Άσκηση στο διαφορικό

1

Υπολογίστε με τη χρήση διαφορικού την ποσότητα $e^{1.01^2}$

Λύση

$$f(x+h)\approx f(x)+f'(x)\cdot h$$

$f(x)=e^{x^2}$ $\quad x=1$ $\quad h=0.01$ $\quad f'(x)=2xe^{x^2}\Rightarrow f'(1)=2e$

Αντικαθιστώντας βρίσκω

$$f(1+0.01)=e^{1.01^2}\approx e^{1}+2e\cdot 0.0.01=e+\frac{2e}{100}$$

$$\Rightarrow e^{1.01^2}\approx e+\frac{e}{50}=\frac{51}{50}e$$

Ασκήσεις στις οικονομικές συναρτήσεις

Άσκηση

1

Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής $Q(x)=e^{-x}\cdot x^2, x\in[0,2)$.
Να δείξετε ότι η $Q(x)$ είναι αύξουσα και ότι έχει ένα σημείο καμπής.

Λύση

$$\frac{dQ(x)}{dx}=Q'(x)=-e^{-x}x^2+2xe^{-x}=\underline{xe^{-x}(2-x)}.$$

$x\in[0,2)$, $\underline{e^{-x}>0}$, $0\leq x<2 \Rightarrow \underline{2-x>0}$. Επομένως

$\frac{dQ(x)}{dx}\geq 0$ (με το $=$ να ισχύει μόνο για $x=0$).

Η συνάρτηση $Q(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2)$.

③

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -e^{-x} x^2 + e^{-x} 2x$$

$$\frac{d^2Q(x)}{dx^2} = Q''(x) = e^{-x}x^2 - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + 2e^{-x} =$$

$$= e^{-x}x^2 - 4xe^{-x} + 2e^{-x} \Rightarrow Q''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

Από το $Q''(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}\sqrt{2}}{2} =$$

$= \dfrac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$. Επειδή $x \in [0,2)$ κρατάμε

το $x = 2 - \sqrt{2}$. Αυτό είναι υποψήφιο σημείο καμπής.

$$Q''(x)=e^{-x}(x^2-4x+2)$$

$$e^{-x}>0$$

Επειδή το $e^{-x}>0$ το πρόσημο της $Q''(x)$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του x^2-4x+2

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-4x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως

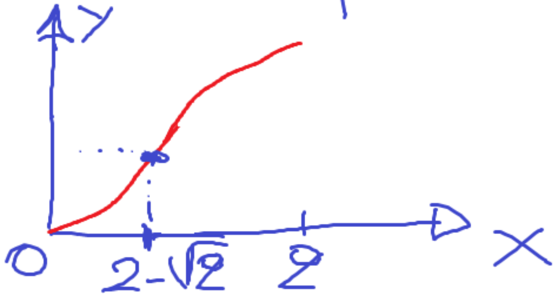
x	0		$2-\sqrt{2}$		2
$Q''(x)$		$+$	0	$-$	
$Q(x)$		κυρτή	σημείο καμπής	κοίλη	

Επομένως η $Q(x)$ έχει ένα σημείο καμπής για $x=2-\sqrt{2}$

Παρατήρηση

1. $Q(x)\uparrow$ Αναμενόμενο γιατί όσο αυξάνεται το x (κεφάλαιο ή εργασία για παράδειγμα) περιμένουμε να αυξάνεται και η παραγωγή $Q(x)$.

2. $Q(x)$ έχει ένα σημείο καμπής. $Q(x)=e^{-x}x^2$, $x\in[0,2)$



Αναμενόμενο γιατί περιμένουμε αύξηση των συντελεστών παραγωγής να οδηγήσει σε αύξηση της παραγωγής με φθίνοντα ρυθμό.

2.

Άσκηση

Η συνάρτηση συνολικού κόστους δίνεται από τον τύπο $C(q)=1000+500q-200q^2+q^3$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις μέσου και οριακού κόστους. Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής μέσου και οριακού κόστους. Να βρεθεί το q για το οποίο οριακό κόστος = μέσο μεταβλητό κόστος.

