

Κριτήρια Σύγκλισης Σειρών - Κεφάλαιο VII

14. Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Στην τελευταία ενότητα δείξαμε πώς να βρούμε το άθροισμα μιας σειράς βρίσκοντας έναν κλειστό τύπο για το νιοστό μερικό άθροισμα και παίρνοντας το όριό του. Ωστόσο, είναι σχετικά σπάνιο να μπορεί κανείς να βρει έναν κλειστό τύπο για το νιοστό μερικό άθροισμα μιας σειράς, επομένως απαιτούνται εναλλακτικές μέθοδοι για την εύρεση του αθροίσματος μιας σειράς. Μια πιθανή εναλλακτική είναι να αποδειχθεί ότι η σειρά συγκλίνει και, στη συνέχεια, να προσεγγιστεί το άθροισμα από ένα μερικό άθροισμα (που θα περιλαμβάνει αρκετούς όρους για να επιτευχθεί ο επιθυμητός βαθμός ακρίβειας). Σε αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε διάφορα κριτήρια που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσδιοριστεί εάν μια δεδομένη σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει.

Σε ότι ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\sum u_k$ ως γενικό συμβολισμό αναφοράς στις σειρές, ενώ ο k -οστός όρος θα αναφέρεται ως ο **γενικός όρος της σειράς**. Ένα πρώτο κριτήριο-θεώρημα απόκλισης σειρών είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 14.1. (Κριτήριο απόκλισης σειρών)

- α) Αν η σειρά $\sum u_k$ συγκλίνει, τότε $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$.
- β) Αν $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$, τότε η σειρά $\sum u_k$ μπορεί είτε να αποκλίνει είτε να συγκλίνει.
- γ) Αν $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \neq 0$, τότε η σειρά $\sum u_k$ αποκλίνει.

► **Παράδειγμα 14.1.** Η σειρά,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{k}{k+1} + \cdots$$

αποκλίνει, αφού $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{k}} = 1 \neq 0$. ◀

Θεώρημα 14.2. (Αλγεβρικές ιδιότητες)

α) Αν $\sum u_k$ και $\sum v_k$ είναι συγκλίνουσες σειρές, τότε οι σειρές $\sum(u_k + v_k)$ και $\sum(u_k - v_k)$, είναι επίσης συγκλίνουσες και τα αθροίσματά τους ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \sum_{k=1}^{\infty} v_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} (u_k - v_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^{\infty} v_k\end{aligned}$$

β) Αν c είναι μια μη μηδενική σταθερά και η σειρά $\sum u_k$ συγκλίνει ή αποκλίνει τότε η σειρά $\sum c \cdot u_k$, συγκλίνει ή αποκλίνει, αντίστοιχα. Στην περίπτωση όπου συγκλίνει, το άθροισμα της δίνεται από τον τύπο:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c u_k = c \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

γ) Η σύγκλιση ή η απόκλιση μιας σειράς δεν επηρεάζεται αν διαγράψουμε έναν πεπερασμένο αριθμό από όρους. Αυτό σημαίνει ότι για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο K , οι σειρές:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} u_k &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ \sum_{k=K}^{\infty} u_k &= u_K + u_{K+1} + u_{K+2} + \dots\end{aligned}$$

είτε συγκλίνουν και οι δύο είτε αποκλίνουν και οι δύο.

► **Παράδειγμα 14.2.** Να βρείτε το άθροισμα της σειράς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}} \right)$$

Παρατηρούμε ότι η σειρά,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots$$

είναι μια συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά με $a = \frac{3}{4}$, $r = \frac{1}{4}$, και η σειρά,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^{k-1}} = 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \dots$$

είναι επίσης μια συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά με $a = 2$, $r = \frac{1}{5}$. Με βάση την περίπτωση α) από το προηγούμενο θεώρημα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}} \right)$ είναι συγκλίνουσα και ισχύει:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^{k-1}} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{3}{2}$$

Τελικά έχουμε, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}} \right) = -\frac{3}{2}$. 

