Παραγώγιση της αντίστροφης μίας συνάρτησης (1)

Θεώρημα

Έστω $y=f(x)$ συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ τέτοια ώστε να υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(y)=x$. Τότε έχουμε

$$\boxed{\frac{dx}{dy}} = \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \boxed{\frac{1}{\frac{dy}{dx}}} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$$

Παράδειγμα

$y=f(x)=x^2$, $D(f)=[0,+\infty)$

$f^{-1}(y)=x=\sqrt{y}$ Δηλαδή $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$

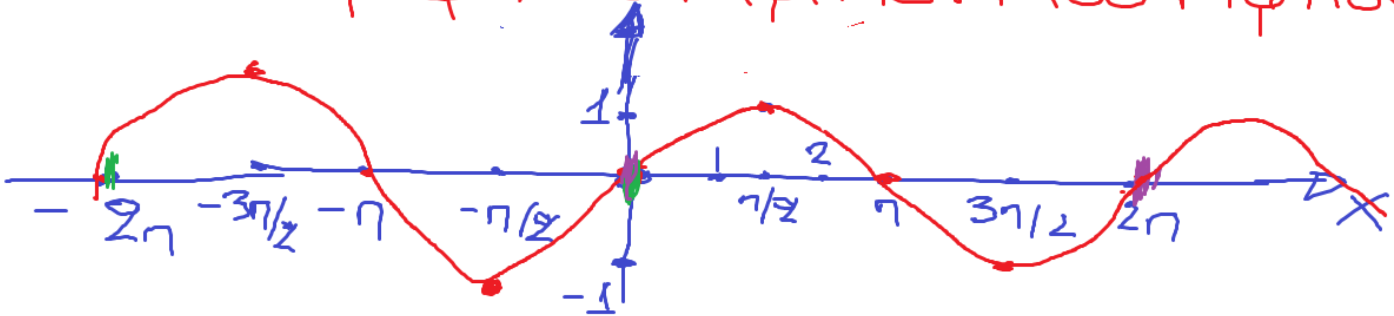
Έχω $f^{-1\prime}(y)=\dfrac{df^{-1}(y)}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

Με εφαρμογή του θεωρήματος

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Αντίστροφες Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων (3)

1. Αντίστροφη συνάρτηση του ημιτόνου



$\eta\mu 0 = 0$

$\eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$

$\eta\mu\, \pi = 0$

$\eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1$

$\eta\mu\, 2\pi = 0$

$y = f(x) = \eta\mu x$, $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [-1, 1]$

$\eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu x \quad \forall x \in D(f)$

Η $y = \eta\mu x$ δεν είναι 1-1 και επομένως δεν αντιστρέφεται.

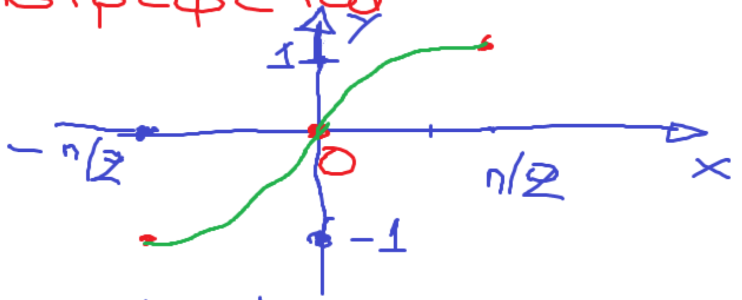
Αν την περιορίσουμε στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε η $y = \eta\mu x$ γίνεται 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

Η επιλογή $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Μπορούμε να περιορίσουμε την $y=\eta\mu x$ σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}]$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ είναι οι ακέραιοι) και να είναι και πάλι 1-1 και επομένως να αντιστρέφεται

