t)] = E[B^2(t)] - E[B(t)] = E[B^2(t)] - 0 = E[B^2(t)]$

$\Rightarrow E[B^2(t)] = t$

② $E[\Delta B^2(t)] = \Delta t$

③ $\boxed{M_B(\theta) = e^{\frac{1}{2}\theta^2 t}}$

④ $\boxed{P[B(t) \leq a] = \int_{-\infty}^{\frac{\alpha}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}}\right)}$

⑤ $Cov[B(s), B(t)] = \min(s,t)$

⑥ Η $B(t)$ ΔΕΝ είναι πουθενά διαφορίσιμη

Η $B(t)$ δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη

Έστω t_0, αυθαίρετο. Θα δείξουμε ότι το όριο:

$$\lim_{h \to 0} \frac{B(t_0+h) - B(t_0)}{h}$$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ και αυτό για κάθε t_0.
Λόγω του $B(\cdot)$, οι τιμές είναι τυχαίες για το κλάσμα. Θα δείξουμε ότι η πιθανότητα το κλάσμα αυτό να πάρει αυθαίρετα μεγάλες τιμές είναι 1, δηλαδή βέβαιο.

Εάν $h = \frac{1}{n} \Leftrightarrow h \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$, και

$$\frac{B(t_0+h) - B(t_0)}{h} = \frac{B(t_0+\frac{1}{n}) - B(t_0)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= n\left[B(t_0+\tfrac{1}{n}) - B(t_0)\right] = X_n$$

Η X_n ακολουθεί την κανονική κατανομή

με:
$$E[X_n] = n\,E\left[B\left(t_0+\frac{1}{n}\right) - B(t_0)\right] = n \cdot 0 = 0$$

$$V[X_n] = n^2 V\left[B\left(t_0+\frac{1}{n}\right) - B(t_0)\right] = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n$$

Εστω $K>0$, αυθαίρετα μεγάλος.

$$P[|X_n|>K] = 1 - P[|X_n| \leq K] =$$

$$= 1 - P[-K \leq X_n \leq K] =$$

$$= 1 - P\left[\frac{-K-0}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n - 0}{\sqrt{n}} \leq \frac{K-0}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{K}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-K}{\sqrt{n}}\right)\right] \Rightarrow$$

καθώς $n \to \infty \Rightarrow \frac{K}{\sqrt{n}} \to 0$

$$P[|X_n|>K] \xrightarrow{n\to\infty} 1 - [\Phi(0) - \Phi(0)] = \boxed{1}$$

Ασκήσεις

Άσκηση: Έστω $B(t)$ κίνηση Brown. Βρείτε: $P(1<B(1)<2)$

Λύση: $B(1) \sim N(0,1) \Rightarrow P(1<B(1)<2) =$

$$= P\left(\frac{1-0}{1} < \frac{B(1)-0}{1} < \frac{2-0}{1}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.136$$

Άσκηση: Έστω $B(t)$ κίνηση Brown. Βρείτε:

$$P\left[B(2)<3 \mid B(1)=1\right]$$

Λύση: Πρέπει να βρούμε την κατανομή.

$$\left.\begin{array}{l} B(2) = B(1) + B(2) - B(1) \\ B(1) \sim N(0,1) \\ B(2)-B(1) \sim N(0,2-1) \end{array}\right\} \Rightarrow B(2) \sim N(0,2)$$

Αν $B(1)=1 \Rightarrow B(2) \mid B(1)=1 \;=\; 1 + \left[B(2)-1\right]$

ακολουθεί κανονική κατανομή, με:

$$\left.\begin{array}{l} E[B(2)] = 1 + E\left[B(2) - \overset{B(1)}{1}\right] = 1 + 0 = 1 \\ Var[B(2)] = Var\underbrace{\left[B(2) - B(1)\right]}_{\sim N(0,1)} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$V = B(2) / B(1)=1 \sim N(1,1) \Longrightarrow$$

$$P[V<3] = P\left[\frac{V-1}{1} < \frac{3-1}{1}\right] =$$

$$= P[Z<2] = \Phi(2) = 0.98$$

! Άσκηση (Ο.Χ.): Έστω $W(t)$ μία τυπική κίνηση Wiener (Brown). Βρείτε $P[W(1)+W(2)>2]$