► **Παράδειγμα 14.3** Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

α)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \dots + \frac{5}{k} + \dots$$

$$\beta) \sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots$$

Για το α), παρατηρούμε η σειρά είναι πολλαπλάσιο της αρμονικής σειράς, η οποία γνωρίζουμε ότι αποκλίνει. Με βάση την περίπτωση β) από το προηγούμενο θεώρημα, η σειρά αποκλίνει. Για το β), διαπιστώνουμε ότι πρόκειται πάλι για την αρμονική σειρά, με τη διαφορά ότι έχουν διαγραφεί οι πρώτοι εννέα της όροι. Με βάση την περίπτωση γ) από το προηγούμενο θεώρημα, η σειρά αποκλίνει.



Στη συνέχεια, θα δούμε μια κατηγορία σειρών που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία με διάφορα ονόματα όπως αρμονικές σειρές τάξης p ή p -σειρές ή ακόμη και υπεαρμονικές σειρές. Σε ότι ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο **p -σειρά** για μια σειρά της μορφής:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{k^p} + \dots$$

όπου $p > 0$. Τα παρακάτω είναι παραδείγματα p -σειρών, όπου για $p = 1$ έχουμε την αρμονική σειρά, που έχουμε ήδη αναφέρει.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \dots & p=1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots & p=2 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \dots & p=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Η σύγκλιση μιας p -σειράς ελέγχεται με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 14.3. (Κριτήριο σύγκλισης p -σειρών)

Η p -σειρά,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{k^p} + \dots$$

συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $0 < p \leq 1$.

► **Παράδειγμα 14.4** Η σειρά,

$$1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[5]{k}} + \dots$$

αποκλίνει, αφού είναι p -σειρά, με $p = \frac{1}{5} < 1$. 

Θεώρημα 14.3. (Το κριτήριο της σύγκρισης σειρών)

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, όπου όλοι οι όροι τους είναι μη αρνητικοί και ισχύει:

$$a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, a_3 \leq b_3, \dots, a_k \leq b_k, \dots$$

α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, επίσης, συγκλίνει.

β) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, επίσης, αποκλίνει.

Παρατήρηση 14.1. Αν μας δώσουν μια σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ με μη αρνητικούς όρους, τότε για να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της σύγκρισης, συνήθως, ακολουθούμε τα παρακάτω δύο βήματα:

Βήμα 1: Προσπαθούμε να «μαντέψουμε» αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

Βήμα 2: Βρίσκουμε μια κατάλληλη σειρά ώστε να αποδείξουμε, με τη βοήθεια του θεωρήματος 14.3, ότι η υπόθεσή μας είναι ορθή. Δηλαδή, αν πιστεύουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ αποκλίνει, τότε πρέπει να βρούμε μια αποκλίνουσα σειρά των οποίων οι όροι είναι "μικρότεροι" από τους αντίστοιχους όρους της $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε το β) του θεωρήματος 14.3, ενώ αν πιστεύουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ συγκλίνει, τότε πρέπει να βρούμε μια συγκλίνουσα σειρά της οποίας οι όροι να είναι "μεγαλύτεροι" από τους αντίστοιχους όρους της $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, ώστε να χρησιμοποιήσουμε το α) του θεωρήματος 14.3.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ που εξετάζεται θα έχει τον γενικό όρο u_k εκφρασμένο ως κλάσμα. Για να βοηθήσουμε στη διαδικασία της εικασίας στο πρώτο βήμα, έχουμε διατυπώσει δύο «Άτυπες Αρχές» (θα τις συμβολίζουμε με AA1 και AA2) που βασίζονται στη μορφή του παρονομαστή για το u_k . Αυτές οι αρχές μερικές φορές υποδηλώνουν εάν μια σειρά είναι πιθανό να συγκλίνει ή να αποκλίνει. Έχουμε ονομάσει αυτές αρχές ως «άτυπες αρχές» επειδή δεν προορίζονται ως τυπικά θεωρήματα, αφού στην πραγματικότητα, δεν λειτουργούν πάντα, ωστόσο, λειτουργούν αρκετά συχνά για να είναι χρήσιμες στη λύση των περισσότερων ασκήσεων.

