Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

(1)

3) $f(x)=\varepsilon\varphi x$

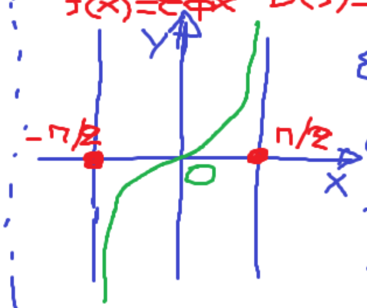
$\varepsilon\varphi x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $D(f)=\mathbb{R}-\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$

$R(f)=\mathbb{R}$

$\varepsilon\varphi(x+\pi)=\varepsilon\varphi x \ \forall x\in D(f)$

Η $f(x)=\varepsilon\varphi x$ δεν είναι "1-1". Γίνεται "1-1" αν την περιορίσουμε στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Έτσι προκύπτει η συνάρτηση

$f(x)=\varepsilon\varphi x$ $D(f)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $R(f)=\mathbb{R}$

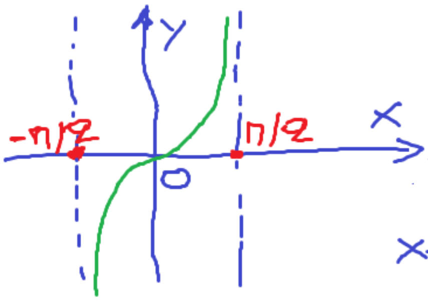


$\varepsilon\varphi 0=0$

$0 \xrightarrow{\varepsilon\varphi} 0$, $0 \xrightarrow{\tau o\xi\varepsilon\varphi} 0$

$\tau o\xi\varepsilon\varphi 0=0$

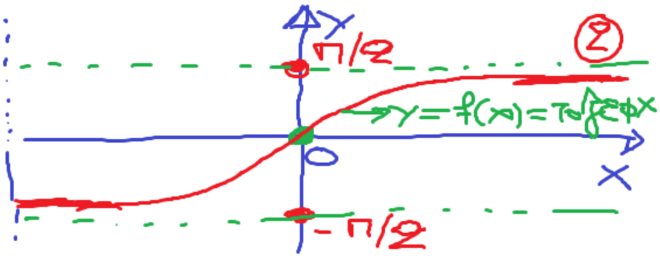
$\tau o\xi\varepsilon\varphi=f^{-1}$



$\varepsilon\varphi 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x = -\infty$



Μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη. Την αντίστροφη τη συμβολίζουμε με f^{-1} ή με τοξεφx.

$D(f^{-1}) = D(\text{τοξεφ}x) = R(\varepsilon\varphi x) = \mathbb{R}$

$R(f^{-1}) = R(\text{τοξεφ}x) = D(\varepsilon\varphi x) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\varepsilon\varphi 0 = 0 \Leftrightarrow \text{τοξεφ}\, 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \text{τοξεφ}x = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \text{τοξεφ}x = -\frac{\pi}{2}$

Εύρεση παραγώγου της τοξεφx $1^{ος}$ τρόπος

$y = εφx \Leftrightarrow τοξεφ y = x = f^{-1}(y)$

Από πρόταση έχουμε

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

Έχω: $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ Πράγματι:

$$\frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

③

Άρα:

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{d(τοξεφy)}{dy} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2},\ y \in \mathbb{R},\ ή,$$

$$\boxed{\frac{d(τοξεφx)}{dx} = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}}$$

$2^{ος}$ τρόπος

$y = \text{τοξεφ}\,x,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$y = \text{τοξεφ}\,x \Leftrightarrow \text{εφ}\,y = x$

$\text{εφ}\,y = x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 y}\cdot y' = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$

$(\text{τοξεφ}\,x)' = \frac{1}{1+x^2},\ x\in R$

4) $f(x) = \text{σφ}\,x$ ④

$\text{σφ}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$

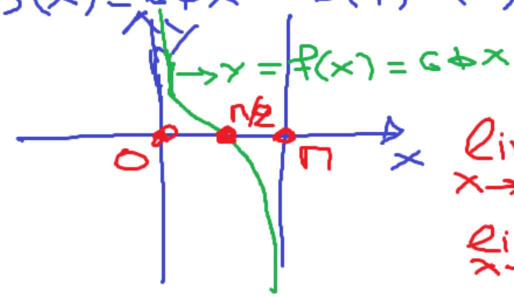
$D(f) = R - \{\kappa\pi, \kappa\in\mathbb{Z}\},\ R(f) = \mathbb{R}$

Η σφx είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο π:

$\text{σφ}(x+\pi) = \text{σφ}\,x \ \ \forall x\in D(f)$

Η $f(x)=σφx$ δεν είναι "1-1". Επομένως δεν ορίζεται η αντίστροφη. Αν την περιορίσουμε στο $(0,π)$ γίνεται "1-1" και επομένως ορίζεται η αντίστροφη. Προκύπτει η εξής συνάρτηση:

$f(x)=σφx \quad D(f)=(0,π) \quad R(f)=\mathbb{R}$



$σφ\frac{π}{2} = \frac{συν\frac{π}{2}}{ημ\frac{π}{2}} = \frac{0}{1} = 0$

$\lim_{x\to π^-} σφx = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} σφx = +\infty$

Για αυτή την $f(x)$ ορίζεται η αντίστροφη η οποία συμβολίζεται με f^{-1} ή με τοξσφx.

