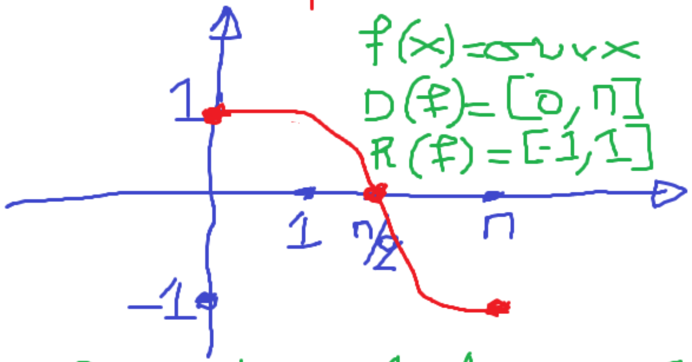
Εύρεση παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης του συνημιτόνου. ①



$f(x)=\text{συν}x$
$D(f)=[0,\pi]$
$R(f)=[-1,1]$

$\text{συν}0=1$
$\text{συν}\frac{\pi}{2}=0$
$\text{συν}\pi=-1$

Η $f(x)$ είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Την αντίστροφη συνάρτηση τη συμβολίζουμε με τοξσυνx. Δηλαδή είναι $f^{-1}(x)=\text{τοξσυν}x$. Έχουμε $D(f^{-1})=R(f)=[-1,1]$, $R(f^{-1})=D(f)=$
$=[0,\pi]$.

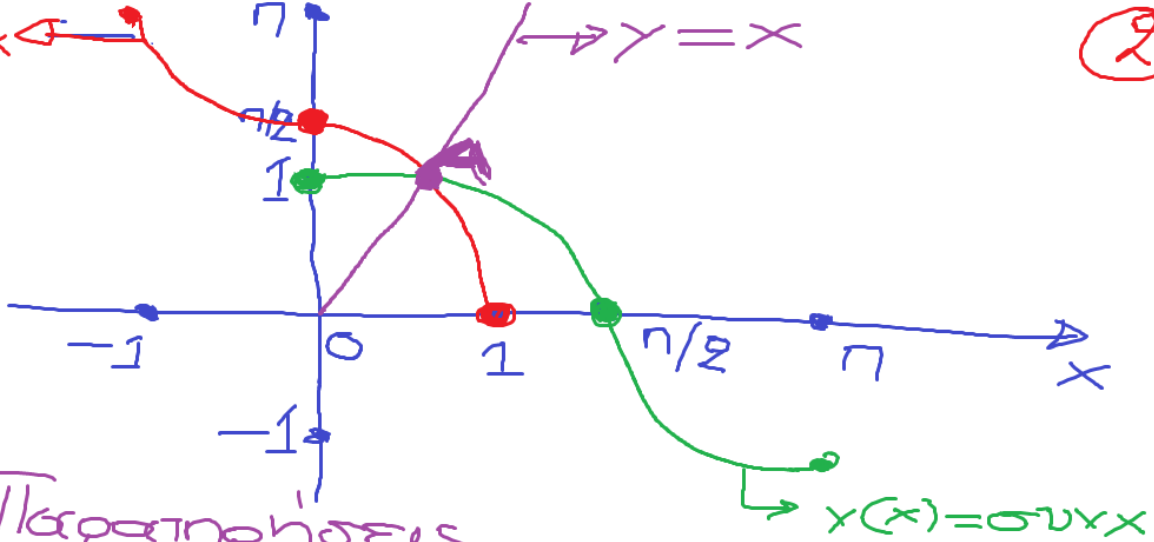
$\sigma\upsilon\nu 0 = 1 \Leftrightarrow \tau o\xi\sigma\upsilon\nu 1 = 0$

$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow \tau o\xi\sigma\upsilon\nu 0 = \frac{\pi}{2}$

$\sigma\upsilon\nu \pi = -1 \Leftrightarrow \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(-1) = \pi$

$D(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x) = [-1, 1]$

$R(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x) = [0, \pi]$



Παρατηρήσεις

- Η συνx και η τοξσυνx έχουν το ίδιο είδος γνήσιας μονοτονίας, είναι και οι δύο γνησίως φθίνουσες
- Το σημείο τομής Α βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=x$.

