Ιδιότητες της Ελαστικότητας $E_{f(x)}(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$.

Απόδειξη ιδιοτήτων

1. $y(x)=f(x)+\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R},\quad E_{y(x)}(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+\alpha}E_{f(x)}(x)$

2. $y(x)=\alpha f(x),\ \alpha\in\mathbb{R}^*,\quad E_{y(x)}(x)=E_{f(x)}(x)$

Απόδειξη

$$E_{y(x)}(x)=\frac{y'(x)}{y(x)}x=\frac{\cancel{\alpha}f'(x)}{\cancel{\alpha}f(x)}x=E_{f(x)}(x)$$

3. $y(x)=f(x)+g(x)$, $\quad E_{y(x)}(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}E_{f(x)}(x)+\dfrac{g(x)}{f(x)+g(x)}E_{g(x)}(x)$ ②

Απόδειξη

$$E_{y(x)}(x)=\frac{y'(x)}{y(x)}x=\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}x=\frac{f'(x)}{f(x)+g(x)}x+\frac{g'(x)}{f(x)+g(x)}x$$

$$=\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}\,\frac{f'(x)}{f(x)}x+\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}\,\frac{g'(x)}{g(x)}x=$$

$$=\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}E_{f(x)}(x)+\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}E_{g(x)}(x)$$

4. $y(x) = f(x)\,g(x)$, $\varepsilon_{y(x)}(x) = \varepsilon_{f(x)}(x) \underline{\underline{+}} \varepsilon_{g(x)}(x)$

$$\varepsilon_{y(x)}(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}x = \frac{(f(x)g(x))'}{f(x)\,g(x)}x = \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{f(x)\,g(x)}x$$

$$= \frac{f'(x)\cancel{g(x)}}{f(x)\cancel{g(x)}}x + \frac{\cancel{f(x)}g'(x)}{\cancel{f(x)}g(x)}x = \frac{f'(x)}{f(x)}x + \frac{g'(x)}{g(x)}x$$

$$= \varepsilon_{f(x)}(x) + \varepsilon_{g(x)}(x)$$

5. $y(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $E_{y(x)}(x)=E_{f(x)}(x)-E_{g(x)}(x)$ ④

Απόδειξη

$$E_{y(x)}=\frac{y'(x)}{y(x)}x=\frac{\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'}{\dfrac{f(x)}{g(x)}}x=\frac{\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}}{\dfrac{f(x)}{g(x)}}x$$

$$=\frac{\left(f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\right)\cancel{g(x)}}{g^{\cancel{2}}(x)f(x)}x=\frac{f'(x)\cancel{g(x)}}{\cancel{g(x)}f(x)}x-\frac{\cancel{f(x)}g'(x)}{g(x)\cancel{f(x)}}x$$

$$=E_{f(x)}(x)-E_{g(x)}(x)$$

6. $y(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, $E_{y(x)}(x) = E_{f(g(x))}(g(x)) E_{g(x)}(x)$ ⑤

Παραγωγίζεται ως προς $g(x)$

Παρ ως προς x

Απόδειξη

$$E_{y(x)}(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} x = \frac{f'(g(x))}{f(g(x))} x = \frac{f'(g(x))\, g'(x)}{f(g(x))} x =$$

$$= \frac{\dfrac{f'(g(x))\, g'(x)}{f(g(x))\, g(x)}}{g(x)\, x} = \frac{\dfrac{f'(g(x))}{f(g(x))}}{g(x)} \cdot \frac{g'(x)}{\dfrac{g(x)}{x}} =$$

Παραγωγίζουμε ως προς $g(x)$

$$= \frac{f'(g(x))}{f(g(x))}\, g(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}\, x =$$ Παραγωγίζουμε ως προς x

$$= E_{f(g(x))}\left(g(x)\right) \cdot E_{g(x)}(x)$$

Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $y(x)=\sqrt{x^2+1}$. Βρείτε την ελαστικότητα $E_{y(x)}(x)$ με χρήση της ιδιότητας και χωρίς χρήση της ιδιότητας.

Λύση

Α τρόπος (Χωρίς χρήση της ιδιότητας)

$$E_{y(x)}(x)=\frac{y'(x)}{y(x)}x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sqrt{x^2+1}}x=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}x=\frac{\frac{1\cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}x=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2}{x^2+1}$$

B τρόπος (με χρήση της ιδιότητας) 8

Ιδιότητα: $y(x) = f(g(x))$, $E_{y(x)}(x) = E_{f(g(x))}(g(x)) \cdot E_{g(x)}(x)$

$y(x) = \sqrt{x^2+1}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2+1$, $f(g(x)) = \sqrt{x^2+1}$

$$E_{f(g(x))}(g(x)) = \frac{f'(g(x))}{f(g(x))} g(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{1}} (x^2+1) =$$

Παραγωγίζω ως προς x^2+1

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}} (x^2+1) = \frac{1}{2}$$

$g(x)=x^2+1$, $E_{g(x)}(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}x=\frac{2x}{x^2+1}x$

$$\Rightarrow E_{g(x)}(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$$

Από ιδιότητα έχω

$$E_{y(x)}(x)=E_{f(g(x))}(g(x))\,E_{g(x)}(x)=\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}x^2}{x^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{y(x)}(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$ (Το ίδιο αποτέλεσμα που βρήκαμε στον Α τρόπο).

