

Σειρές - Κεφάλαιο VII

10. Σειρές-γενικά

Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να μελετήσει αθροίσματα που περιέχουν άπειρους το πλήθος όρους. Τα πιο γνωστά παραδείγματα τέτοιων αθροισμάτων εμφανίζονται στις δεκαδικές αναπαραστάσεις πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, όταν γράφουμε αριθμούς όπως το

$$\frac{2}{3} = 0.6666 \dots = 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \dots$$

τότε, ουσιαστικά, γράφουμε τον αριθμό $\frac{2}{3}$ ως «άθροισμα» απείρου πλήθους πραγματικών αριθμών και έτσι καταδεικνύουμε το γεγονός ότι ο αριθμός στη δεκαδική του έκφραση έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία.

11. Ορισμός της σειράς

Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε την έκφραση «άθροισμα» απείρου πλήθους πραγματικών αριθμών. Πριν φτάσουμε όμως εκεί θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της (άπειρης)σειράς πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 11.1. Μια **σειρά** (ή άπειρη σειρά ή απειροσειρά) πραγματικών αριθμών $u_1, u_2, u_3, \dots$, ονομάζεται μια έκφραση της μορφής:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$$

Οι πραγματικοί αριθμοί $u_1, u_2, u_3, \dots$ ονομάζονται **όροι** της σειράς.

Δεδομένου ότι είναι αδύνατο να προσθέσουμε άπειρους αριθμούς, τα αθροίσματα άπειρων σειρών ορίζονται και υπολογίζονται από μια έμμεση διαδικασία υπολογισμού του ορίου μιας ακολουθίας αθροισμάτων. Πριν μπούμε όμως σε περισσότερες λεπτομέρειες χρειάζεται να δώσουμε κάποια ορολογία.

Έστω ότι με s_n συμβολίζουμε το άθροισμα των αρχικών όρων μιας σειράς μέχρι τον όρο που καθορίζει ο δείκτης n . Δηλαδή, είναι

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2 \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k \end{aligned}$$

Τότε ο αριθμός (άθροισμα) s_n ονομάζεται το **n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς** και η ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ονομάζεται ως **η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων**.

Καθώς το n αυξάνεται, το μερικό άθροισμα της σειράς $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ περιλαμβάνει όλο και περισσότερους όρους της σειράς. Έτσι, αν η ακολουθία s_n τείνει προς ένα όριο καθώς το $n \rightarrow +\infty$, είναι λογικό να θεωρήσουμε αυτό το όριο ως το άθροισμα όλων των όρων της σειράς. Αυτό υποδηλώνει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 11.2. Θεωρούμε την ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ των μερικών αθροισμάτων της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$$

Αν η ακολουθία $\{s_n\}$ συγκλίνει σε κάποιο όριο S , δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$, τότε θα λέμε ότι **η σειρά συγκλίνει στο S** και το S είναι το άθροισμα της σειράς. Σε αυτή την περίπτωση θα συμβολίζουμε:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Αν η ακολουθία $\{s_n\}$ αποκλίνει, τότε θα λέμε ότι **η σειρά αποκλίνει**. Μια αποκλίνουσα σειρά δεν έχει άθροισμα.

► **Παράδειγμα 9.1.** Θεωρούμε την σειρά:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$a_n = (-1)^{n+1} \leadsto \text{αποκλίνουσα}$$

► **Παράδειγμα 9.1.** Θεωρούμε την σειρά:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$a_n = (-1)^{n+1} \leadsto \text{αποκλίνουσα}$$

Είναι δελεαστικό να συμπεράνουμε ότι το άθροισμα της σειράς είναι μηδέν υποστηρίζοντας ότι οι θετικοί και αρνητικοί όροι αλληλοεξουδετερώνονται. Ωστόσο, αυτό είναι δεν είναι σωστό! Το πρόβλημα είναι ότι οι αλγεβρικές πράξεις που ισχύουν για πεπερασμένα αθροίσματα δεν μεταφέρονται σε άπειρες σειρές σε όλες τις περιπτώσεις. Αργότερα, θα συζητήσουμε συνθήκες υπό τις οποίες γνωστές αλγεβρικές πράξεις μπορούν να εφαρμοστούν σε άπειρες σειρές, αλλά για αυτό το παράδειγμα στρεφόμαστε απευθείας στον παραπάνω ορισμό. Δημιουργούμε αρχικά την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων και στη συνέχεια ελέγχουμε αν αυτή η ακολουθία συγκλίνει. Οπότε έχουμε,

