

Ask. 4

Δευτέρα, 3 Νοεμβρίου 2025 12:16 μμ

6. Χρησιμοποιήστε το λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ για να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα:

a) $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ b) $\left\{ \frac{2^n}{1+2^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ c) $\{ne^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$
 d) $\left\{ \frac{10^n}{(2n)!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ e) $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ f) $\left\{ \frac{5^n}{2^{(n^2)}} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

$$d) \quad a_n = \frac{10^n}{(2n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{Έστω γν. αύξουσα.}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{10^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{10^n}{(2n)!}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{10^{n+1} \cdot (2n)!}{10^n \cdot (2(n+1))!} > 1$$

$$(2n+1)! = (2n+2)! = (2n)! \cdot (2n+1)(2n+2)$$

$$(2n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \underbrace{(2n-1)(2n)}_{n!} (2n+1)(2n+2)$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{10^n} \cdot 10 \cdot \cancel{(2n)!}}{\cancel{10^n} \cdot \cancel{(2n)!} \cdot (2n+1)(2n+2)} > 1$$

$$\begin{aligned} 10^{n+3} &= 10^n \cdot 10^3 \\ (10^n)^2 &= 10^{2n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{\underbrace{(2n+1)}_{>0} \underbrace{(2n+2)}_{>0}} > 1 \quad \text{για } n > 0$$

$$\Rightarrow 10 > (2n+1)(2n+2)$$

$$\Rightarrow 10 > 4n^2 + 2n + 4n + 2$$

$$\Rightarrow 0 > 4n^2 + 6n - 8$$

$$\Rightarrow 0 > 2n^2 + 3n - 4$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 6.4}{4} \begin{cases} \frac{3.4}{4} \\ -\frac{9.4}{4} \end{cases}$$

$$0 > \left(n - \frac{3.4}{4} \right) \left(n + \frac{9.4}{4} \right)$$

$\begin{matrix} \searrow < 1 \\ \swarrow > 0 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \swarrow > 0 \\ \searrow > 0 \end{matrix}$
 για να ισχύει

θα πρέπει να
 από τις 2 παραστάσεις
 να γίνει < 0 .

Άρα δεν ισχύει

δηλαδή δεν γιν. διαιρετό,

$$e) \alpha_n = \frac{n^n}{n!}$$

Έστω γιν. αύξουσα

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{n! (n+1)^{n+1}}{(n+1)! n^n} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{n!} \cdot (n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}}{\cancel{n!} \cdot \cancel{(n+1)} \cdot n^n} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} > 1$$

A' πρόταση

$$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{n} \right)^n > 1$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)^n > \ln 1$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\Rightarrow n \cdot \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) > 0$$

$$\ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) = \ln \alpha - \ln \beta$$

$$\Rightarrow n (\ln(n+1) - \ln(n)) > 0$$

$$\Rightarrow n \ln(n+1) > n \ln(n)$$

$$\Rightarrow \ln(n+1) > \ln(n)$$

$$\Rightarrow n+1 > n$$

$$\Rightarrow 1 > 0 \quad \text{ισχύει.}$$

Άρα η ανίσωση.

Β' περίπτωση

$$\Rightarrow (n+1)^n > n^n \quad \text{για } n \geq 1$$

$$\Rightarrow n+1 > n$$

$$\Rightarrow 1 > 0 \quad \text{ισχύει. Άρα η ανίσωση.}$$

$$f) \alpha_n = \frac{5^n}{2^{n^2}}$$

Έστω α_n ρ. φ. θ. ι. ν. α. σ. α

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{5^{n+1}}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{5^n}{2^{n^2}}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{5^{n+1} \cdot 2^{n^2}}{5^n \cdot 2^{(n+1)^2}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{5^n} \cdot 5 \cdot \cancel{2^{n^2}}}{\cancel{5^n} \cdot 2^{n^2+2n+1}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2^{2^m+1}} < 1$$

$$\Rightarrow 5 < 2^{2^m+1} \quad \text{για } m \geq 1$$

$$\Rightarrow \ln 5 < \ln 2^{2^m+1}$$

$$\Rightarrow \ln 5 < (2^m+1) \cdot \ln 2$$

$$\Rightarrow \ln 5 < 2^m \ln 2 + \ln 2$$

$$\Rightarrow \ln 5 - \ln 2 < 2^m \ln 2$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 5 - \ln 2}{2 \ln 2} < n$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 5}{2 \ln 2} - \frac{\ln 2}{2 \ln 2} < n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ln 5}{2 \ln 2} - \frac{1}{2} \right) < n$$

