

Ask. 1

Δευτέρα, 27 Οκτωβρίου 2025 12:16 μμ

3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $\left\{\frac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι τελικά γνησίως φθίνουσα.

$$a_n = \frac{10^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} \right) < 1$$

$$\Rightarrow \frac{10^{n+1} \cdot n!}{10^n \cdot (n+1)!} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{10^n} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{10^n} \cdot \cancel{n!} \cdot (n+1)} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{10}{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow 10 < n+1 \quad \text{οπότε } n+1 > 0$$

$$\Rightarrow 9 < n \quad \text{Άρα για } n > 9$$

$n \alpha_n$ είναι τελεινά
γν. φθίνουσα

4. Να δείξετε ότι η ακολουθία $\left\{\frac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ συγκλίνει και να βρείτε το όριό της.

$$\alpha_n = \frac{10^n}{n!} \quad \text{είναι γν. φθίνουσα από Ασκ. 3.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = L \quad \text{οπότε } L \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10^n \cdot 10}{n! \cdot (n+1)} \quad \text{όπου } \alpha_n = \frac{10^n}{n!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \cdot \frac{10}{n+1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10}{n+1}$$

$$= L \cdot 0 = 0$$

$$\text{Άρα } L = 0$$

5. Χρησιμοποιήστε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$ για να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα:

a) $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ b) $\left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ c) $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 d) $\left\{ \frac{n}{4n-1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ e) $\{n - 2^n\}_{n=1}^{+\infty}$ f) $\{n - n^2\}_{n=1}^{+\infty}$

$$a) \quad a_n = \frac{1}{n}$$

Έστω γν. φθίνουσα

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{(n+1)n} - \frac{n+1}{(n+1)n} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{n - n - 1}{(n+1) \cdot n} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{(n+1)n} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)n} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1) \cdot n} > 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot (n+1) \cdot n > 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(n+1)}_{\substack{\sim \\ > 0}} \cdot \underbrace{n}_{\substack{\sim \\ > 0}} > 0$$

γρ. $n > 0$

Άρα ισχύει $\mathbb{K}'$ α_n γρ. φθίνουσα

$$b) \alpha_n = 1 - \frac{1}{n}$$

Έστω γρ. φθίνουσα

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n < 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \cancel{1} - \frac{1}{n+1} - \cancel{1} + \frac{1}{n} < 0$$

και b)

~ ~ ~

$$\Rightarrow \frac{1}{\underbrace{(n+1)}_{>0} \underbrace{n}_{>0}} < 0 \quad \text{γτ. } n > 0$$

$$\Rightarrow (n+1)n < 0 \quad \text{Γεν ισχύη}$$

-Αρα α_n γν. αύξουσα

$$c) \quad \alpha_n = \frac{n}{2n+1}$$

Έστω γν. φθίνουσα

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n < 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2 \cdot (n+1) + 1} - \frac{n}{2n+1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2n+3} < \frac{n}{2n+1} \quad \text{γτ. } n > 0$$

$$\frac{2m+3}{2m+1} > 0 \quad \text{για } m > 0$$

$$\Rightarrow (n+1)(2m+1) < m(2m+3)$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 2m + n + 1 < 2m^2 + 3m$$

$$\Rightarrow 1 < 0 \quad \text{Γενίως λανθάνει.}$$

Αρα α_m γν. αύξουσα.

$$d) \quad \alpha_m = \frac{n}{4m-1}$$

Έστω γν. αύξουσα.

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m > 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{4(n+1)-1} - \frac{n}{4n-1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{4n+3} > \frac{n}{4n-1} \quad \text{για } n \geq 1$$

$$\Rightarrow (n+1)(4n-1) > n(4n+3)$$

$$\Rightarrow \cancel{4n^2} + \underline{4n} - \underline{n} - 1 > \cancel{4n^2} + \underline{3n}$$

$$\Rightarrow -1 > 0 \quad \text{Τεν ισχύς}$$

Άρα αμ γν. φθίνουσιν

$$e) \alpha_n = n - 2^n$$

Έστω γν. φθίνουσιν.

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n < 0$$

$$\Rightarrow n+1 - 2^{n+1} - (n - 2^n) < 0$$

$$\Rightarrow \cancel{n+1} - 2^{n+1} - \cancel{n} + 2^n < 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2^{n+1} + 2^n < 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2^n \cdot 2 + 2^n < 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2^n < 2^n \cdot 2$$

$$\Rightarrow \frac{1+2^m}{2^m} < 2$$

γτ. $2^m > 0$
 καθώς $m \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^m} + \frac{2^m}{2^m} < 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^m} + 1 < 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^m} < 1$$

$$\Rightarrow 1 < 2^m$$

γτ. $2^m > 0$
 καθώς $m \geq 1$

$$\Rightarrow \ln 1 < \ln 2^m$$

$$\Rightarrow 0 < \underbrace{n}_{\substack{\sim \\ \hookrightarrow m \geq 1}} \cdot \boxed{\ln 2} \quad \sim > 0$$

λοξία.