Γενικές αρχές που εφαρμόζουμε κατά την επίλυση ασκήσεων με το κριτήριο της σύγκρισης είναι οι ακόλουθες:

AA1: Οι σταθεροί όροι στον παρονομαστή του u_k μπορούν, συνήθως, να διαγραφούν χωρίς να επηρεαστεί η σύγκλιση ή η απόκλιση της σειράς.

AA2: Εάν ένα πολυώνυμο με μεταβλητή το k εμφανίζεται ως παράγοντας στον αριθμητή ή στον παρονομαστή του u_k , τότε όλοι εκτός από τον μεγιστοβάθμιο όρο στο πολυώνυμο μπορούν, συνήθως, να διαγραφούν χωρίς να επηρεαστεί η σύγκλιση ή η απόκλιση της σειράς.

Ακολουθούν παραδείγματα ώστε να γίνουν τα παραπάνω κατανοητά στην πράξη.

► **Παράδειγμα 14.5** Να μελετήσετε με το κριτήριο της σύγκρισης τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών.

$$\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} - \frac{1}{2}}$$

$$\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + k}$$

Για το α) και σύμφωνα με την AA1, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να διαγράψουμε τη σταθερά στον παρονομαστή χωρίς να επηρεάσουμε τη σύγκλιση ή την απόκλιση. Έτσι, η δεδομένη σειρά είναι πιθανό να συμπεριφέρεται όπως η σειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

η οποία ως p -σειρά, με $p = \frac{1}{2} < 1$, θα αποκλίνει. Επομένως, υποθέτουμε ότι η δοσμένη σειρά αποκλίνει

η οποία ως p -σειρά, με $p = \frac{1}{2} < 1$, θα αποκλίνει. Επομένως, υποθέτουμε ότι η δοσμένη σειρά αποκλίνει και θα προσπαθήσουμε να το αποδείξουμε. Πράγματι, αφού ισχύει,

$$\frac{1}{\sqrt{k} - \frac{1}{2}} > \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{για } k = 1, 2, \dots$$

και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει, τότε από το θεώρημα 14.3 β) η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} - \frac{1}{2}}$ θα αποκλίνει.

Για το β) και σύμφωνα με την ΑΑ2, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να διαγράψουμε όλους τους όρους του πολωνύμου, εκτός από τον μεγιστοβάθμιο όρο, χωρίς να επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλιση. Έτσι η δοσμένη σειρά γίνεται:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

η οποία ως p -σειρά, με $p = 2 > 1$, θα συγκλίνει.

Επομένως, υποθέτουμε ότι η δοσμένη σειρά συγκλίνει και θα προσπαθήσουμε να το αποδείξουμε. Πράγματι, αφού ισχύει,

$$\frac{1}{2k^2 + k} < \frac{1}{2k^2} \quad \text{για } k = 1, 2, \dots$$

και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ συγκλίνει, τότε από το θεώρημα 14.3 α), η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + k}$ συγκλίνει. ◀

Θεώρημα 14.4. (Το κριτήριο του ορίου)

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, όπου όλοι οι όροι τους είναι θετικοί και ισχύει:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

Αν το ρ είναι θετικός αριθμός, τότε είτε και οι δύο σειρές συγκλίνουν είτε και οι δύο σειρές αποκλίνουν.

Παρατήρηση 14.2. Για να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του ορίου, πρέπει και πάλι πρώτα να μαντέψουμε τη σύγκλιση ή την απόκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και στη συνέχεια να βρούμε μια σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ που να μας βοηθάει, μέσω του θεωρήματος, να αποδείξουμε την εικασία μας. Το ακόλουθο παράδειγμα ακολουθεί αυτόν τον τρόπο σκέψης.