$\eta\mu(-\frac{\pi}{2}) = -1$

$\eta\mu(0) = 0$

$\eta\mu(\frac{\pi}{2}) = 1$

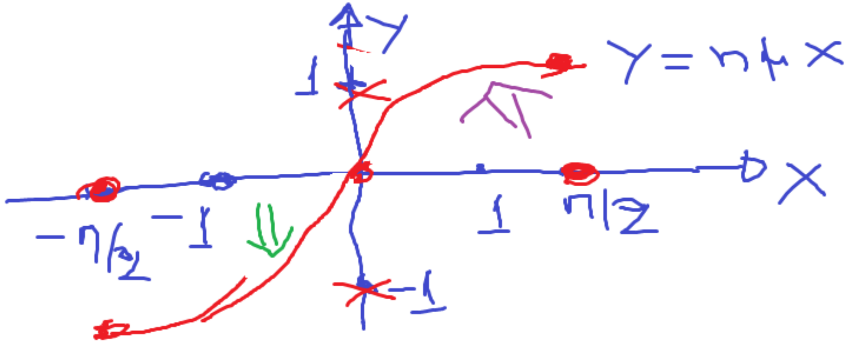


$y = \eta\mu x$, $D(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

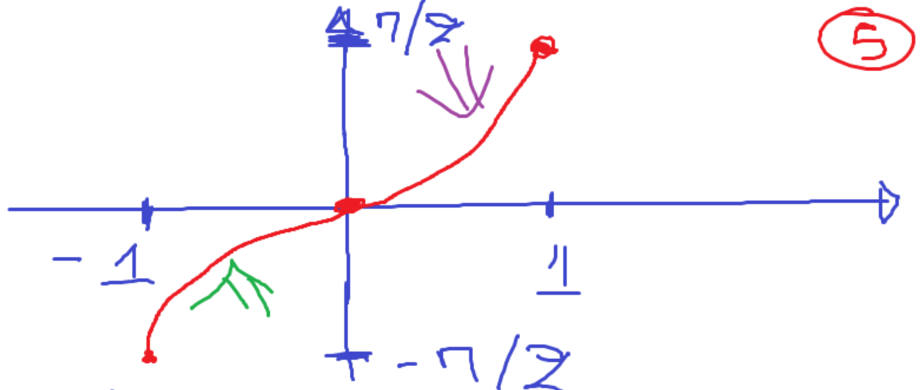
$R(f) = [-1, 1]$

Η συνάρτηση αυτή είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Την αντίστροφη τη συμβολίζουμε τοξημx, δηλαδή, $f^{-1}(\cancel{y}\,x) = \text{τοξημ}x$.

Θα έχουμε $D(f^{-1}) = R(f) = [-1, 1]$, $R(f^{-1}) = D(f) = [-\pi/2, \pi/2]$.



$$\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$
$$\eta\mu(0) = 0$$
$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$



$$\text{τοξημ}\,1 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{τοξημ}\,0 = 0, \quad \text{τοξημ}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \underset{\text{τοξημ}}{\overset{\text{ημ}}{\rightleftarrows}} 1$$

Οι συναρτήσεις y=ημx και y=τοξημx επειδή είναι αντίστροφες έχουν το ίδιο είδος γνήσιας μονοτονίας, είναι γνησίως αύξουσες.

Εύρεση παραγώγου της $y=\text{τοξημ}x$ (6)

Α τρόπος (Ξεκινάμε από την $y=\text{τοξημ}x$)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\text{τοξημ}"] & y \arrow[l, bend left, "\text{ημ}"] \end{tikzcd}$$

$$y=\text{τοξημ}x \Longleftrightarrow \text{ημ}y=x,\ x\in D(\text{τοξημ})=[-1,1],$$
$$y\in R(\text{τοξημ})=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{ημ}y=x \xrightarrow[\text{ως προς } x]{\text{Παραγωγίζω}} \text{συν}y\cdot y'=1 \Rightarrow y'=\frac{1}{\text{συν}y}$$

$(y=y(x)=\text{τοξημ}x)$

$\text{ημ}^2y+\text{συν}^2y=1 \Rightarrow \text{συν}y=\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2y}$. Αλλά $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, και $\text{συν}\,y\geq 0$ στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ με $\text{συν}y=0$ μόνο για $y=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$.

Επομένως $\sigma\upsilon\nu y = \sqrt{1-\eta\mu^2 y}$. Αλλά $\eta\mu y = x$.