Εύρεση παραγώγου της $y(x)=\text{τοξσυν}x$ (3)

Α τρόπος (Ξεκινάμε από την $y(x)=\text{τοξσυν}x$)

Πυθαγόρειο: $\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1$

$x \underset{\text{συν}}{\overset{\text{Τοξσυν}}{\rightleftarrows}} y$

$y=\text{τοξσυν}x,\ x\in[-1,1],\ y\in[0,\pi]$

$y(x)=\text{τοξσυν}\,x \iff \sigma\upsilon\nu\, y(x)=x$

$\sigma\upsilon\nu\, y(x)=x \Rightarrow -\eta\mu\, y(x)\cdot y'(x)=1 \Rightarrow \boxed{y'(x)=\boxed{-}\dfrac{1}{\eta\mu\, y(x)}}$ (1)

$\eta\mu^2 y(x)+\sigma\upsilon\nu^2 y(x)=1 \Rightarrow \eta\mu\, y(x)=\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 y(x)}$

Αφού $y(x)\in[0,\pi]$, $\eta\mu\, y(x)\geq 0$ ($=0$ όταν $y(x)=0$, $y(x)=\pi$)

Επομένως $\eta\mu\, y(x)=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 y(x)}=\sqrt{1-x^2}$

Αντ/στώ στην (1) και έχω: $\boxed{y'(x)=\boxed{-}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)}$

Επομένως $\boxed{(\text{τοξσυν}\,x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)}$

Β τρόπος (Ξεκινάμε από την $y(x)=\text{συν}x$)

$\boxed{y=f(x)=\text{συν}x}$, $x\in[0,\pi]$, $y\in[-1,1]$

$y=f(x)=\text{συν}x \Leftrightarrow \text{τοξσυν}\,y = x = f^{-1}(y)$

$$x \underset{\text{τοξσυν}}{\overset{\text{συν}}{\rightleftarrows}} y$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} = \frac{1}{-\text{ημ}x} = -\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{συν}^2x}}$$

Επειδή $x\in[0,\pi]$, $\text{ημ}x \geq 0$ ($=0$ μόνο για $x=0, x=\pi$).

Επομένως: $\dfrac{df^{-1}(y)}{dy} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \; y \in (-1,1)$ 5

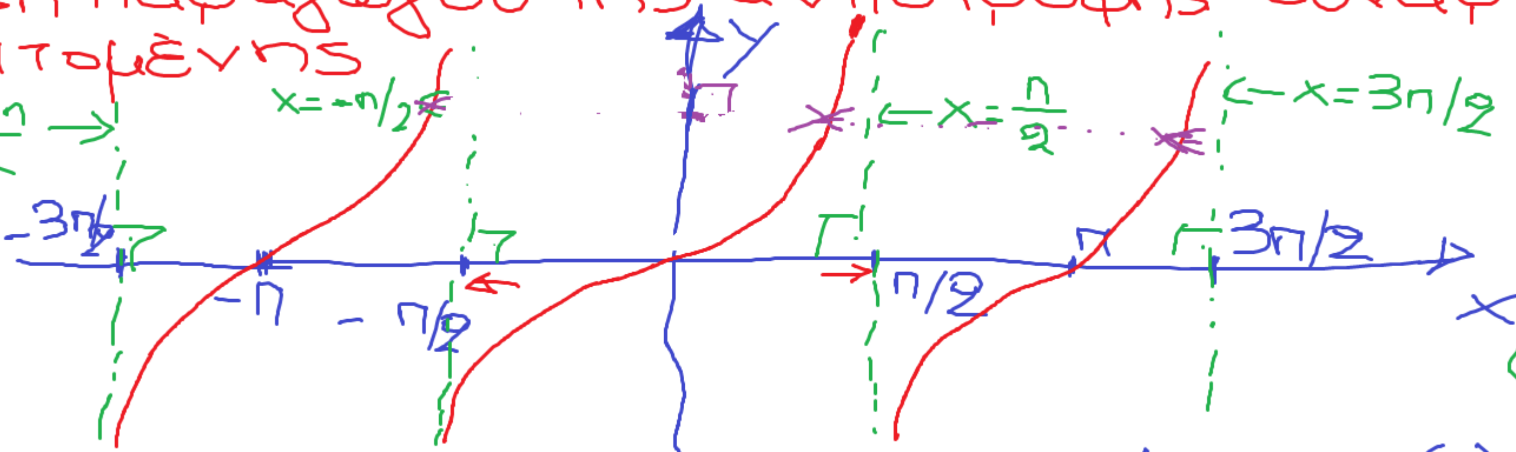
$$\Rightarrow \boxed{(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \; y \in (-1,1)}$$