$\hookrightarrow \approx 1.16$

$$\Rightarrow 1.16 - 0.5 < n$$

$$\Rightarrow 0.66 < n \quad \text{λογόγ}$$

Αρα n γν. φθίνουσα

Ask. 5

Δευτέρα, 3 Νοεμβρίου 2025 1:28 μμ

Να δείξετε ότι είναι τελικά γνησίως φθίνουσα ή γνησίως αύξουσα η ακολουθία:

- a) $\{2n^2 - 7n\}_{n=1}^{+\infty}$ b) $\left\{\frac{n}{n^2 + 10}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
 c) $\left\{\frac{n!}{3^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ d) $\{n^5 e^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

$$a) \quad x_n = 2n^2 - 7n$$

Έστω γν. αύξουσα.

$$x_{n+1} - x_n > 0$$

$$\Rightarrow 2(n+1)^2 - 7(n+1) - (2n^2 - 7n) > 0$$

$$\Rightarrow 2(\cancel{n^2} + 2n + 1) - \cancel{7n} - 7 - \cancel{2n^2} + \cancel{7n} > 0$$

$$\Rightarrow 4n + 2 - 7 > 0$$

$$\Rightarrow 4n - 5 > 0$$

$$\Rightarrow 4n > 5$$

$$\Rightarrow 4n > 5$$

$$\Rightarrow n > \frac{5}{4}$$

Άρα για $n \geq 2$

n αμ είναι
τέλικά γν. αιώματα

$$b) \alpha_n = \frac{n}{n^2 + 10}$$

Έστω α_n γν. φθίνοντα

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n < 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{(n+1)^2 + 10} - \frac{n}{n^2 + 10} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{(n+1)^2 + 10} < \frac{n}{n^2 + 10}$$

$$\Rightarrow (n+1)(n^2+10) < n \cdot ((n+1)^2+10)$$

$$\Rightarrow \cancel{n^3} + n^2 + 10n + 10 < \cancel{n^3} + 2n^2 + 11n$$

$$\Rightarrow 0 < n^2 + n - 10$$

Γνωρίζουμε ότι $n^2 + n > 0$
πάντα

$$\text{Για } n=1 \Rightarrow 1^2 + 1 - 10 = -8 < 0$$

$$n=2 \Rightarrow -4 < 0$$

$$n=3 \Rightarrow 2 > 0$$

Άρα για $n \geq 3$ η α_n είναι
 τρέχουσα γν. φθίνουσα.

$$c) \alpha_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$c) \quad \alpha_n = \frac{n!}{3^n}$$

Έστω α_n γν. αὐζανόα

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)! \cdot 3^n}{n! \cdot 3^{n+1}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{n!} \cdot (n+1) \cancel{3^n}}{\cancel{n!} \cdot \cancel{3^n} \cdot 3} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{3} > 1$$

$$\Rightarrow m+1 > 3$$

$$\Rightarrow m > 2 \quad \text{Άρα } m \text{ και } \alpha_m$$

είναι τερματικά γν. αὐξουσά
για $m \geq 3$

$$d) \quad \alpha_m = n^5 e^{-n} \quad \text{και} \quad \alpha_m = \frac{n^5}{e^n}$$

ἔστω γν. φθίνουσα

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(m+1)^5}{e^{m+1}} - \frac{n^5}{e^n} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(m+1)^5}{e^{n+1}} < \frac{n^5}{e^n}$$

$$\Rightarrow \frac{(m+1)^5}{n} < \frac{n^5}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)}{\cancel{e^n} \cdot e} < \frac{n}{\cancel{e^n}}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^5}{e} < n^5$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^5}{n^5} < e$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 < e$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 < \ln e$$

$$\ln e = 1$$

$$\Rightarrow 5 \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) < 1$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \ln e^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \ln e^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{n} < e^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow n+1 < n \cdot e^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow n(1 - e^{\frac{1}{5}}) + 1 < 0$$

προσοχή! $e^{\frac{1}{5}} \approx 1.2$

$$\Rightarrow -n(e^{\frac{1}{5}} - 1) < -1$$

$$\Rightarrow 1 < n(e^{\frac{1}{5}} - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{1}{5}} - 1} < n$$

$$\therefore e^2 - 1$$

$$\Rightarrow 4,52 < n$$

Άρα για $n \geq 5$

α_n τείνει γν. φθίνουσα.