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 - 1 = 0 \\ s_3 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\ s_4 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ s_5 &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Επομένως, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι η ακόλουθη:

$$1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

η οποία είναι φανερό ότι δεν συγκλίνει μιας και οι όροι της ταλαντεύονται μεταξύ του 1 και του 0. Τελικά έχουμε ότι, η σειρά αποκλίνει. ◀

12. Η γεωμετρική σειρά

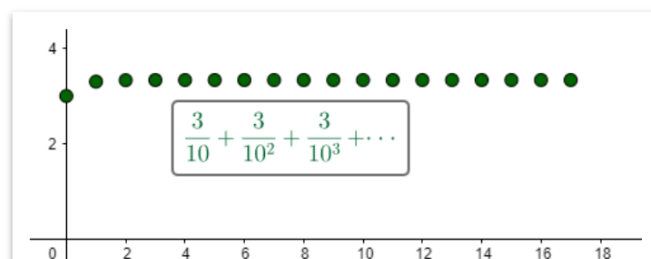
Η έννοια της γεωμετρικής σειράς είναι αρκετά σημαντική στις εφαρμογές και αναφέρεται σε μια σειρά όπου κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό από μια συγκεκριμένη σταθερά. Έτσι, αν για παράδειγμα ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής σειράς είναι ο αριθμός a και ο κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο πολλαπλασιάζοντας με τη σταθερά r , τότε η σειρά θα έχει τη μορφή:

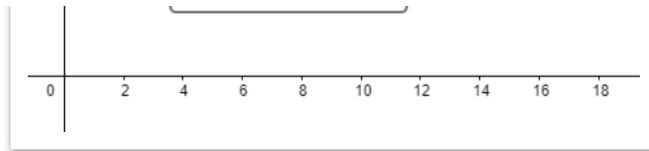
$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^k + \dots \quad (a \neq 0)$$

Μια σειρά που έχει την παραπάνω μορφή καλείται **γεωμετρική σειρά**, και ο σταθερός αριθμός r ονομάζεται **λόγος ή πηλίκος** (ratio) της γεωμετρικής σειράς.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα γεωμετρικών σειρών:

$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + \dots$	$a = 1, r = 2$
$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^k} + \dots$	$a = \frac{3}{10}, r = \frac{1}{10}$ (βλέπε σχήμα)
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{2^k} + \dots$	$a = \frac{1}{2}, r = -\frac{1}{2}$
$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$	$a = 1, r = 1$
$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{k+1} + \dots$	$a = 1, r = -1$
$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots$	$a = 1, r = x$





Σχήμα 6

Στο παρακάτω θεώρημα, θα δούμε τα βασικά κριτήρια που καθορίζουν το πότε μια γεωμετρική σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει.

Θεώρημα 12.1. Η γεωμετρική σειρά,

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^k + \dots \quad (a \neq 0)$$

Συγκλίνει όταν $|r| < 1$ και αποκλίνει όταν $|r| \geq 1$. Αν η σειρά συγκλίνει τότε το άθροισμα της (δηλαδή το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της) δίνεται από τον τύπο:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Λογμένες Ασκήσεις

► **Άσκηση 12.1.** Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

α) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k}$

β) $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{2k} 5^{1-k}$

Λύση. Α) Πρόκειται για μια γεωμετρική σειρά με $a = 5$ (θέτουμε $k = 0$) και $r = \frac{1}{4}$. Σημειώνουμε ότι, για να βρούμε τον λόγο σε μια γεωμετρική σειρά διαιρούμε δύο διαδοχικούς όρους, δηλαδή

$$r = \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{5}{4^{k+1}}}{\frac{5}{4^k}} = \frac{1}{4}$$

και $|r| = \frac{1}{4} < 1$, επομένως η σειρά συγκλίνει και το άθροισμά της είναι:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$$

β) Πρόκειται για μια γεωμετρική σειρά με $a = 9$ (θέτουμε $k = 1$) και $r = \frac{9}{5}$. Πράγματι, για να βρούμε τον λόγο (όπως και στο α)) διαιρούμε δύο διαδοχικούς όρους, δηλαδή

$$r = \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{3^{2(k+1)}5^{1-(k+1)}}{3^{2k}5^{1-k}} = \frac{3^{2k}3^2\cancel{5^{1-k}}5^{-1}}{\cancel{3^{2k}}5^{1-k}} = \frac{9}{5}$$

και $|r| = \frac{9}{5} > 1$, επομένως η σειρά αποκλίνει. ◀

► **Άσκηση 12.2.** Να βρείτε τη ρητή μορφή του παρακάτω δεκαδικού αριθμού:

$$0.784784784 \dots$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι: $0.784784784 \dots = 0.784 + 0.000784 + 0.000000784 + \dots$