► **Παράδειγμα 14.5** Να μελετήσετε με το κριτήριο του ορίου τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών.

$$\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+1}, \quad \beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2+k}, \quad \gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3-2k^2+4}{k^7-k^3+2}$$

Για το α), θεωρούμε όπως και πριν ότι η δεδομένη σειρά είναι πιθανό να συμπεριφέρεται όπως η σειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

η οποία ως p -σειρά, με $p = \frac{1}{2} < 1$, και αποκλίνει. Επομένως, υποθέτουμε ότι η δοσμένη σειρά αποκλίνει και θα προσπαθήσουμε να το αποδείξουμε. Πράγματι, θεωρούμε,

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}+1} \quad \text{και} \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

και τότε θα ισχύει:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{k}}} = 1$$

Αφού το $\rho = 1 > 0$, με βάση το κριτήριο του ορίου, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+1}$, θα αποκλίνει όπως και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Για το β), θα θεωρήσουμε την συγκλίνουσα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ και θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του ορίου με,

$$a_k = \frac{1}{2k^2+k} \quad \text{και} \quad b_k = \frac{1}{2k^2}$$

Έχουμε:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k^2}{2k^2+k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{2+\frac{1}{k}} = 1$$

Αφού το $\rho = 1 > 0$, και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ συγκλίνει, με βάση το κριτήριο του ορίου, έπεται ότι και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2+k}$, συγκλίνει.

Για το γ), θα θεωρήσουμε την συγκλίνουσα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3}{k^7} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^4}$ (p -σειρά, με $p = 4 > 1$) και θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του ορίου με,

$$a_k = \frac{3k^3-2k^2+4}{k^7-k^3+2} \quad \text{και} \quad b_k = \frac{3}{k^4}$$

Έχουμε:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3k^3-2k^2+4}{k^7-k^3+2}}{\frac{3}{k^4}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3k^7-2k^6+4k^4}{3k^7-3k^3+6} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3k^7}{3k^7} = 1$$

Αφού το $\rho = 1 > 0$, και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^4}$ συγκλίνει, με βάση το κριτήριο του ορίου, έπεται ότι και η

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3 - 2k^2 + 4}{k^7 - k^3 + 2}, \text{ συγκλίνει. } \square$$

Το επόμενο κριτήριο-θεώρημα λειτουργεί αποκλειστικά με τους όρους της δοσμένης σειράς και δεν απαιτεί ούτε μια αρχική εικασία για τη σύγκλιση ούτε την ανακάλυψη μιας σειράς για σύγκριση.

Θεώρημα 14.5. (Το κριτήριο του λόγου)

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, όπου όλοι οι όροι της είναι θετικοί και ισχύει:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

α) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ συγκλίνει.

β) Αν $\rho > 1$ ή $\rho = +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ αποκλίνει.

γ) Αν $\rho = 1$, τότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το κριτήριο για να βγάλουμε συμπέρασμα για τη σύγκλιση της σειράς.

► **Παράδειγμα 14.6** Να μελετήσετε με το κριτήριο του λόγου τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών.

$$\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\delta) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k}$$

$$\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

$$\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$$

$$\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$$

Για το α), η σειρά συγκλίνει, αφού

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

Για το β), η σειρά συγκλίνει, αφού

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{2} < 1$$

Για το γ), η σειρά αποκλίνει, αφού

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e > 1$$

Για το δ), η σειρά αποκλίνει, αφού

$$\begin{aligned} \rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{[2(k+1)]!}{4^{k+1}} \cdot \frac{4^k}{(2k)!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2k+2)!}{(2k)!} \cdot \frac{1}{4} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(2k)!} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \lim_{k \rightarrow +\infty} (2k+2)(2k+1) = +\infty \end{aligned}$$

Για το ε), δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα με το κριτήριο του λόγου, αφού

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(k+1)-1} \cdot \frac{2k-1}{1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k-1}{2k+1} = 1$$

Το τελευταίο κριτήριο που θα παρουσιάσουμε, για τη μελέτη της σύγκλισης σειρών, είναι το κριτήριο της ρίζας. ◀

Θεώρημα 14.6. (Το κριτήριο της ρίζας)

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, όπου όλοι οι όροι της είναι θετικοί και ισχύει:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k)^{1/k}$$

α) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ συγκλίνει.

β) Αν $\rho > 1$ ή $\rho = +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ αποκλίνει.

γ) Αν $\rho = 1$, τότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το κριτήριο για να βγάλουμε συμπέρασμα για τη σύγκλιση της σειράς.