Παρατήρηση

Δηλαδή στον τύπο $E_{y(x)}(x) = E_{f(g(x))}(g(x)) \cdot E_{g(x)}(x)$ την πρώτη ελαστικότητα $E_{f(g(x))}(g(x))$ την υπολογίζουμε λαμβάνοντας ΩΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΟΛΗ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $g(x)$ ενώ την $E_{g(x)}(x)$ την υπολογίζουμε λαμβάνοντας ΩΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΤΟ x

2. **Άσκηση** 11

Υπολογίστε την Ελαστικότητα της συνάρτησης $y(x)=x\cdot\sqrt{x^2+1}$ με χρήση της ιδιότητας του γινομένου και χωρίς τη χρήση της ιδιότητας αυτής.

Λύση

Α τρόπος (Χωρίς τη χρήση της ιδιότητας)

$$E_{y(x)}(x)=\frac{y'(x)}{y(x)}x=\frac{\left(x\cdot\sqrt{x^2+1}\right)'}{\cancel{x}\sqrt{x^2+1}}\cancel{x}=\frac{x'\sqrt{x^2+1}+x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}+x\dfrac{1\cdot\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}+x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

Β Τρόπος (Με χρήση της ιδιότητας)

$y(x) = x\sqrt{x^2+1}$, $f(x) = x$, $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, $y(x) = f(x)\cdot h(x)$

$$E_{y(x)}(x) = E_{f(x)}(x) + E_{h(x)}(x)$$

$$E_{f(x)}(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\,x = \frac{x'}{x}\,x = 1$$

$$E_{h(x)}(x) \underset{1^{η}\ \text{άσκηση}}{=} \frac{x^2}{x^2+1}$$ (όπου $h(x)$ συμπίπτει με το $y(x)$ της $1^{ης}$ άσκησης).

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα 13

$$E_{y(x)}(x) = E_{g(x)} + E_{h(x)} = 1 + \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

(Βρήκαμε το ίδιο αποτέλεσμα με τον α τρόπο)

Παρατήρηση

Στην $1^{η}$ άσκηση το $f(x)=\sqrt{x}$. Στη δεύτερη άσκηση το $f(x)=x$.

3. Άσκηση

14

Έστω $\varepsilon_{D(p)}(p)$ η ελαστικότητα ζήτησης ενός αγαθού. Δείξτε ότι εάν $\varepsilon_{D(p)}(p) > -1$ τότε κάθε αύξηση της τιμής του αγαθού οδηγεί σε αύξηση των ολικών εσόδων.

Λύση

$$R = pq$$

Τα p, q συνδέονται με τη συνάρτηση ζήτησης. Η συνάρτηση ζήτησης έχει δύο μορφές: 1η μορφή $\boxed{q = D(p)}$ και έτσι $R = pq = p\,D(p) = R(p)$

15

2^{η} μορφή: $p = G(q)$. Τότε $R = pq = G(q)q = R(q)$

Επειδή στην άσκηση γίνεται αναφορά σε $D(p)$ θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη μορφή:

$$R = R(p) = pD(p) \Rightarrow \frac{dR}{dp} = R'(p) = (pD(p))' \Rightarrow$$

ως προς p παραγωγίζω

$$\Rightarrow R'(p) = p'D(p) + pD'(p) = 1 \cdot D(p) + pD'(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{R'(p)} = D(p) + pD'(p) \Rightarrow \frac{R'(p)}{D(p)} = \frac{D(p) + pD'(p)}{D(p)}$$

$$\Rightarrow \frac{R'(p)}{D(p)} = \frac{D(p)}{D(p)} + \underbrace{\frac{p\,D'(p)}{D(p)}}_{=\,\varepsilon_{D(p)}(p)} = 1 + \varepsilon_{D(p)}(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{R'(p)}{D(p)}} = 1 + \varepsilon_{D(p)}(p)$$

$$\varepsilon_{D(p)}(p) > -1 \Longleftrightarrow \varepsilon_{D(p)}(p) + 1 > 0$$

Αν $\varepsilon_{D(p)}(p) + 1 > 0$ τότε το $\frac{R'(p)}{D(p)} > 0$. Αλλά το $q = D(p) > 0$.

Άρα το $R'(p) > 0$. Δηλαδή η $R(p)\uparrow$. Δηλ. αύξηση του p οδηγεί σε $R\uparrow$