Ή ονομάζοντας $y \to x$ έχουμε

$$\boxed{(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; x \in (-1,1)}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα που βρήκαμε και με τον Α τρόπο.

Εύρεση παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης της εφαπτομένης (6)



$\varepsilon\varphi 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x = -\infty$

$y = f(x) = \varepsilon\varphi x$, $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $D(f) = \mathbb{R} - \left\{(2\kappa+1)\frac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$

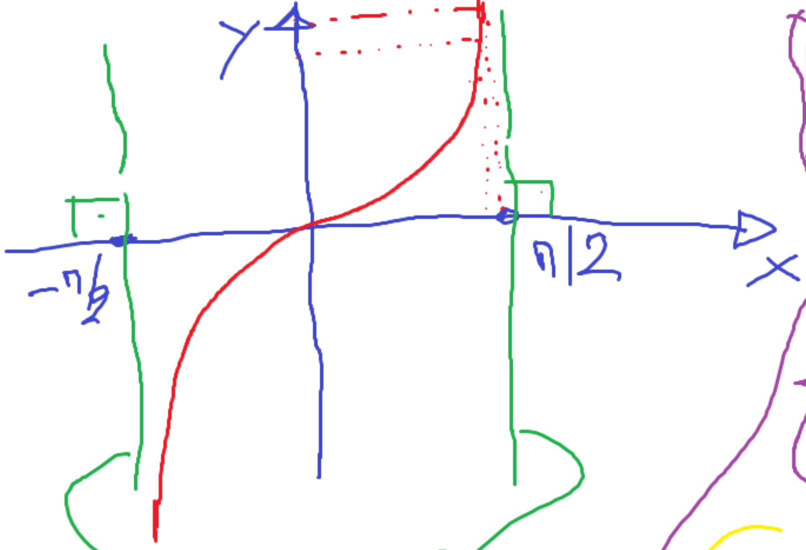
$\mathbb{Z}$ είναι οι ακέραιοι. Η εφx είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο π: $\boxed{\varepsilon\varphi(x+\pi) = \varepsilon\varphi x \quad \forall\, x\in D(f)}$

Οι ευθείες $x=\pi/2, -\pi/2, 3\pi/2, -3\pi/2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες

7

Η $y=f(x)=εφx$ δεν είναι 1-1 και επομένως δεν αντιστρέφεται. Αν την περιορίσουμε στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ γίνεται 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Γενικά θα μπορούσαμε να την περιορίσουμε σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $\left(κπ-\frac{\pi}{2},κπ+\frac{\pi}{2}\right)$, $κ\in\mathbb{Z}$, και θα γινόταν πάλι 1-1.

Την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x)$ την συμβολίζουμε με $f^{-1}(x)=τοξεφx$, και έχουμε, $D(f^{-1})=R(f)=\mathbb{R}$, $R(f^{-1})=D(f)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.