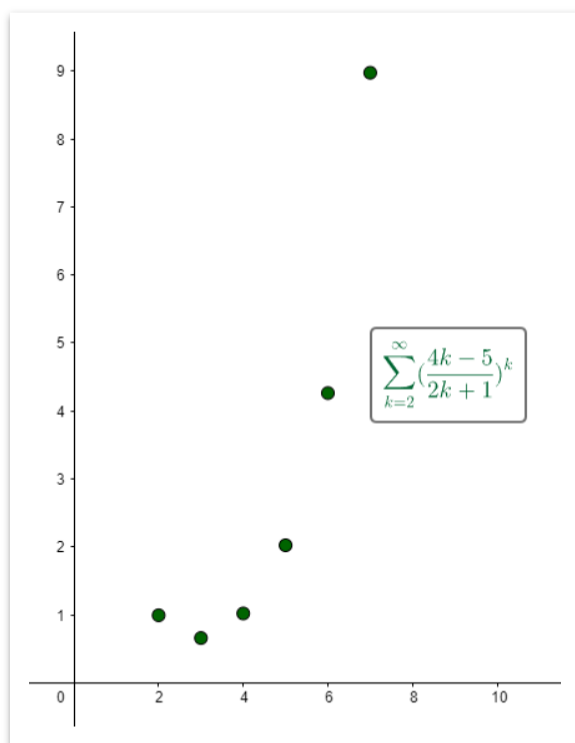
► **Παράδειγμα 14.7** Να μελετήσετε με το κριτήριο της ρίζας τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών.

$$\alpha) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{4k-5}{2k+1} \right)^k$$

$$\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(k+1))^k}$$

Για το α), η σειρά αποκλίνει, αφού

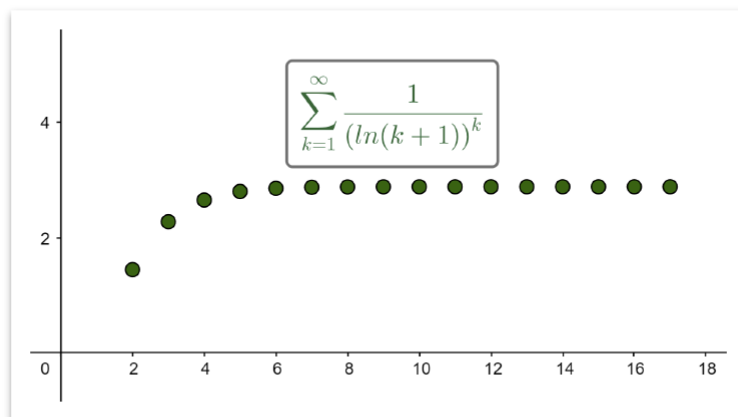
$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4k-5}{2k+1} = 2 > 1$$



Σχήμα 7

Για το β), η σειρά συγκλίνει, αφού

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} = 0 < 1. \quad \blacktriangleleft$$



Σχήμα 8

Σημειώσεις 1

Δευτέρα, 24 Νοεμβρίου 2025

12:14 μμ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{k}{k+1} + \dots$$

$$u_k = \frac{k}{k+1}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+1} =$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k \cdot 1}{k \cdot (1 + \frac{1}{k})}$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} \rightarrow 0$$

$$= 1$$

Άρα η $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ αποκλίνει.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) \quad \text{όπου}$$

$$a_k = \frac{3}{4^k}$$

$$b_k = \frac{2}{5^{k-1}}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{1}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^k \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^k$$

$$k=0$$

Αρα έχουμε Γεωμ. Σημεία

$$\text{με } \alpha = \frac{3}{4} \quad , \quad r = \frac{1}{4}$$

$$\text{Επομένως, } |r| = \left| \frac{1}{4} \right| < 1$$

η σειρά συγκλίνει

$$\text{αρα } \frac{\alpha}{1-r} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 1$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{5^{k-1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^k \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^{-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^k \cdot 5 = \sum_{k=1}^{\infty} 10 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k$$

