

Ιδιότητες της ελαστικότητας

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} x$$

(1)

1. Αν $y(x) = f(x) + \alpha$ τότε $\varepsilon_y(x) = \frac{f(x)}{f(x) + \alpha} \varepsilon_f(x)$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

$$\varepsilon_y(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} x = \frac{(f(x) + \alpha)'}{f(x) + \alpha} x = \frac{f'(x)}{f(x) + \alpha} x = \frac{f(x)}{f(x) + \alpha} \frac{f'(x)}{f(x)} x$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y(x) = \frac{f(x)}{f(x) + \alpha} \varepsilon_f(x) \quad \text{εάν } y(x) = f(x) + \alpha \quad (1)$$

2. Εάν $y(x) = \alpha f(x)$ τότε $\varepsilon_y(x) = \varepsilon_f(x)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\varepsilon_y(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} x = \frac{(\alpha f(x))'}{\alpha f(x)} x = \frac{\alpha f'(x)}{\alpha f(x)} x = \varepsilon_f(x)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y(x) = \varepsilon_f(x) \quad \text{εάν } y(x) = \alpha f(x), \alpha \in \mathbb{R} \quad (2)$$

3. Εάν $y(x) = f(x)g(x)$ τότε $\varepsilon_y(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y(x) &= \frac{y'(x)}{y(x)} x = \frac{(f(x)g(x))'}{f(x)g(x)} x = \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} x \\ &= \frac{f'(x)g(x)}{f(x)g(x)} x + \frac{f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} x = \frac{f'(x)}{f(x)} x + \frac{g'(x)}{g(x)} x = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x) \quad \text{εάν } y(x) = f(x)g(x) \quad (3)$$

4. Εάν $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ τότε $\varepsilon_y(x) = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y(x) &= \frac{y'(x)}{y(x)} x = \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'}{\frac{f(x)}{g(x)}} x = \frac{\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}{\frac{f(x)}{g(x)}} x \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} x = \frac{f'(x)g(x)}{f(x)g(x)} x - \frac{f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} x = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x) \end{aligned}$$

$$= \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x). \text{ Συνεπώς: } \boxed{\text{Εαν } y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ τότε } \varepsilon_y(x) = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)} \quad (4)$$

②

5. Εαν $y(x) = f(x) \pm g(x)$ τότε $\varepsilon_y(x) = \frac{f(x)}{f(x)+g(x)} \varepsilon_f(x) \pm \frac{g(x)}{f(x)+g(x)} \varepsilon_g(x)$

$$\varepsilon_y(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} x = \frac{(f(x) \pm g(x))'}{f(x) \pm g(x)} x = \frac{f'(x) \pm g'(x)}{f(x) \pm g(x)} x = \frac{f'(x)}{f(x) \pm g(x)} x \pm \frac{g'(x)}{f(x) \pm g(x)} x = \frac{f(x)}{f(x) \pm g(x)} \frac{f'(x)}{f(x)} x \pm \frac{g(x)}{f(x) \pm g(x)} \frac{g'(x)}{g(x)} x$$

$$= \frac{f(x)}{f(x) \pm g(x)} \varepsilon_f(x) \pm \frac{g(x)}{f(x) \pm g(x)} \varepsilon_g(x)$$

$$\boxed{\text{Εαν } y(x) = f(x) \pm g(x) \text{ τότε } \varepsilon_y(x) = \frac{f(x)}{f(x) \pm g(x)} \varepsilon_f(x) \pm \frac{g(x)}{f(x) \pm g(x)} \varepsilon_g(x)} \quad (5)$$

6. Εαν $y(x) = h(g(x))$ τότε $\varepsilon_y(x) = \varepsilon_h(g) \cdot \varepsilon_g(x)$

$$\varepsilon_y(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} x = \frac{\frac{dh}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} x}{h(g(x))} = \underbrace{\frac{\frac{dh}{dg}}{h(g)}}_{\varepsilon_h(g)} \cdot \underbrace{\frac{\frac{dg}{dx} x}{g}}_{\varepsilon_g(x)}$$

$$\boxed{\text{Εαν } y(x) = h(g(x)) \text{ τότε } \varepsilon_y(x) = \varepsilon_h(g) \cdot \varepsilon_g(x)} \quad (6)$$

(3)

Άσκηση

Εστω $y(x) = x\sqrt{x^2+1}$ Υπολογίστε την ελαστικότητα της $\varepsilon_y(x)$

Λύση

Εστω $f(x) = x$ και $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ Άρα $y(x) = f(x)g(x)$

Από την 3^η ιδιότητα έχουμε ότι $\varepsilon_y(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)$

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} x = \frac{x'}{x} x = \frac{1}{x} x = 1 \quad \text{Άρα } \boxed{\varepsilon_f(x) = 1}$$

Την ελαστικότητα $\varepsilon_g(x)$ θα τη βρούμε με 2 τρόπους:

$$\varepsilon_g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} x = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}} x = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{\sqrt{x^2+1}} x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} x = \frac{x^2}{x^2+1}$$

1^{ος} τρόπος (Απευθείας από τον ορισμό)

2^{ος} τρόπος (Χρησιμοποιώντας την 6^η ιδιότητα)

6^η ιδιότητα: $\varepsilon_{y(x)} = \varepsilon_h(g(x))$ τότε $\varepsilon_y(x) = \varepsilon_h(g) \cdot \varepsilon_g(x)$

Εδώ έχουμε $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ Εάν $k(x) = \sqrt{x}$, $q(x) = x^2+1$ τότε $g(x) = k(q(x))$

Άρα από την ιδιότητα 6 έχουμε $\varepsilon_g(x) = \varepsilon_k(q) \cdot \varepsilon_q(x)$

Υπολογίζουμε πρώτα την $\varepsilon_k(q)$: $\varepsilon_k(q) = \frac{k'(q)}{k(q)} q = \frac{\frac{1}{2\sqrt{q}}}{\sqrt{q}} q = \frac{1}{2\sqrt{q}} \cdot q = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{\sqrt{q}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{q} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+1}$

$$\Rightarrow \varepsilon_k(q) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{q}}}{\sqrt{q}} (x^2+1) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1} \sqrt{x^2+1}} (x^2+1) = \frac{1}{2(x^2+1)} (x^2+1) = \frac{1}{2}$$

Υπολογίζουμε τώρα την $\varepsilon_q(x)$: $\varepsilon_q(x) = \frac{q'(x)}{q(x)} x = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} x = \frac{2x}{x^2+1} x = \frac{2x^2}{x^2+1}$

Άρα σύμφωνα με το 2^ο τρόπο έχουμε: $\varepsilon_g(x) = \varepsilon_k(q) \cdot \varepsilon_q(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$ Άρα

Άρα και με τους 2 τρόπους βγάλουμε το ιδιοσημείο για την $Eg(x)$.

(4)

Βρήκαμε ότι $Eg(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Έχουμε $y(x) = x\sqrt{x^2+1}$ $f(x) = x$ $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

Από ιδιότητα 3 $Ey(x) = Ef(x) + Eg(x) = 1 + \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$