Επομένως $\sigma\upsilon\nu y = \sqrt{1-x^2}$. Καταλήγουμε στο ότι

$$y' = (\tau o\xi\eta\mu x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; x \in (-1,1).$$

$$\boxed{\text{Επομένως } (\tau o\xi\eta\mu x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; x \in (-1,1)}$$

B τρόπος (Ξεκινάμε από την $y=f(x)=\eta\mu x$)

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "\eta\mu"] & y \arrow[l, bend left, "\tau o\xi\eta\mu"]
\end{tikzcd}
$$

$y=\eta\mu x \Longleftrightarrow \tau o\xi\eta\mu\, y = x,\ x\in D(f)=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],$

$y\in R(f)=[-1,1]$

$y=f(x)=\eta\mu x$

$f^{-1}(y)=\tau o\xi\eta\mu\, y = x.$

Από Θεώρημα έχουμε

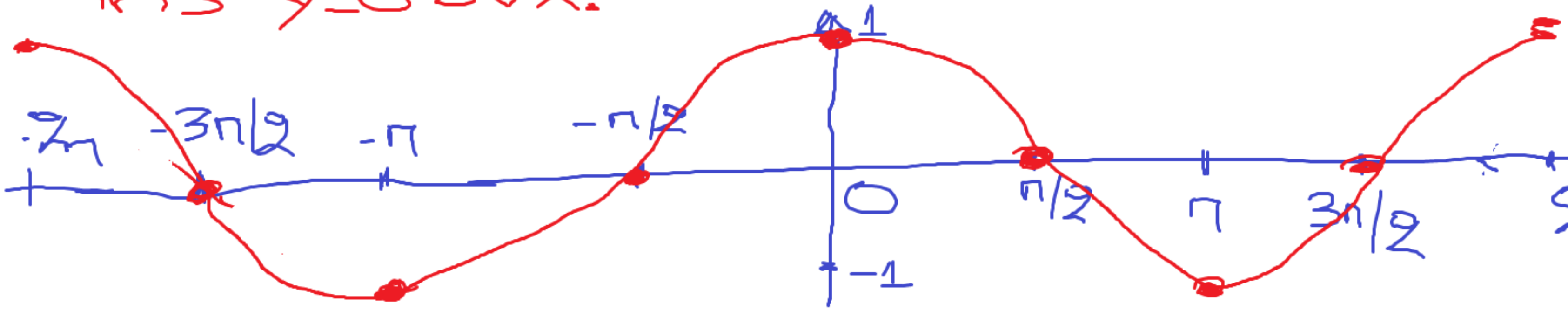
$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\overset{\sigma\upsilon\nu x=\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\frac{1}{\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}.$$

Αλλά $x \in D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως συν$x \geq 0$ με συν$x = 0$ μόνο στα άκρα $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Επομένως στην ισότητα συν$x = \pm\sqrt{1-ημ^2 x}$ κρατώ το + και έχω:

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = (\text{τοξημ}y)' = \frac{1}{\sqrt{1-ημ^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \ y \in (-1,1).$$

$$\boxed{\text{Δηλαδή } (\text{τοξημ}y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \ y \in (-1,1)} \ \text{ή} \ \boxed{(\text{τοξημ}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in (-1,1)}$$

Εύρεση της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης (10)
της $y=\sigma\upsilon\nu x$.



$\sigma\upsilon\nu 0=1$
$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}=0$
$\sigma\upsilon\nu \pi=-1$
$\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2}=0$
$\sigma\upsilon\nu 2\pi=1$

$\sigma\upsilon\nu(x+2\pi)=\sigma\upsilon\nu x, \forall x\in D(f)$

$y=f(x)=\sigma\upsilon\nu x, D(f)=\mathbb{R}, R(f)=[-1,1]$

Η $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ δεν είναι 1-1 και επομένως δεν αντιστρέφεται. Αν την περιορίσουμε στο $[0,\pi]$ γίνεται 1-1 και επομένως μπορεί να αντιστραφεί.

Γενικά αν την περιορίσουμε σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[2\kappa\pi, 2\kappa\pi+\pi]$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, η $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ γίνεται 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Επιλέγουμε το $[0,\pi]$.