Λύση: $W(1)$ αντιστοιχεί σε διάστημα με $(0,1)$ $\sim N(0,1)$
$W(2)$ » » $(0,2)$ $\sim N(0,2)$

Τα διαστήματα είναι overlapping, άρα ΟΧΙ ανεξάρτητα.

$W(1)+W(2)$ ακολουθεί κανονική κατανομή

$$E[W(1)+W(2)] = E[W(1)] + E[W(2)] = 0+0 = 0$$

$$Var[W(1)+W(2)] = Var[W(1)] + Var[W(2)] + 2Cov[W(1),W(2)]$$

$$= 1+2+2\min(1,2) = 5 \Longrightarrow \boxed{W(1)+W(2) \sim N(0,5)}$$

$$P[W(1)+W(2)>2] = P[\overset{=W(1)+W(2)}{V}>2] =$$

$$= P\left[\frac{V-0}{\sqrt{5}} > \frac{2-0}{\sqrt{5}}\right] = P\left[Z > \frac{2}{\sqrt{5}}\right] = 1-\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \boxed{0.186}$$

Άσκηση: Έστω $W(t)=W_t$ μια κίνηση Brown, ορίζουμε: $X_t = e^{W_t}$, $t\geq 0$ (α) Βρείτε $E[X_t]$, (β) Βρείτε $V[X_t]$

(γ) $0\leq s\leq t$, βρείτε $Cov[X_s, X_t]$

Λύση: Αν Y_t (κάποια τ.μ.) $\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} M_{Y_t}(\theta) = e^{\theta\mu + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}} \\ M_{Y_t}(\theta) = E[e^{\theta Y_t}] \end{array}\right\} \Rightarrow E[e^{\theta Y_t}] = e^{\theta\mu + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}} \quad (*)$$

για κάθε μ, σ^2, θ.

$$\left.\begin{array}{l} E[X_t] = E[e^{W_t}] \\ \text{αλλά } W_t \sim N(0,t) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{με } \mu=0,\ \sigma^2=t,\ \theta=1]{\text{από } (*)} \boxed{E[X_t] = e^{t/2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} E[X_t^2] = E[e^{2W_t}] \\ \text{αλλά } W_t \sim N(0,t) \end{array}\right\} \xrightarrow[\mu=0,\ \sigma^2=t,\ \theta=2]{\text{από } (*)} \boxed{E[X_t^2] = e^{2t}}$$

$$Var[X_t] = E[X_t^2] - E^2[X_t] =$$

$$= e^{2t} - (e^{t/2})^2 = \boxed{e^{2t} - e^{t}}$$

έστω $0 \leq s < t$

$$Cov(X_s, X_t) = E[X_s X_t] - E[X_s]E[X_t]$$

$$E[X_s] = e^{s/2} \quad , \quad E[X_t] = e^{t/2}$$

$$E[X_s X_t] = E[e^{W_t + W_s}]$$

W_t, W_s are not independent since $(0,s)$, $(0,t)$ are overlapping $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow E[e^{W_t + W_s}] = E[e^{2W_s} e^{W_{t-s}}] = E[e^{2W_s}]E[e^{W_t - W_s}] =$$

W_s, W_{t-s} independent — $(0,s)$, $(t-s)$ are not overlapping

$$= e^{2s} \cdot e^{\frac{t-s}{2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Cov(X_s, X_t) = \boxed{e^{\frac{3s+t}{2}} - e^{\frac{s+t}{2}}}$$