οπότε η δεκαδική μορφή του αριθμού μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας γεωμετρικής σειράς με $a = 0.784$ και $r = 0.001$. Το άθροισμα της σειράς είναι:

$$\frac{a}{1-r} = \frac{0.784}{1-0.001} = \frac{0.784}{0.999} = \frac{784}{999}$$

Οπότε, $0.784784784 \dots = \frac{784}{999}$. ◀

► **Άσκηση 12.3.** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν και στη συνέχεια να βρείτε το άθροισμά τους.

$$\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \beta) 3 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^3}{8} + \dots + \frac{3(-1)^k}{2^k} x^k + \dots$$

Λύση. Α) Παρατηρούμε ότι το ανάπτυγμα της σειράς είναι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots$$

Επομένως, έχουμε μια γεωμετρική σειρά με $a = 1$ και $r = x$. Για να συγκλίνει η σειρά θα πρέπει $|x| < 1$ (διαφορετικά αποκλίνει) και το άθροισμα της σειράς είναι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$$

Β) Παρατηρούμε από το ανάπτυγμα της σειράς ότι έχουμε μια γεωμετρική σειρά με $a = 3$ και $r = -\frac{x}{2}$. Για να συγκλίνει η σειρά θα πρέπει $|\frac{-x}{2}| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$ (διαφορετικά αποκλίνει). Τότε, το άθροισμα της σειράς είναι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3 \left(-\frac{x}{2}\right)^k = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{6}{2+x}$$

για $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. ◀

13. Η τηλεσκοπική σειρά και η αρμονική σειρά

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε δυο ενδιαφέρουσες σειρές, την τηλεσκοπική σειρά και την αρμονική σειρά.

Θεωρούμε την σειρά,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

Τότε το n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς s_n δίνεται από τον τύπο:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Κατά συνέπεια μπορούμε να ξαναγράψουμε n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς s_n ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Με βάση τον ορισμό της σύγκλισης στις σειρές, αν η σειρά συγκλίνει, τότε όριο της S είναι

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Επομένως, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. συγκεκριμένη σειρά παρουσιάζει ένα μοτίβο αθροίσματος που ονομάζουμε **τηλεσκοπικό άθροισμα**. Το όνομα προέρχεται από το γεγονός ότι στην απλοποίηση του αθροίσματος, ένας όρος σε κάθε παρενθετική έκφραση ακυρώνει έναν όρο στην επόμενη παρενθετική έκφραση, έως ότου «καταρρεύσει» ολόκληρο το άθροισμα (σαν αναδιπλούμενο τηλεσκόπιο) σε δύο μόνο όρους. Με βάση τα παραπάνω, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ονομάζεται **τηλεσκοπική σειρά**.

Μία από τις σημαντικότερες από όλες τις αποκλίνουσες σειρές είναι η **αρμονική σειρά** που δίνεται από την παρακάτω φόρμουλα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Η απόδειξη (χωρίς να εμβαθύνουμε σε αυτή) ότι η συγκεκριμένη σειρά είναι αποκλίνουσα στηρίζεται στο γεγονός ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι γνησίως αύξουσα, αλλά δεν έχει άνω φράγμα.

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + \dots \quad \alpha_k = 2^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha \cdot r^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 \cdot 2^k$$

Γεωμ. Σηρ α

με $\alpha = 1$

και $r = 2$

Επειδή $|r| > 1$, $\sum \alpha_n$ αποκλίνει

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^k} + \dots$$

$$\alpha_k = \frac{3}{10^k}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha \cdot r^k = 3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

Γεωμ. Σηρ με $\alpha = 3$, $r = \frac{1}{10}$

Επειδή $|r| = \left|\frac{1}{10}\right| < 1$

$\sum \alpha_n$ συγκλίνει στο

$$\frac{\alpha}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{30}{9}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{2^k} + \dots$$

$$\rightsquigarrow S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2^k} = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha \cdot r^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

Είναι Γεωμ. Σειρά με $\alpha = \frac{1}{2}$, $r = -\frac{1}{2}$

Επ'αρκείν $|r| = |-\frac{1}{2}| < 1$, η σειρά συγκλίνει

$$\alpha = 1 \quad \frac{\alpha}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

$$\alpha_k = 1^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha \cdot r^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 \cdot 1^k$$

Γεωμ. Σειρά

$$\text{με } \alpha=1, r=1$$

Επ'αρκείν $|r| = |1| \geq 1$, η σειρά αποκλίνει

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{k+1} + \dots$$

$$\alpha_k = (-1)^{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha \cdot r^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}$$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$k=0$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^2 \cdot (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 1 \cdot (-1)^k$$