Άρα αμ γτ. φθινούσ

Άρα α_n γν. φθίνουσα.

$$f) \alpha_n = n - n^2$$

Έστω α_n φθίνουσα

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n < 0$$

$$\Rightarrow (n+1) - (n+1)^2 - (n - n^2) < 0$$

$$\Rightarrow n+1 - (n^2 + 2n + 1) - n + n^2 < 0$$

$$\Rightarrow \cancel{n+1} - \cancel{n^2} - 2n - \cancel{1} - \cancel{n} + \cancel{n^2} < 0$$

$$\Rightarrow -2n < 0$$

$$\Rightarrow 0 < 2n \quad \text{ισχύει γτ. } n \geq 1$$

Άρα α_n φθίνουσα

6. Χρησιμοποιήστε το λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ για να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα:

a) $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ b) $\left\{ \frac{2^n}{1+2^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ c) $\{ne^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$
 d) $\left\{ \frac{10^n}{(2n)!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ e) $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ f) $\left\{ \frac{5^n}{2^{(n^2)}} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

$$a) \quad a_n = \frac{n}{2n+1}$$

Έστω γν. αὐξουσα

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\frac{n+1}{2(n+1)+1}}{\frac{n}{2n+1}} \right) > 1$$

$$\Rightarrow \frac{(2n+1) \cdot (n+1)}{(2(n+1)+1) \cdot n} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+3) \cdot n} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{2M^2 + M + 2M + 1}{2M^2 + 3M} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{2M^2 + 3M + 1}{2M^2 + 3M} > 1$$

A' τριών

$$\Rightarrow \frac{2M^2 + 3M}{2M^2 + 3M} + \frac{1}{2M^2 + 3M} > 1$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2M^2 + 3M} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2M^2 + 3M} > 0$$

$$\Rightarrow 2M^2 + 3M > 0$$

10x64
για $M \geq 1$

B' τριών

$$\Rightarrow \cancel{2n^2 + 3n + 1} > \cancel{2n^2 + 3n} \quad \text{γτ. } 2n^2 + 3n > 0$$

$$\Rightarrow 1 > 0 \quad \text{ισχύει}$$

Άρα a_n γν. αیزουα.

$$b) \quad a_n = \frac{2^n}{1+2^n}$$

Έστω γν. φθίνουα

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}}{2^n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{2^{n+1} \cdot (1+2^n)}{2^n (1+2^{n+1})} < 1$$

$$\frac{2^n}{2^n (1+2^{n+1})} \sim 1$$

$$\Rightarrow \frac{2^n \cdot 2 (1+2^n)}{2^n (1+2^n \cdot 2)} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{2(1+2^n)}{1+2^n \cdot 2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{2+2^n \cdot 2}{1+2^n \cdot 2} < 1$$

$$\Rightarrow 2+2^n \cdot 2 < 1+2^n \cdot 2$$

γτ. $1+2^n \cdot 2 > 0$
καθώς $n \geq 1$

$$\Rightarrow 2 < 1$$

$$\Rightarrow 1 < 0 \quad \text{Γεν. ισχύς}$$

Άρα αν χρ. λήψουν.

Αρα α_n γρ. αیزه.

$$c) \alpha_n = n \cdot e^{-n}$$

Έστω γρ. φθίνουσα

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1) e^{-(n+1)}}{n \cdot e^{-n}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1) e^{-n-1}}{n e^{-n}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1) \cancel{e^{-n}} \cdot e^{-1}}{n \cdot \cancel{e^{-n}}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1) e^{-1}}{n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{e \cdot n} < 1$$

$$\Rightarrow n+1 < e \cdot n$$

γτ. $e \cdot n > 0$
 $\hookrightarrow \theta \hat{=} n \geq 1$
 $\hookrightarrow e \approx 2.71$

$$\Rightarrow 1 < e n - n$$

$$\Rightarrow 1 < (e-1) \cdot n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e-1} < n$$

γτ. $e-1 \approx 1.71$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1.71} \right) < n$$

λοχούη.

$L_5 < 1 \quad \hookrightarrow n \geq 1$

Άρα αν γν. φθινουσά.