Άρα $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ είναι ΓΩ. Σαρά

όπου $\alpha = 2$, $r = \frac{1}{5}$

Επειδή $|r| = \left|\frac{1}{5}\right| < 1$, η σειρά συγκλίνει

$$\sigma_{\infty} = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

Άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) \text{ συγκλίνει στο } 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \dots + \frac{5}{k} + \dots$$

$$= 5 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ήτοι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ είναι

αρμονική. Άρα αποκλίνει.

$$1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[5]{k}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

$$u_k = \frac{1}{\sqrt[5]{k}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}$$

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}$ είναι αρμονική σειρά τάξης p

Επειδή $p = \frac{1}{5} \leq 1$, η σειρά αποκλίνει

$$\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} - \frac{1}{2}}$$

Έστω
$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}$$

$$b_k = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$$

Τότε

$$k=1: \quad a_1 = \frac{1}{1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}} = 2 > b_1 = 1$$

$$k=2: \quad a_2 = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}} = 2 > b_2 = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$$

...

$$a_k = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}} > b_k = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$$

λοχύη?

⇒

$$\frac{1}{k^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}} > \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$$

$$\overline{k^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}} > \overline{k^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow k^{\frac{1}{2}} > k^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \quad \text{για } k \geq 1$$

$$\Rightarrow 0 > -\frac{1}{2} \quad \text{πολύ εύκολο}$$

$$\text{Άρα} \quad a_k > b_k \quad \text{για κάθε } k \geq 1$$

Επαισι

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$$

αριθμητική σειρά
τάξης p

$$\text{οπότε } p = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{άρα αποκλίνει}$$

$$\text{Άρα } b_k < a_k \quad \text{και } b_k \text{ αποκλίνει}$$

πάλι a_k αποκλίνει.

$$\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + k}$$

$$a_k = \frac{1}{2k^2 + k}$$

$$b_k = \frac{1}{k^2}$$

οπότε $a_k < b_k$ για κάθε $k \geq 1$

λοχύη?

$$\frac{1}{2k^2 + k} < \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow k^2 < 2k^2 + k \quad \text{για } k \geq 1$$

$$\Rightarrow 0 < k^2 + k$$

$$\Rightarrow 0 < k(k+1)$$

Για να ισχύει θα πρέπει

$$n \quad (k > 0 \quad k' \quad k+1 > 0) \quad \text{ισχύει}$$

$$n \quad (k < 0 \quad k' \quad k+1 < 0) \quad \text{δεν ισχύει}$$

Από $a_k < b_k$ για κάθε $k \geq 1$

οπότε.

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

είναι άθροισμα σειράς
τάξης p

οπότε $p = 2 > 1$ άρα συγκλίνει.

Αφού $a_k < b_k$ & $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει

τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει & αυτή.

τοτε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλινει < αληθ.

$$\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+1},$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}+1}$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}{\frac{1}{\sqrt{k}}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}} = 1 > 0$$

~~$\frac{1}{\sqrt{k}}$~~ $\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$

Αρα $\rho > 0$, οτε ητε a_k & b_k συγκλινει.

Γιτκ a_k κ' b_k αποκλίνουν.

όμως b_k είναι αρθμενική σθε α τάγης p

όπου $p = \frac{1}{2} \leq 1$ άρα αποκλίνει.

Άρα αποκλίνει κ' η a_k .

$$\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{όπου} \quad a_k = \frac{1}{k!}$$

χρησιμοποιείμε κριτήριο λόγου.

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{k! \cdot (k+1)}$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

Αρα $\rho < 1$, η σειρά συγκλίνει

$$\alpha) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{4k-5}{2k+1} \right)^k \quad u_k = \left(\frac{4k-5}{2k+1} \right)^k$$

Χρησιμοποιώ κριτήριο ρίξης

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{u_k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{4k-5}{2k+1} \right)^k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4k-5}{2k+1}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k+1}{4 - \frac{5}{k}} \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{5}{k}}{2 + \frac{1}{k}} = \frac{4}{2} = 2
 \end{aligned}$$

Άρα $p > 1$, η σειρά αποκλίνει.