Γεωμ. Σηρά

με $\alpha = 1, r = -1$

Επειδή $|r| = |-1| \geq 1$, η σειρά αποκλίνει

$$\alpha \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots$$

$$\alpha_k = x^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha \cdot r^k = 1 \cdot x^k \quad r = \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{x^{k+1}}{x^k} = x$$

Γεωμ. Σηρά με $\alpha = 1, r = x$

- Αν $|x| \geq 1$, η σειρά αποκλίνει.
- Αν $|x| < 1$, η σειρά συγκλίνει

$$\sigma_{\tau 0} \quad \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1-x}$$

$$\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \quad \text{Γνωρ. Σειρά με } a=5$$

$$r = \frac{1}{4}.$$

Επειδή $|r| = \left|\frac{1}{4}\right| < 1$, η σειρά
 συγκλίνει στο $\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$

$$\beta) \sum_{k=1}^{\infty} 3^{2k} 5^{1-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{5}\right)^k \cdot 5^1 \cdot 5^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 9^k \cdot \frac{1}{5^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 5 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 5 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)' \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 9 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^k \quad \text{Τ. 9 < 5}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 9 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^k \quad \text{Γεωμ. Σηρά}$$

$$\mu\kappa \alpha=9, r=\frac{9}{5}$$

$$|r| = \left|\frac{9}{5}\right| \geq 1, \text{ η σειρά αποκλίνει.}$$

► **Άσκηση 12.2.** Να βρείτε τη ρητή μορφή του παρακάτω δεκαδικού αριθμού:

0.784784784 ...

$$\boxed{0.784} + 0.000784 + 0.000000784 + \dots$$

$$= \boxed{0.784} \cdot \left(\frac{1}{1000}\right)^0 + 0.784 \cdot \left(\frac{1}{1000}\right)^1 + 0.784 \cdot \left(\frac{1}{1000}\right)^2 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \boxed{\alpha} \cdot r^k = 0.784 \cdot \left(\frac{1}{1000}\right)^k \quad \text{Γεωμ. Σηρά}$$

$$\mu\kappa \alpha=0.784, r=\frac{1}{1000}$$

$$\text{Επειδή } |r| = \left|\frac{1}{1000}\right| < 1$$

$$\text{η σειρά συγκλίνει στο } \frac{\alpha}{1-r} = \frac{0.784}{1-\frac{1}{1000}} = \dots$$

$$\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 \cdot x^k \quad \text{Γ(ω)μ. στροά}$$

με $\alpha=1, r=x$

• $|x| \geq 1$ αποκλίνουσα σειρά

• $|x| < 1$ συγκλίνουσα σειρά

$$\text{στο } \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1-x}$$

$$\beta) \boxed{3} - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^3}{8} + \dots + \frac{3(-1)^k}{2^k} x^k + \dots$$

$$\alpha_k = \frac{3(-1)^k}{2^k} x^k$$

Από τον $\alpha = \boxed{3}$

$$r = \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{\frac{3(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} \cdot x^{k+1}}{\frac{3(-1)^k}{2^k} \cdot x^k} =$$

$$= \frac{\cancel{2^k} \cdot \cancel{3} (-1)^{\cancel{k}+1} \cdot x^{\cancel{k}+1}}{\cancel{2}^{k+1} \cdot \cancel{3} (-1)^{\cancel{k}} \cdot \cancel{x}^k} = \frac{-1 \cdot x}{2} = \frac{-x}{2}$$

13. Τράπεζα

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha \cdot r^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3(-1)^k}{2^k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 3 \cdot \frac{(-1 \cdot x)^k}{2^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 3 \cdot \left(\frac{-x}{2} \right)^k \quad \text{Τραπ. Ζητά}$$

με $\alpha = 3$, $r = -\frac{x}{2}$

Επιπλέον, $|r| = \left| -\frac{x}{2} \right|$

- $\left| -\frac{x}{2} \right| \geq 1 \Rightarrow \left| \frac{x}{2} \right| \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 2$
Η σειρά αποκλίνει

- $\left| -\frac{x}{2} \right| < 1 \Rightarrow |x| < 2$

η σειρά συγκλίνει

στο $\frac{\alpha}{1-r} = \frac{3}{1 - (-\frac{x}{2})} = \frac{6}{x+2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

$$= \frac{A(k+1)}{k(k+1)} + \frac{B \cdot k}{k(k+1)}$$

$$= \frac{A(k+1) + Bk}{k(k+1)}$$

$$= \frac{(A+B) \cdot k + A}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k + A}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow 0 \cdot A + 1 = (A+B) \cdot k + A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow B = -A = -1$$

Άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3+1} \right) + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-1+1} \right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{k+1} = 1$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στο 1.