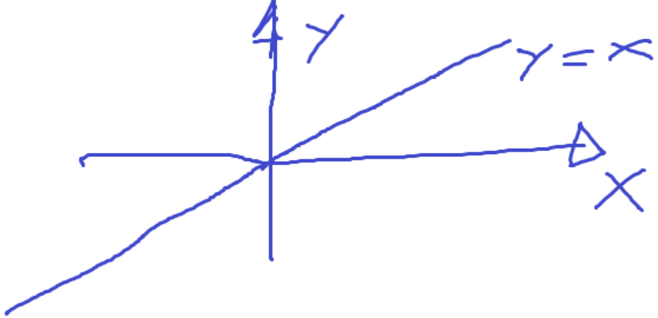
Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Υπενθύμιση - Στοιχεία Θεωρίας

1. Μονοτονία Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$).



Η $y=x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού $x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 > y_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Η $y=-x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ αφού

$x_1 > x_2 \Rightarrow -x_1 < -x_2 \Rightarrow y_1 < y_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Συνάρτηση 1-1

Μία συνάρτηση f λέγεται 1-1 στο πεδίο ορισμού της όταν για οποιαδήποτε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

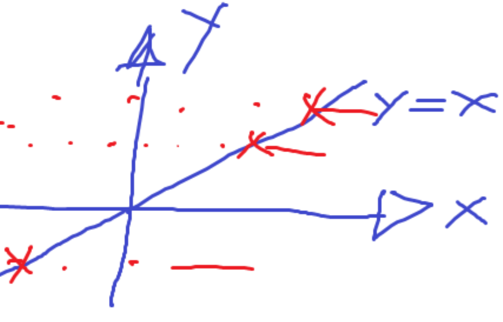
Συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ότι μία συνάρτηση είναι 1-1 αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Γραφική συνέπεια του ορισμού

Ο παραπάνω ορισμός σημαίνει γραφικά ότι κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, δηλ. της μορφής $y=\alpha$, τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο

Παραδείγματα

1



Επιλέγω x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$. Έχω:

$$\boxed{x_1 \neq x_2} \Rightarrow y_1 \neq y_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_1).$$

Άρα είναι 1-1.

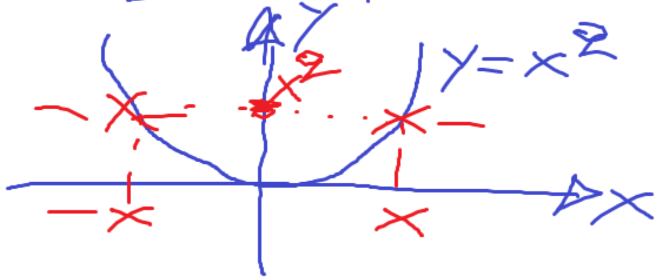
(5)

2.

Επιλέγω x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ έχω

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$. Άρα **δεν** είναι 1-1

3.



Επιλέγω $x_1 = x, \; x_2 = -x, \; y_1 = x^2, \; y_2 = (-x)^2 = x^2$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$. Άρα **δεν** είναι 1-1.

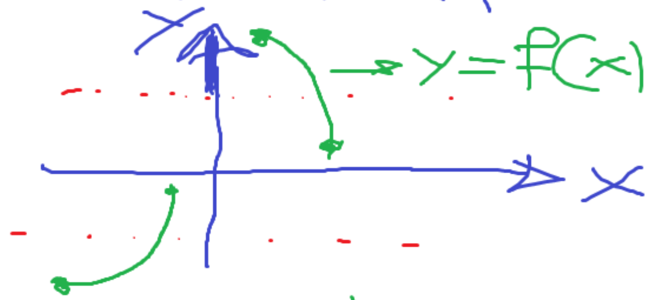
Παρατήρηση

Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε είναι 1-1 στο Δ επειδή λαμβάνει κάθε τιμή της μία μόνο φορά. Προσοχή το αντίστροφο δεν ισχύει.

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Αυτό σημαίνει ότι αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$, έστω με $x_2 > x_1$ έχω $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, δηλ. $f(x_2) \neq f(x_1)$

Άρα η f είναι 1-1.

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή μία συνάρτηση μπορεί να είναι 1-1 αλλά να μην είναι γνησίως μονότονη. Παράδειγμα



Η $y=f(x)$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

Σύμβολο

Αν f είναι συνάρτηση το πεδίο ορισμού το συμβολίζω με $D(f)$ και το σύνολο τιμών με $R(f)$

τους πραγματικούς τους συμβολίζω $\mathbb{R}$.

3.

Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $D(f)$ και σύνολο τιμών $R(f)$ η οποία είναι 1-1 στο $D(f)$. Ορίζεται τότε η συνάρτηση $\boxed{f^{-1}}$ ($\neq \frac{1}{f}$) με $D(f^{-1}) = R(f)$ και ισχύει

$$y = f(x) \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Η f^{-1} λέγεται αντίστροφη της f.

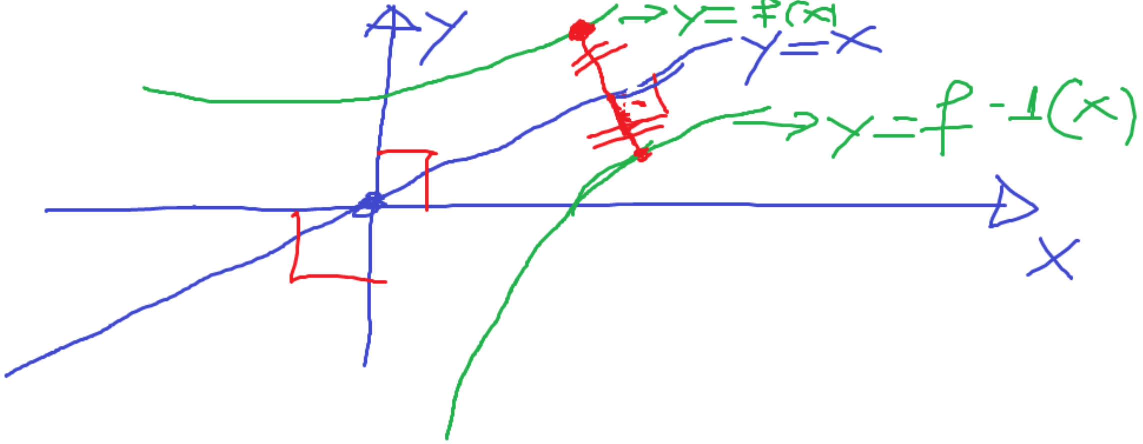
Παρατηρήσεις

1. Από τον ορισμό της f^{-1} έχουμε ότι:

1. $D(f^{-1}) = R(f)$
2. $R(f^{-1}) = D(f)$
3. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν το ίδιο είδος γνήσιας μονοτονίας.

2. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, δηλ. την ευθεία $y=x$

Δηλαδή



Π.χ. η $y=f(x)$ θα μπορούσε να είναι η $y=e^x$ και η η $y=f^{-1}(x)$ θα ήταν τότε η $y=\ln x$.

3. Μια συνάρτηση f μπορεί να μην αντιστρέφεται στο πεδίο ορισμού της αλλά σε ένα υποσύνολό του.

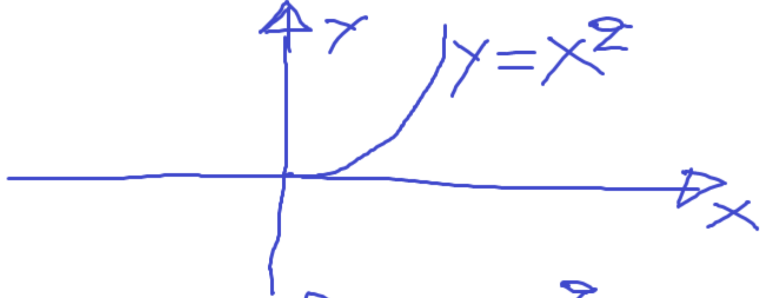
Παράδειγμα

Η συνάρτηση $y=x^2$ δεν είναι 1-1 και δεν αντιστρέφεται.

$y=x^2=f(x)$ $D(f)=\mathbb{R}$ $R(f)=[0,+\infty)$

$y=x^2\geq 0 \ \forall x\in D(f)$

Αν όμως περιορίσουμε την $y=x^2$ στο υποσύνολο $\Delta=[0,+\infty)$ του πεδίου ορισμού της τότε η $y=x^2$ γίνεται 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.



$y = f(x) = x^2$ $\quad D(f) = [0, +\infty)$ $\quad R(f) = [0, +\infty)$

Αυτή η $y=f(x)$, που είναι περιορισμός της αρχικής $y=f(x)$ στο $[0,+\infty)$ είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

Βρίσκω την αντίστροφη. Έχω:

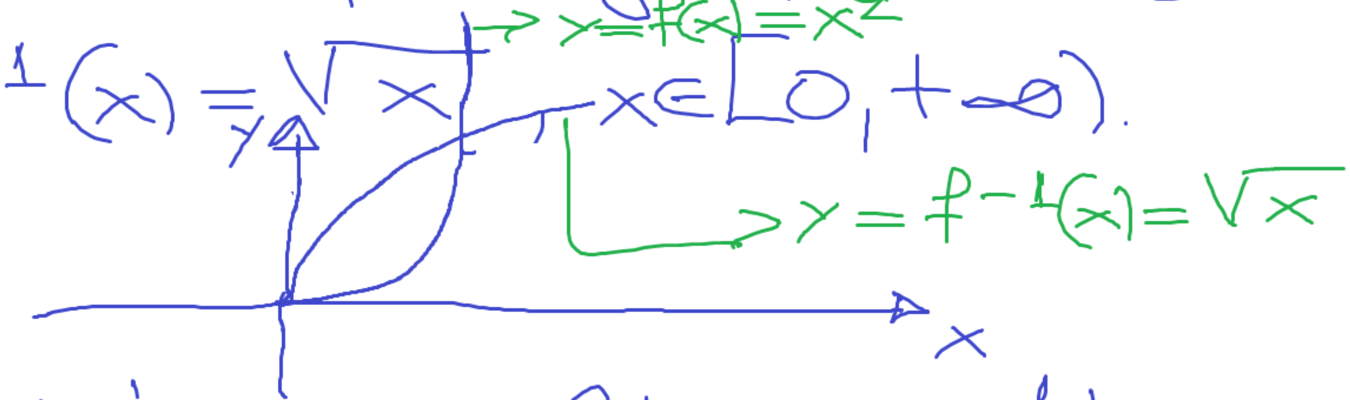
$y = f(x) = x^2$ $\quad x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y$ $\quad x = f^{-1}(y)$,

$y = x^2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{y}$ Αλλά $x \in [0,+\infty)$ Άρα $x = \sqrt{y}$

Έχω επομένως $\boxed{f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in [0,+\infty)}$ (1)

Συνήθως σε μια συνάρτηση την ανεξάρτητη μεταβλητή τη συμβολίζω με x. Έτσι η αντίστροφη η που δίνεται στην (1) μπορεί να γραφεί και ως

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x}, \quad x\in[0,+\infty).$$



Για να βρω τα σημεία τομής λύνω την εξίσωση

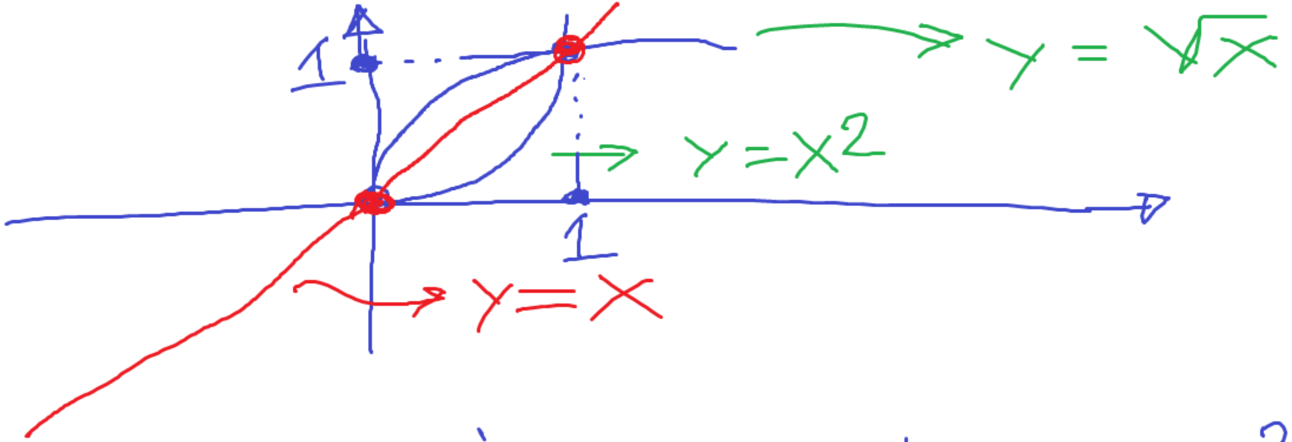
$$x^2=\sqrt{x} \Rightarrow x^4=x \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1^3)=0$$

Υπενθύμιση: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\Rightarrow x(x-1)(\underbrace{x^2+x+1}_{\substack{\Delta<0 \\ \text{Έχει 2 ρίζες} \\ \text{συζυγείς φανταστικές}}})=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=1$ ή

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$x=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ή $x=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Τα σημεία τομής δίνονται από τις πραγματικές ρίζες. Επομένως υπάρχουν δύο σημεία τομής, για $x=0$, και για $x=1$.



Πράγματι όπως περιμέναμε αφού η $y=x^2$ και η $y=\sqrt{x}$ είναι αντιστροφες η μία της άλλης, όλα τα σημεία τομής τους βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$ ως προς την οποία οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές.