Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων

1^{η} περίπτωση

Ο παρονομαστής έχει απλές πραγματικές ρίζες

1^{o} Παράδειγμα

1

$$\int \frac{x^2+3x}{x^2-5x+6}dx = x + \int \frac{8x-6}{x^2-5x+6}dx$$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

$$\frac{8x-6}{x^2-5x+6}=\frac{8x-6}{(x-2)(x-3)} \overset{?}{=} \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{Ax+Bx-3A-2B}{(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B)x-3A-2B}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow \frac{8x-6}{(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B)x-3A-2B}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Rightarrow 8x-6=(A+B)x-3A-2B \Rightarrow \begin{cases} A+B=8 \\ -3A-2B=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A+2B=16 & 2 \\ -3A-2B=-6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A+2B=16 \\ -A=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A+2B=16 \\ A=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=18 \\ A=-10 \end{cases}$$

$$\frac{8x-6}{(x-2)(x-3)}=\frac{-10}{x-2}+\frac{18}{x-3} \Rightarrow$$

$$\int\frac{8x-6}{(x-2)(x-3)}dx=\int\frac{-10}{x-2}dx+\int\frac{18}{x-3}dx=-10\int\frac{1}{x-2}dx+18\int\frac{1}{x-3}dx$$

$$=10\ln|x-2|+18\ln|x-3|+C,\ C\in\mathbb{R}$$

Τελικά: $\displaystyle\int\frac{x^2+3x}{x^2-5x+6}dx=x+10\ln|x-2|+18\ln|x-3|+C,\ C\in\mathbb{R}$

2^{o} Παράδειγμα

③

$$\int \frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx$$

$$\frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{\Gamma}{x+3} = \frac{A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+\Gamma(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

$$= (A+B+\Gamma)x^2+(A+2B-3\Gamma)x-6A-3B+2\Gamma$$

$$\Rightarrow x^2-x-1 = A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+\Gamma(x-1)(x-2) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$x=1$ ✓ $\quad -1=-4A \Rightarrow A=\frac{1}{4}$

$x=2$ ✓ $\quad 1=5B \Rightarrow B=\frac{1}{5}$

$x=-3$ ✓ $\quad 11=20\Gamma \Rightarrow \Gamma=\frac{11}{20}$

$$\int \frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx = \int \frac{1/4}{x-1}dx+\int\frac{1/5}{x-2}dx+\int\frac{11/20}{x+3}dx = \frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{5}\ln|x-2|+\frac{11}{20}\ln|x+3|+c$$

Παρατήρηση

Στην πρώτη περίπτωση το ολοκλήρωμα της ρητής συνάρτησης ανάγεται στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων

1) $\int \frac{1}{x \pm a}\,dx = \ln|x \pm a| + c$

2) $\int \frac{1}{ax \pm b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax \pm b| + c$

Θέτω: $\omega = ax + b \Rightarrow d\omega = d(ax+b) \Rightarrow d\omega = (ax+b)'dx \Rightarrow d\omega = a\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{a}d\omega$, $\int \frac{1}{ax+b}\,d\omega = \int \frac{1}{\omega}\frac{1}{a}\,d\omega = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\omega}\,d\omega = \frac{1}{a}\ln|\omega| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

2η Περίπτωση

Ο παρονομαστής έχει πραγματικές ρίζες εκ των οποίων κάποιες μπορεί να είναι απλές και κάποιες είναι πολλαπλές, δηλαδή εμφανίζονται περισσότερες από μία φορές.

3ο Παράδειγμα

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x+2)(x+3)^2}\,dx$$

$$\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}+\frac{\Gamma}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2+B(x+2)(x+3)+\Gamma(x+2)}{(x+2)(x+3)^2}$$

$\Rightarrow x^2+x+1 = A(x+3)^2+B(x+2)(x+3)+\Gamma(x+2)\ \forall x\in\mathbb{R}$. $x=-2$ $3=A$

$x=-3$ $7=-\Gamma\Rightarrow\Gamma=-7$ $x=0$ $1=9A+6B+2\Gamma\Rightarrow 1=27-14+6B\Rightarrow B=-2$

$B=-2$ $\quad \displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x+2)(x+3)^2}\,dx = \int \frac{3}{x+2}\,dx + \int \frac{-2}{x+3}\,dx + \int \frac{-7}{(x+3)^2}\,dx$ $\quad 6$

$$= 3\ln|x+2| - 2\ln|x+3| - 7\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx \quad \left(\int \frac{1}{x^2}\cdot 1\,dx\right) \quad x \to x+3$$

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C$$

$$\omega = x+3 \Rightarrow d\omega = d(x+3) \Rightarrow d\omega = (x+3)'\,dx \Rightarrow d\omega = dx$$

$$\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx = \int \frac{1}{\omega^2}\,d\omega = \int \omega^{-2}\,d\omega = \frac{\omega^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{\omega^{-1}}{-1} + c$$

$$= -\omega^{-1} + c = -(x+3)^{-1} + c = -\frac{1}{x+3} + C$$

7

Τελικά: $\int \frac{x^2+x+1}{(x+2)(x+3)^2} = 3\ln|x+2| - 2\ln|x+3| + 7\frac{1}{x+3} + c,\ c\in\mathbb{R}$

Παρατήρηση

Τα ολοκληρώματα της $2^{ης}$ περίπτωσης ανάγονται στα ολοκληρώματα:

1) $\int \frac{1}{x\pm a}dx = \ln|x\pm a| + c$

2) $\int \frac{1}{ax\pm b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax\pm b| + c$

3) $\int \frac{1}{(x\pm a)^{\nu}}dx = \frac{(x\pm a)^{-\nu+1}}{-\nu+1} + c,\ \nu = 2,3,\dots$ $c\in\mathbb{R}$

4) $\int \frac{1}{(ax\pm b)^{\nu}}dx = \frac{1}{a}\frac{(ax\pm b)^{-\nu+1}}{-\nu+1} + c,\ c\in\mathbb{R}$