Ασκήσεις στις οικονομικές συναρτήσεις

1η άσκηση

Η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι $q+2p=40$ όπου q η ζητούμενη ποσότητα και p η τιμή του προϊόντος, ενώ η συνάρτηση του μέσου κόστους του, είναι $AC=20q^{-1}+4$.

1ο ερώτημα

Προσδιορίστε την τιμή της q για την οποία μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

Έστω ότι $\Pi(q)$ είναι τα κέρδη. $\Pi(q)=TR(q)-TC(q)$. Πρέπει να βρούμε τα $TR(q)$ και τα $TC(q)$. Έχουμε ότι: $TR(q)=p\cdot q \xrightarrow{q+2p=40} \left(20-\frac{1}{2}q\right)\cdot q=20q-\frac{1}{2}q^2$

$q+2p=40 \Leftrightarrow 2p=40-q \Leftrightarrow p=\frac{1}{2}(40-q)=20-\frac{1}{2}q$

Άρα $\boxed{TR(q)=20q-\frac{1}{2}q^2}$ $\quad AC=\frac{TC(q)}{q} \Leftrightarrow TC(q)=q\,AC \Leftrightarrow TC(q)=q\left(20q^{-1}+4\right) \Leftrightarrow TC(q)=20+4q$

Άρα $\boxed{TC(q)=20+4q}$

Άρα $\Pi(q)=TR(q)-TC(q)=20q-\frac{1}{2}q^2-(20+4q)=20q-\frac{1}{2}q^2-20-4q=-\frac{1}{2}q^2+16q-20$

Άρα $\boxed{\Pi(q)=-\frac{1}{2}q^2+16q-20}$ $\quad \Pi'(q)=-q+16 \quad \Pi'(q)=0 \Leftrightarrow -q+16=0 \Leftrightarrow q=16$

$\Pi''(q)=-1$. Άρα η συνάρτηση $\Pi(q)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $q=16$ και επειδή η $\Pi(q)$ είναι γνησίως κοίλη ($\cap$, $\Pi''(q)=-1$) το τοπικό μέγιστο είναι και ολικό μέγιστο. Άρα τα κέρδη μεγιστοποιούνται όταν $q=16$. Το μέγιστο κέρδος είναι $\Pi(16)=-\frac{1}{2}16^2+16\cdot16-20=108$.

2ο ερώτημα

Υπολογίστε την ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

$q+2p=40 \Leftrightarrow q=40-2p \quad \mathcal{E}_q(p)=\frac{q'(p)}{q}p=\frac{(40-2p)'}{40-2p}p=\frac{-2}{40-2p}p$

Τα κέρδη μεγιστοποιούνται όταν $q=16$. Τότε έχουμε: $q+2p=40 \Leftrightarrow 2p=40-q \Leftrightarrow p=\frac{1}{2}(40-q) \Leftrightarrow p=20-\frac{1}{2}q$. Άρα όταν $q=16$ τότε $p=20-\frac{1}{2}16=20-8=12$. Βρήκαμε $\boxed{\mathcal{E}_q(p)=\frac{-2}{40-2p}p}$

Επομένως $\mathcal{E}_q(12)=\frac{-2}{40-2\cdot12}\cdot12=-\frac{24}{16}=-\frac{3}{2}=-1.5$. Άρα $\mathcal{E}_q(12)=-1.5$

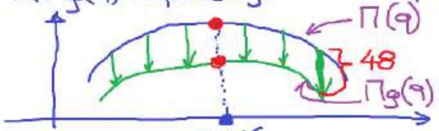
3ο ερώτημα

Υποθέστε ότι η κυβέρνηση επιβάλλει έναν εφάπαξ φόρο $t=48$ νομισματικών μονάδων. Πώς επηρεάζεται η καμπύλη των κερδών

Έχουμε $\Pi(q)=TR(q)-TC(q)$. Μετά την επιβολή της φορολογίας έχουμε τα νέα έξοδα μετά την επιβολή της φορολογίας θα είναι $TC_\varphi(q)=TC(q)+48$. Δηλαδή τα νέα κέρδη $\Pi_\varphi(q)=TR(q)-TC_\varphi(q)=TR(q)-(TC(q)+48)=TR(q)-TC(q)-48=\Pi(q)-48$. Δηλαδή $\boxed{\Pi_\varphi(q)=\Pi(q)-48}$. Έχουμε $\Pi(q)=-\frac{1}{2}q^2+16q-20$. Άρα $\Pi_\varphi(q)=-\frac{1}{2}q^2+16q-20-48$

Άρα $\boxed{\Pi_\varphi(q)=-\frac{1}{2}q^2+16q-68}$ Προσέξτε ότι η καμπύλη των κερδών παρουσιάζει μέγιστο στο ίδιο σημείο που παρουσίαζε πριν, αφού $\Pi_\varphi'(q)=-q+16=\Pi'(q)$

Επιπλέον $\Pi_g'(q)=0 \Leftrightarrow q=16$ $\Pi_g''(q)=-1=\Pi''(q)$ Άρα τα $\Pi_g(q)$ παρουσιάζουν τοπικό μέγιστο για $q=16$ όπως και τα $\Pi(q)$. Δηλαδή σε ένα γράφημα θα είχαμε



Οι $\Pi(q)$ και $\Pi_g(q)$ είναι παραβολές, και οι 2 έχουν μέγιστο στο $q=16$. Η $\Pi_g(q)$ είναι μετατόπιση προς τα κάτω της $\Pi(q)$ κατά 48 μονάδες.

4^{o} Ερώτημα

· Έστω ότι η κυβέρνηση επιβάλλει ένα φόρο ύψους t νομισματικών μονάδων ανά μονάδα πωλούμενης ποσότητας. Να υπολογιστεί η ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδη μετά την επιβολή φόρου. Επίσης να υπολογιστεί η τιμή που πρέπει να λάβει ο t ώστε η κυβέρνηση να εισπράξει τα μέγιστα φορολογικά έσοδα από τη συγκεκριμένη φορολογία. Πόσα θα είναι τα έσοδα αυτά.

Μετά την φορολογία $TC_g(q)=TC(q)+\text{φόρο}=TC(q)+tq \Leftrightarrow TC_g(q)=20+4q+tq$

Επομένως $\Pi_g(q)=TR(q)-TC_g(q)=TR(q)-(TC(q)+tq)=\underbrace{TR(q)-TC(q)}_{\Pi(q)}-tq \Leftrightarrow \Pi_g(q)=\Pi(q)-tq$

Άρα $\Pi_g(q)=\left(-\frac{1}{2}q^2+16q-20\right)-tq=-\frac{1}{2}q^2+(16-t)q-20$. Άρα $\Pi_g'(q)=-q+16-t$.

$\Pi_g'(q)=0 \Leftrightarrow -q+16-t=0 \Leftrightarrow q=16-t$. Άρα τα $\Pi_g(q)$ παρουσιάζουν υποψήφιο ακρότατο στο $q=16-t$. Επειδή $\Pi_g''(q)=-1$ τα κέρδη μεγιστοποιούνται για $\boxed{q=16-t.}$

Τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης είναι $GR=tq$
↳ (Government Revenue)

Τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης όταν μεγιστοποιούνται τα κέρδη της επιχείρησης είναι

$GR(t)=t(16-t)=16t-t^2$. $GR'(t)=16-2t$ $GR'(t)=0 \Leftrightarrow 16-2t=0 \Leftrightarrow 16=2t \Leftrightarrow t=8$.

$GR''(t)=-2<0$. Άρα τα GR μεγιστοποιούνται όταν $t=8$ και είναι $GR=t(16-t)\Big|_{t=8}=8(16-8)=8\cdot 8=64$.

Άσκηση

Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για ένα αγαθό εκφράζονται από τις σχέσεις $q=(10+p)(3+0.3p)$ και $q=2(10-p)(3.5+0.35p)$.

1° ερώτημα

Να βρείτε ποια από τις 2 συναρτήσεις είναι συνάρτηση ζήτησης του αγαθού και ποια η συνάρτηση προσφοράς του.