Λύση

$$AC(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{1000}{q}+500-200q+q^2$$

$$MC(q)=\frac{dC(q)}{dq}=500-400q+3q^2.$$

$$\frac{dAC(q)}{dq} = AC'(q) = -\frac{1000}{q^2} - 200 + 2q$$

$$\frac{dMC(q)}{dq} = MC'(q) = -400 + 6q$$

$$FC = C(0) = 1000$$

$$VC(q) = C(q) - FC = 500q - 200q^2 + q^3$$

$$\frac{VC(q)}{q} = 500 - 200q + q^2$$

$$MC(q) = \frac{VC(q)}{q} \Rightarrow \cancel{500} - 400q + 3q^2 = \cancel{500} - 200q + q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2q^2 = 200q \Rightarrow 2q(q-100) = 0 \Rightarrow q = 0 \text{ ή } q = 100$$

Ελαστικότητα μιας συνάρτησης

Έστω $f(x)$ συνάρτηση παραγωγίσιμη. Τότε η ελαστικότητα της $f(x)$ ορίζεται να είναι η συνάρτηση $E_{f(x)}$ με τύπο

$$\boxed{E_{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}\, x} \quad (1)$$

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

Ερμηνεία της ελαστικότητας

$$E_{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}\, x = \frac{\dfrac{df(x)}{dx}}{\dfrac{f(x)}{x}} = \frac{\dfrac{df(x)}{f(x)}}{\dfrac{dx}{x}} = \frac{\dfrac{df(x)}{f(x)}\cdot 100}{\dfrac{dx}{x}\cdot 100} \quad (2)$$

ΑΙΤΙΟ

Στο x επιφέρω μεταβολή dx

Στα 100 $\qquad Y$

$$\frac{x}{100} = \frac{dx}{Y} \Longleftrightarrow Y = \frac{dx}{x}100$$

Y δηλαδή είναι η ποσοστιαία μεταβολή του x.

Μεταβολή του x προκαλεί μεταβολή του $f(x)$.

Το $f(x)$ μεταβάλλεται κατά $df(x)$

Στα 100 η μεταβολή είναι Z

$Z = \frac{df(x)}{f(x)}100$ Δηλαδή Z είναι η ποσοστιαία μεταβολή της $f(x)$. Από την εξίσωση (2) συμπεραίνω ότι 10

$$\varepsilon_{f(x)}(x) = \frac{\text{Ποσοστιαία μεταβολή της } f(x)}{\text{Ποσοστιαία μεταβολή της } x}.$$

Δηλαδή η ελαστικότητα της $f(x)$ και δείχνει πόσο ευαισθητη (πόσο "ελαστική") είναι η $f(x)$ στις μεταβολές του x.

Π.χ. Αν για $x=10$ βρω $\varepsilon_{f(x)}(10) = \frac{2}{100} = 0.02$ έχω ότι

Ποσ.μετ. της $x \cdot \frac{2}{100}$ = Ποσοστιαία μεταβολή της f

Παρατηρήσεις

1. Έτσι περιμένουμε η ελαστικότητα της $f(x)=x$ να είναι 1. Πράγματι:

$$\varepsilon_{f(x)}(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}x=\frac{x'}{\cancel{x}}\cancel{x}=1.$$

2. Έστω θα έχουμε την 1η μορφή της καμπύλης ζήτησης $q=D(p)$. Η ελαστικότητα

$\varepsilon_{D(p)}(p)=\frac{D'(p)}{D(p)}p$. Η ελαστικότητα $\varepsilon_{D(p)}(p)$ μας

μας δείχνει πόσο ευαίσθητη είναι η ζήτηση $q=D(p)$
του αγαθού στις μεταβολές της τιμής του αγαθού.

Άσκηση

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

1) Αν $y(x)=f(x)+a,\ a\in\mathbb{R}$, $\varepsilon_{y(x)}(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+a}\varepsilon_{f(x)}(x)$

2) Αν $y(x)=af(x),\ a\in\mathbb{R}^*$, $\varepsilon_{y(x)}(x)=\varepsilon_{f(x)}(x)$

3) Αν $y(x)=f(x)+g(x)$, $\varepsilon_{y(x)}(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}\varepsilon_{f(x)}(x)+\dfrac{g(x)}{f(x)+g(x)}\varepsilon_{g(x)}(x)$

4) Αν $y(x)=f(x)g(x)$, $\varepsilon_{y(x)}(x)=\varepsilon_{f(x)}(x)+\varepsilon_{g(x)}(x)$

5) Αν $y(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\varepsilon_{y(x)}(x)=\varepsilon_{f(x)}(x)-\varepsilon_{g(x)}(x)$

6) Αν $y(x) = f(g(x))$, $\varepsilon_{y(x)}(x) = \varepsilon_{f(g)}(g)\, \varepsilon_{g(x)}(x)$ Λύση

13

1) $y(x) = f(x) + a,\ a \in \mathbb{R}$

$$\varepsilon_{y(x)}(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} x = \frac{(f(x)+a)'}{f(x)+a} x = \frac{f'(x)}{f(x)+a} x =$$

$$= \frac{f(x)}{f(x)+a} \left[\frac{f'(x)}{f(x)} x \right] = \frac{f(x)}{f(x)+a} \varepsilon_{f(x)}(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{y(x)}(x) = \frac{f(x)}{f(x)+a} \varepsilon_{f(x)}(x)}$$