κατακόρυφες ασύμπτωτες

$y=f(x)=\varepsilon\varphi x$

$D(f)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

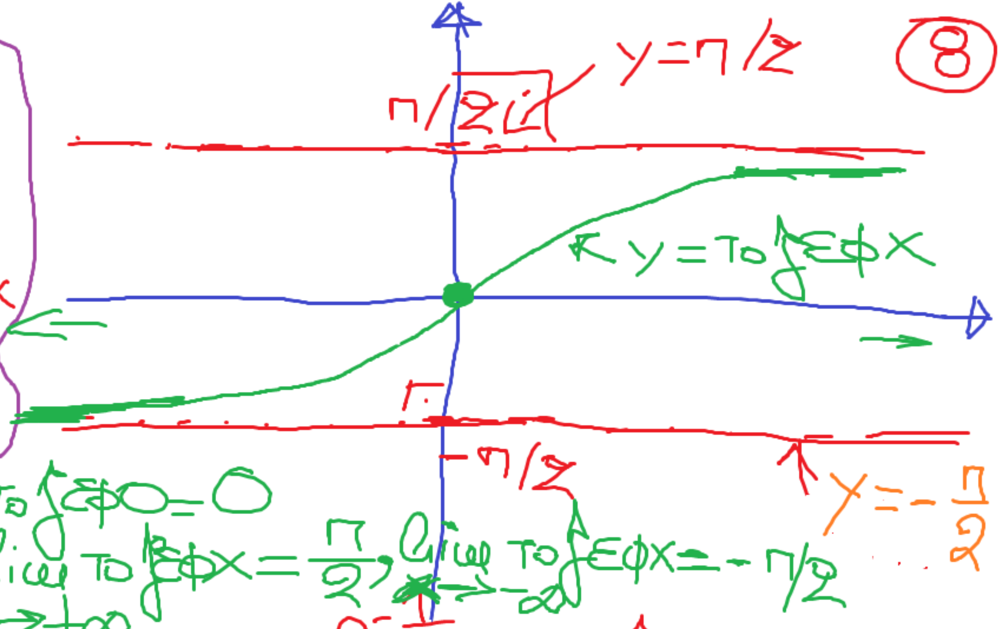
$R(f)=\mathbb{R}$

Η $y=f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι 1-1 και γνησίως αύξουσα

$\varepsilon\varphi(0)=0$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\varepsilon\varphi x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\varepsilon\varphi x=-\infty$



$\tau o\xi\varepsilon\varphi 0=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\tau o\xi\varepsilon\varphi x=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\tau o\xi\varepsilon\varphi x=-\pi/2$

$y=f^{-1}(x)=\tau o\xi\varepsilon\varphi x$

$D(f^{-1})=\mathbb{R}$

$R(f^{-1})=(-\pi/2,\pi/2)$

Η $f^{-1}(x)=\tau o\xi\varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα

8

Οι ευθείες $y=\frac{\pi}{2}$ και $y=-\frac{\pi}{2}$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $y(x)=\text{τοξεφ}\,x$ και έχω:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\text{τοξεφ}\,x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\text{τοξεφ}\,x=-\frac{\pi}{2}}$$

Εύρεση της $(\text{τοξεφ}\,x)'$

Α τρόπος (Ξεκινώ από την $y(x)=\text{τοξεφ}\,x$)

$$y=f(x)=\text{τοξεφ}\,x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ y\in\mathbb{R}$$

$$x \underset{\text{εφ}}{\overset{\text{τοξεφ}}{\rightleftarrows}} y$$

$$y = f(x) = \text{τοξεφ}\,x \iff \boxed{\text{εφ}\,y = x}$$

$$\text{εφ}\,y = x \Rightarrow (\text{εφ}\,y)' = x' \Rightarrow \frac{1}{\text{συν}^2 y}\cdot y' = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y' = \text{συν}^2 y$. Χρησιμοποιώ την ταυτότητα

$$\boxed{\text{συν}^2 y = \frac{1}{1+\text{εφ}^2 y}}$$

Έχω: $y' = \text{συν}^2 y = \dfrac{1}{1+\text{εφ}^2 y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \boxed{(\text{τοξεφ}\,x)' = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}}$$