Σκεπτικό: Γενικά η συνάρτηση ζήτησης είναι φθίνουσα και η συνάρτηση προσφοράς αύξουσα. Άρα θα μελετήσουμε την 1η παράγωγο των συναρτήσεων αυτών.

$$\frac{dq}{dp}=\frac{d(10+p)(3+0.3p)}{dp}=\frac{d(0.3p^2+6p+30)}{dp}=0.6p+6$$

$$\frac{dq}{dp}=\frac{d[2(10-p)(3.5+0.35p)]}{dp}=\frac{d(70-0.7p^2)}{dp}=-1.4p$$

Θα πρέπει $p\geq 0$ και $q\geq 0$. Άρα $0.6p+6>0$ και $-1.4p\leq 0$.

Άρα η πρώτη συνάρτηση είναι αύξουσα και επομένως είναι η συνάρτηση προσφοράς q_s ενώ η δεύτερη συνάρτηση είναι φθίνουσα και επομένως είναι συνάρτηση ζήτησης q_D. Έχουμε:

$$q_s=(10+p)(3+0.3p)=0.3p^2+6p+30, \quad q_d=2(10-p)(3.5+0.35p)=70-0.7p^2$$

2° ερώτημα

Να υπολογίσετε την τιμή και την ποσότητα ισορροπίας.

Για να έχουμε υπάρχει ισορροπία στην αγορά θα πρέπει

$$\boxed{q_s=q_d}$$

$$q_s=q_d \Leftrightarrow 0.3p^2+6p+30=70-0.7p^2 \Leftrightarrow p^2+6p-40=0$$

$p^2+6p-40$: $\Delta=6^2-4(-40)=160+36=196$ $\quad p_1=\frac{-6+\sqrt{196}}{2}=\frac{-6+14}{2}=\frac{8}{2}=4$

$p_2=\frac{-6-\sqrt{196}}{2}=\frac{-6-14}{2}=\frac{-20}{2}=-10$. Πρέπει $p\geq 0$. Άρα $\boxed{p=4}$ τιμή ισορροπίας

Και επομένως $q=70-0.7\cdot 4^2=58.8$ Άρα $\boxed{q=58.8}$ ποσότητα ισορροπίας

3η ερώτημα

Να υπολογίσετε την ελαστικότητα ζήτησης και προσφοράς στο σημείο ισορροπίας.

$$q_D = 70 - 0.7p^2$$
$$q_S = 0.3p^2 + 6p + 30$$

Ελαστικότητα ζήτησης $\varepsilon_D(p)$

$$\varepsilon_D(p) = \frac{q_D'(p)}{q_D(p)}p = \frac{(70-0.7p^2)'}{70-0.7p^2}p = \frac{-1.4p}{70-0.7p^2}p = \frac{-1.4p^2}{70-0.7p^2}$$

Στο σημείο ισορροπίας $p=4$. Άρα

$$\varepsilon_D(4) = \frac{-1.4\cdot 4^2}{70-0.7\cdot 4^2} = \frac{-22.4}{58.8} \simeq -0.381$$

Δηλαδή αν η τιμή του αγαθού αυξηθεί από 4 σε 5 νομισματικές μονάδες η ζήτηση θα μειωθεί από 58.8 σε $58.8 - 0.381 = 58.419$

Ελαστικότητα προσφοράς $\varepsilon_S(p)$

$$\varepsilon_S(p) = \frac{q_S'(p)}{q_S(p)}p = \frac{(0.3p^2+6p+30)'}{0.3p^2+6p+30}p = \frac{(0.6p+6)\cdot p}{0.3p^2+6p+30} = \frac{0.6p^2+6p}{0.3p^2+6p+30}$$

Συνεπώς στο σημείο ισορροπίας η ελαστικότητα της προσφοράς είναι $(p=4)$:

$$\varepsilon_S(4) = \frac{0.6\cdot 4^2+6\cdot 4}{0.3\cdot 4^2+6\cdot 4+30} = \frac{33.6}{58.8} \simeq 0.571$$

Δηλαδή αν η τιμή αυξηθεί από 4 σε 5 νομισματικές μονάδες η προσφορά θα αυξηθεί από 58.8 σε $58.8 + 0.571 = 59.371$.