$D(f^{-1}) = D(τοξσφx) = R(f) = \mathbb{R}$

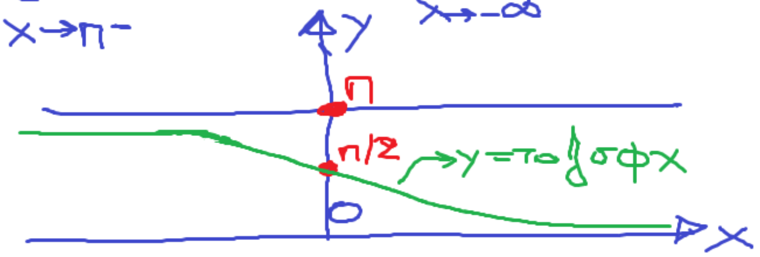
$R(f^{-1}) = R(τοξσφx) = D(f) = D(σφx) = (0,π)$

· Έχουμε:

$$\sigma\varphi\frac{\pi}{2}=0 \Longleftrightarrow \tau o\xi\sigma\varphi\, 0=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sigma\varphi x=+\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\tau o\xi\sigma\varphi x=0$$

$$\lim_{x\to \pi^-}\sigma\varphi x=-\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\tau o\xi\sigma\varphi x=\pi$$



Εύρεση παραγώγου της $f(x)=\sigma\varphi x$

(6)

$1^{\underline{ος}}$ τρόπος

$$y=\sigma\varphi x \Longleftrightarrow \tau o\xi\sigma\varphi y = x = f^{-1}(y)$$

Από πρόταση έχουμε:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\sin^2 x=-\frac{1}{1+\cot^2 x}=-\frac{1}{1+y^2}.$$

Άρα: $\dfrac{d(\tau o\xi\sigma\varphi y)}{dy}=-\dfrac{1}{1+y^2}$, $y\in\mathbb{R}$

Αν συμβολίσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή με x, έχουμε:

$$\boxed{\frac{d(\text{τοξσφ}x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}}$$

Δηλαδή:

$$\frac{d(\text{τοξσφ}x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}$$

7

2ος τρόπος

$y = \text{τοξσφ}x \Leftrightarrow \text{σφ}y = x$

$\text{σφ}y = x \Rightarrow -\frac{1}{\eta\mu^2 y}\cdot y' = 1 \Rightarrow y' = -\eta\mu^2 y$

$\Rightarrow y' = -\frac{1}{1+\text{σφ}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$

Ολοκληρώματα

Ορισμός

Ονομάζουμε ολοκλήρωμα $F(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ εάν η $F(x)$ είναι τέτοια ώστε $F'(x)=f(x)$. Γράφουμε επίσης

$$\int f(x)\,dx = F(x).$$

Δηλαδή

$$F'(x)=f(x) \Longleftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x)$$

Παρατήρηση

Εάν $F'(x)=f(x)$ τότε και $\left(F(x)+c\right)'=f(x),\ c\in\mathbb{R}$. Επομένως κάθε συνάρτηση $f(x)$ έχει άπειρα αόριστα ολοκληρώματα και γράφουμε

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}}$$

Παρατήρηση

$(\ln|x|)' = \;;$

Διακρίνω περιπτώσεις

- $x>0 \quad |x|=x \quad (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $x<0 \quad |x|=-x \quad (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

Δηλ. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

Επομένως $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,\ c \in R$

$$\left(\ln|f(x)|\right)' = ;$$ 10

- $f(x) > 0$ $\quad |f(x)| = f(x)$ $\quad \left(\ln|f(x)|\right)' = \left(\ln(f(x))\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $f(x) < 0$ $\quad |f(x)| = -f(x)$ $\quad \left(\ln|f(x)|\right)' = \left(\ln(-f(x))\right)'$

$$= \frac{(-f(x))'}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Δηλαδή $\left(\ln|f(x)|\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Επομένως $\boxed{\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c,\ c \in \mathbb{R}.}$

Έστω ότι $\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow (F(x)+c)' = f(x)$ 11

$\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Άρα $\boxed{\int F'(x)\,dx = F(x) + c,\ c \in R}$

Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων

1. $\int x^{\kappa}\,dx = \dfrac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1} + c,\ \kappa \in \mathbb{R} - \{-1\},\ c \in \mathbb{R}$

2. $\int x^{-1}\,dx = \int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R}$

3. $\int \eta\mu x\,dx = -\sigma\upsilon\nu x + c,\ c \in \mathbb{R}$

4. $\int \sigma\upsilon\nu x\,dx = \eta\mu x + c,\ c \in \mathbb{R}$

5. $\int \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \varepsilon\varphi x + c,\ c \in \mathbb{R}$

6. $\int \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}\,dx = -\sigma\varphi x + c,\ c \in \mathbb{R}$

7. $\int e^x\,dx = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$

8. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c,\ a > 0,\ a \neq 1$

10. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \text{Τοξεφ}\,x + c,\ c \in \mathbb{R}$

11. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = -\text{Τοξσφ}\,x + c,\ c \in \mathbb{R}$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{τοξημ}\,x + c,\ c \in R$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\text{τοξσυν}\,x + c,\ c \in R$

14. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c,\ c \in R$

15. $\int F'(x)\,dx = F(x) + c,\ c \in R$

Βασικές ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων

1. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Προσοχή: $\int f(x)g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx$

2. $\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,\ a\in R$

3. $\int (a f(x) \pm \beta g(x))\,dx = a\int f(x)\,dx \pm \beta\int g(x)\,dx,\ a,\beta\in R$

$3 \Leftrightarrow (1),(2)$

$$4.\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c,\ c \in R$$

$$5.\quad \int F'(x)\,dx = F(x) + c,\ c \in R$$