Άσκηση: Αν $B(t)$ κίνηση Brown. Δείξατε ότι $E[\Delta B^2(t)] = \Delta t$ και $Var[\Delta B^2(t)] = 2(\Delta t)^2$

Λύση: Αν $X \sim N(0,1) \Rightarrow X^2 \sim \chi_1^2$ με

$E(\chi_1^2) = 1$, $Var(\chi_1) = 2$

$\Delta B \sim N(0,\Delta t) \Rightarrow \dfrac{\Delta B}{\sqrt{\Delta t}} \sim N(0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta B^2}{\Delta t} \sim X_1^2$, θέτουμε $Z = \dfrac{\Delta B^2}{\Delta t}$ με

$Z \sim X_1^2 \Rightarrow \Delta B^2 = \Delta t \cdot Z \Rightarrow$

$\Rightarrow E[\Delta B^2] = E[\Delta t \cdot Z] = \Delta t\, E[Z] = \Delta t \cdot 1 = \boxed{\Delta t}$

$\Rightarrow Var[\Delta B^2] = Var[\Delta t \cdot Z] = (\Delta t)^2 \, Var(Z) = (\Delta t)^2 \cdot 2 = \boxed{2\Delta t^2}$

Άσκηση: Αν $B(t)$ κίνηση Brown. Βρείτε

$E[B^2(t)]$ και $Var[B^2(t)]$

Λύση: $B(t)$ Brown motion $\Rightarrow$ $M_B(\theta) = e^{\frac{\theta^2 t}{2}}$

$E[B^2(t)] = M_B''(0) = \left[e^{\frac{\theta^2 t}{2}} \cdot \frac{2\theta t}{2}\right]' = e^{\frac{\theta^2 t}{2}} \cdot \frac{2\theta t}{2} \cdot \theta t +$

$+ e^{\frac{\theta^2 t}{2}} \cdot t \Big]_0 = [0 + e^0 \cdot t] = \boxed{t}$

$Var[B^2(t)] = Var[Z] = E[Z^2] - E^2[Z] = E[B^4] - E^2[B^2] =$
$Z = B^2$
$= 3t^2 - t^2 = \boxed{2t^2}$

$E[B^4] = M_B''''(0) = \left[e^{\frac{\theta^2 t}{2}} \theta^2 t^2 + e^{\theta^2/2} \cdot t\right]''_0 = \left[e^{\theta^2 t/2} \theta^3 t^3 + e^{\theta^2/2} 2\theta t^2 + e^{\frac{\theta^2}{2}} \cdot \theta t^2\right]' =$

$= \left[e^{\frac{\theta^2 t}{2}} \theta^4 t^4 + e^{\theta^2/2} 3\theta^2 t^3 + e^{\theta^2/2} 2\theta^2 t^3 + e^{\theta^2/2} \cdot 2t^2 + e^{\theta^2/2} \theta^2 t^3 + e^{\theta^2/2} \cdot t^2\right]_0 =$

$= 0 + 0 + 0 + 2t^2 + 0 + t^2 = 3t^2$

Άσκηση: Αν $B(t)$ κίνηση Brown, είναι η $-B(t)$ κίνηση Brown;

Λύση: Ορίζουμε $X_t = -B_t$. Διαδοχικά έχουμε:

① $X_0 = -B_0 = -0 = 0$

② $X_t = -B_t$ συνεχής για κάθε $t \geq 0$

③ Αν $0 < t < s \Rightarrow X_s - X_t = (-B_s) - (-B_t) =$

$$= -B_s + B_t = -(B_s - B_t)$$

και αφού B_t κίνηση Brown είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

④ $X_s - X_t = -(B_s - B_t) \sim$ Κανονική Κατανομή

και $E[X_s - X_t] = -E[B_s - B_t] = -\left(E(B_s) - E(B_t)\right) = 0$

$$Var[X_t - X_s] = Var[-(B_s - B_t)] = (-1)^2 Var[B_s - B_t] =$$
$$= s - t$$

$\Rightarrow X_s - X_t \sim N(0, s-t)$ άρα

κίνηση Brown.

