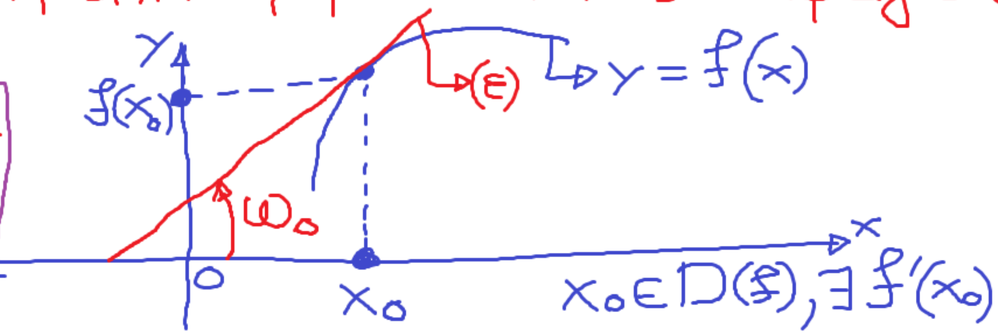
Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου 1

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

$$\boxed{f'(x_0) = εφω_0}$$

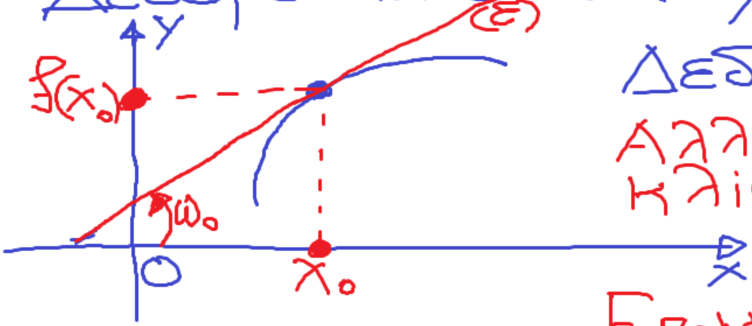


Η (ε) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με το γράφημα. Είναι η εφαπτόμενη ευθεία του γραφήματος στο σημείο $(x_0, f(x_0))$

Εξίσωση της εφαπτόμενης και κάθετης ευθείας σε σημείο $(x_0, f(x_0))$ του γραφήματος μιας συνάρτησης $y=f(x)$ ②

Δεδομένα: $x_0 \in D(f)$, $\exists\, f'(x_0)$

↳ Υπάρχει



Δεδομένα: $(x_0, f(x_0))$, $f'(x_0) = εφω_0$

Αλλά, από τον ορισμό της κλίσης λ μιας ευθείας,

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ λ: $λ = εφω_0$

Επομένως τα δεδομένα για την (ε) είναι:

Τα δεδομένα για την (ε) είναι: (3)

Το σημείο $\boxed{(x_0, f(x_0))}$ από το οποίο περνάει και η κλίση της $\boxed{\lambda_{(\varepsilon)} = \varepsilon\varphi\omega_0 = f'(x_0)}$

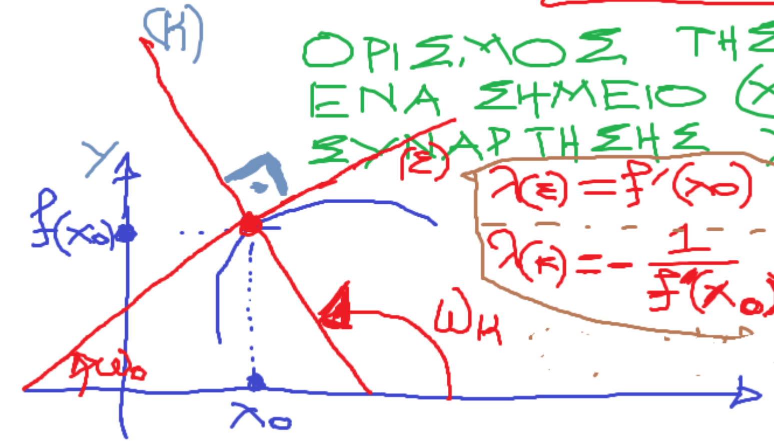
Ξέρουμε από θεωρία ότι αν μια ευθεία (ε) περνά από το $(x_0, f(x_0))$ και έχει κλίση λ τότε η εξίσωση της (ε) είναι

$$\boxed{y - y_0 = \lambda(x - x_0)} \quad (1)$$

Εδώ γνωρίζουμε ότι για την εφαπτόμενη ευθεία (ε) $\boxed{\lambda_{(\varepsilon)} = f'(x_0)}$ (2)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Επομένως η εξίσωση της εφαπτόμενης ευ- (4)
θείας (ε) είναι $\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$ (3)



ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΘΕΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ $(x_0, f(x_0))$ ΣΤΟ ΓΡΑΦΗΜΑ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $y = f(x)$

$$\lambda(\varepsilon) = f'(x_0)$$

$$\lambda(H) = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

(ε) είναι η εφαπτόμενη ευθεία

(Η) είναι η κάθετη στην (ε) στο σημείο $(x_0, f(x_0))$

Γνωρίζουμε ότι:

$\lambda(\varepsilon)\cdot\lambda(H) = -1 \Rightarrow f'(x_0)\cdot\lambda(H) = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{(\kappa)} = -\frac{1}{f'(x_0)}}$$

Συνοψίζοντας

$$\lambda_{(\varepsilon)} = \varepsilon\varphi\omega_0 = f'(x_0)$$

$$\lambda_{(\kappa)} = \varepsilon\varphi\omega_\kappa = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Οι εξισώσεις των $\lambda(\varepsilon)$ και $\lambda(\kappa)$ είναι:

Της εφαπτόμενης (ε) είναι: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Της κάθετης (κ) είναι: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Άσκηση (σελ. 6)

Βρείτε τα σημεία της παραβολής $y=f(x)=x^2-3x+7$ στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη με την ευθεία $x-y+4=0$

Λύση

$x-y+4=0 \Rightarrow y=1x+4 \ (\varepsilon_1)$

Επομένως η κλίση $\lambda(\varepsilon_1)=1$

$f'(x)=2x-3$. Θέλουμε

$2x-3=1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $(2,5)$

$f(2)=2^2-3\cdot 2+7$
$=4-6+7$
$=-2+7=5$

Άσκηση

Σελ. 7

Να βρεθούν οι τιμές για τις σταθερές a, m ώστε οι καμπύλες $y = f(x) = x^3+x^2+x$ και $h(x)=ax^m$ να είναι κάθετες στο $(1,3)$

Λύση

$y=f(x)$ Οι καμπύλες $f(x), h(x)$ είναι κάθετες μεταξύ τους στο $(1,3)$ εάν οι εφαπτόμενες ευθείες τους (ε) και (ε1) αντίστοιχα είναι κάθετες στο $(1,3)$.

Το $(1,3)$ ανήκει στην $h(x)$: $h(1)=3 \Rightarrow a\,1^m=3 \Rightarrow \boxed{a=3}$. Επομένως $\boxed{h(x)=3x^m}$

$f'(x)=3x^2+2x+1 \Rightarrow f'(1)=6$. $h'(x)=3mx^{m-1} \Rightarrow h'(1)=3m$.

Έχουμε: $\lambda_{(\varepsilon)} = f'(1) = 6$ και $\lambda_{(\varepsilon_1)} = h'(1) = 3m$ (8)

Πρέπει: $\lambda_{(\varepsilon)} \cdot \lambda_{(\varepsilon_1)} = -1 \Rightarrow 6 \cdot 3m = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{18}}$ Άρα $\boxed{a = 3, \ m = -\frac{1}{18}}$

Επομένως $h(x) = ax^m = 3x^{-\frac{1}{18}}$

$= 3 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{18}}} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[18]{x}} = \frac{3}{\sqrt[18]{x}}$

Άσκηση 9

Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της συνάρτησης $f(x)=x^{\frac{2}{5}}$ στο σημείο $x_0=3$

Λύση

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \underset{x_0=3}{\Longrightarrow} \dots$$

Βασικές Οικονομικές Συναρτήσεις (10)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Η συνάρτηση παραγωγής $q=Q(x)$ μας δίνει τη μέγιστη εκροή (ποσότητα) προϊόντος που παράγεται από δεδομένη ποσότητα εισροών x (x είναι ένας συντελεστής παραγωγής, για παράδειγμα x μπορεί να είναι το κεφάλαιο K ή η εργασία L). Δηλαδή, $q=Q(K)$ ή $q=Q(L)$. (Γενικά $q=Q(K,L)$).

Ιδιότητες της Q(x): (11)

1) Συνεχής 2) Παραγωγίσιμη 3) $Q(0)=0$

4) $q=Q(x)\geq 0$

Δύο σχετιζόμενες οικονομικές συναρτήσεις είναι το

1) $$AQ(x)=\frac{Q(x)}{x}$$

↳ Average

Η $AQ(x)$ είναι η συνάρτηση του μέσου προϊόντος και μας δίνει το παραγόμενο προϊόν ανά μονάδα συντελεστή παραγωγής.

2) $MQ(x) = \frac{dQ(x)}{dx}$ $(q = Q(x))$ 12

$\hookrightarrow$ Marginal

Η $MQ(x)$ είναι η συνάρτηση του οριακού προϊόντος. Παρατηρώ ότι:

Αν πάρω $dx = 1$ τότε $MQ(x) = dQ(x)$. Δηλαδή,

Το $MQ(x)$ μας δίνει πόσο μεταβάλλεται η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος όταν ο συντελεστής παραγωγής αυξηθεί κατά 1