Άσκηση: Έστωσαν B_t και $B^*(t)$ δύο ανεξάρτητες κινήσεις Brown και $-1 \leq \rho \leq 1$. Δείξτε ότι η $Z(t) = \rho B(t) + \sqrt{1-\rho^2}\, B^*(t)$ είναι Brown.

Λύση:

(1) $Z(0) = \rho B(0) + \sqrt{1-\rho^2}\, B^*(0) = 0$

(2) $Z(t)$ συνεχής

(3) έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

(4) αν $0 < t < s \Rightarrow Z(s) - Z(t) =$

$= \rho\left[B(s) - B(t)\right] + \sqrt{1-\rho^2}\left[B^*(s) - B^*(t)\right]$

ανεξάρτητες του χρόνου $\Rightarrow$ stationary increments (ομοίως και ανεξάρτητες)

(5) $E\left[Z(t+u) - Z(t)\right] = E\left[\rho B(t+u) + \sqrt{1-\rho^2}\, B^*(t+u)\right.$
$\left. - \rho B(t) + \sqrt{1-\rho^2}\, B^*(t)\right] = \rho E\left[B(t+u) - B(t)\right] + \sqrt{1-\rho^2}$
$E\left[B^*(t+u) - B^*(t)\right] = \rho \cdot 0 + \sqrt{1-\rho^2} \cdot 0 = 0$

$Var\left[Z(t+u) - Z(t)\right] = Var\left[\rho\left[B(t+u) - B(t)\right] + \right.$

$$+\sqrt{1-\rho^2}\{B^*(t+u)-B^*(t)\}\Big] = \rho^2 \, Var\big[B(t+u)-B(t)\big] + \left(\sqrt{1-\rho^2}\right)^2 Var\big[B^*(t+u)-B^*(t)\big] =$$

$$=\rho^2\cdot u + (1-\rho^2)\cdot u = \boxed{u}$$

Επομένως $Z(t)$ κίνηση Brown.

Άσκηση: Υπολογίσατε $Corr[Z(t), B(t)]$.

Λύση: $Corr[Z(t), B(t)] = \dfrac{Cov[Z(t), B(t)]}{\sqrt{Var(Z(t))}\cdot\sqrt{Var B_t}}$

$$Cov[Z_t, B_t] = Cov[\rho B_t + \sqrt{1-\rho^2}B^*_t, B_t] =$$

$= Cov[\rho B_t, B_t] + Cov[\sqrt{1-\rho^2}B^*_t, B_t]$ (λόγω ανεξαρτησίας) $= \rho\, Cov[B_t, B_t] + \sqrt{1-\rho^2}\, Cov[B^*_t, B_t] =$

ανεξαρτησία

$$= \rho\, Var(B_t, B_t) + \sqrt{1-\rho^2}\cdot 0 = \boxed{\rho t} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow Corr = \frac{\rho t}{\sqrt{V(Z_t)}\cdot\sqrt{V(B_t)}} = \frac{\rho t}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{t}} = \frac{\rho t}{t} = \rho$$

Άσκηση: The Brownian motion is a martingale

$$\underset{t>s}{E\left[B(t)\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right]} = E\left[B(s) + B(t) - B(s)\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right]$$

$$= E\left[B(s)\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right] + E\left[B(t) - B(s)\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right]$$

$$E\left[B(s)\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right] = B(s)$$

$$E\left[B(t) - B(s)\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right] = E\left[B(t) - B(s)\right] = 0$$

B από (t-s) ανεξάρτητο από B από (0,s)

$$\Longrightarrow E\left[B(t)\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right] = B(s)$$ είναι martingale

Άσκηση: Δείξτε ότι η ανέλιξη: $\boxed{e^{B(t) - \frac{1}{2}t}}$

Λύση: $E\left[e^{B(t) - \frac{1}{2}t}\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right] =$

$$= E\left[e^{B(s) + (B(t) - B(s)) - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}(t-s)}\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right] =$$

$$= e^{B(s) - \frac{1}{2}s}\, E\left[e^{B(t) - B(s) - \frac{1}{2}(t-s)}\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right] =$$

Since $B(t)-B(s) \sim Normal(0, t-s)$

αν αφαιρέσουμε μία σταθερά έχουμε πάλι

normal, άρα $B(t)-B(s)-\frac{1}{2}(t-s) \sim N(-\frac{1}{2}(t-s), t-s)$

$$\Downarrow$$

$$E\left[e^{B(t)-B(s)-\frac{1}{2}(t-s)}\right] = e^{E[B(t)-B(s)-\frac{1}{2}(t-s)]+\frac{1}{2}Var[----]}$$

εκθέτης

$$= e^{-1/2(t-s)+1/2(t-s)} = e^0 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$E\left[e^{B(t)-\frac{1}{2}t} \middle| F(s)\right] = e^{B(s)-\frac{1}{2}s} \cdot 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ martingale

$Y(t) \sim N(\mu, \sigma^2)$

$E[e^{Y(t)}] = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$ από ροπογεννήτρια.

Για να βρούμε την $f(x,\rho)$ εργαζόμαστε ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l} B(s)=x \\ B(t)=\rho \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B(s)=x \\ B(t)-B(s)=\rho-x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} B(s)=x \sim N(0,s) \\ B(t-s)=\rho-x \sim N(0,t-s) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$f_s(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{x^2}{2s}} \quad (2)$$

$$f_{t-s}(\rho-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\cdot e^{-\frac{(\rho-x)^2}{2(t-s)}} \quad (3)$$

Λόγω του stationary increment και independence

$$\Rightarrow f(x,\rho)=f_s(x)\cdot f_{t-s}(\rho-x) \quad (4)$$

$$(1),(2),(3),(4) \Rightarrow f_{s|t}(x|\rho)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{s(t-s)}{t}}}\cdot e^{-\frac{\left(x-\frac{s\rho}{t}\right)^2}{2\frac{s(t-s)}{t}}}$$

$$\sim N\left(\frac{s\rho}{t}, \frac{s}{t}(t-s)\right)$$

Άσκηση [5Ο]] Βρείτε την κατανομή που ακολουθεί η $B(s)$ όταν $B(t)=\rho$, ρ δεδομένο και $t>s$.

Λύση: Ζητάμε την σ.π.π της

$$B(s)=x \;\Big|\; B(t)=\rho \quad , \quad t>s$$

$$\Updownarrow$$

$$f_{s|t}(x|\rho) = \frac{f(x,\rho)}{f_t(\rho)}$$ ⟵ η από κοινού σ.π.π

Γνωρίζουμε ότι: $B(t) \sim N(0,t) \Rightarrow$

$$\boxed{\text{σ.π.π της } B(t) = f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}}$$

$$\Downarrow$$

$$f_t(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{\rho^2}{2t}} \quad (1)$$

Άσκηση: Εάν $\tilde{X}(t) = \mu t + \sigma B(t)$, βρείτε $E[X(t)]$, όπου $X(t) = e^{\tilde{X}(t)}$.

Άσκηση: Έστω $Y(t) = \mu t + \sigma B(t)$ και $X(t) = e^{Y(t)}$. Βρείτε: $E[X(t) \mid X(u)]$ όταν $0 \leq u \leq s$.

Άσκηση: Έστω $B(t)$ τυπική κίνηση Brown και $t_1, t_2 > 0$ δύο χρονικές στιγμές. Βρείτε την κατανομή της κίνησης:

$$B(t_1) + B(t_1 + t_2)$$