

Το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών - κριτήριο παρεμβολής - Κεφάλαιο VII

5. Το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών-κριτήριο παρεμβολής

Γνωρίζουμε από τα σχολικά μας χρόνια το παρακάτω θεώρημα, γνωστό και ως κριτήριο παρεμβολής ή θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων

Θεώρημα 5.1. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h για τις οποίες ισχύει

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L,$$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Παραλλαγή του παραπάνω θεωρήματος για την περίπτωση των ακολουθιών είναι το ακόλουθο θεώρημα, γνωστό και ως **θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών ή κριτήριο παρεμβολής για ακολουθίες**.

Θεώρημα 5.2. (Το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών)

Έστω οι ακολουθίες $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ για τις οποίες ισχύει

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

για όλες τις τιμές του $n \geq N, N \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L,$$

τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L$.

Για την απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση $-|a| \leq a \leq |a|$, επομένως, για μια ακολουθία $\{a_n\}$ θα ισχύει:

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

Με βάση τα παραπάνω, και με τη βοήθεια του κριτηρίου της παρεμβολής, αν

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0, \text{ τότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Έχουμε λοιπόν την παρακάτω χρήσιμη πρόταση, ειδικά για περιπτώσεις όπου οι ακολουθίες εμφανίζουν και θετικούς και αρνητικούς όρους.

Πρόταση 5.1. Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$, αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Λογμένες Ασκήσεις

► **Άσκηση 5.1.** Με τη βοήθεια του κριτηρίου της παρεμβολής, να προσδιορίσετε το όριο της ακολουθίας:

$$\left\{ \frac{n!}{n^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι:

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{9} < \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3}{32} < \frac{1}{4}, \dots$$

Οπότε για $n > 1$, ισχυριζόμαστε (γιατί) ότι θα ισχύει:

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} = \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} \right) \leq \frac{1}{n}$$

Επομένως, αφού η ακολουθία έχει μη αρνητικούς όρους, θα έχουμε ότι:

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής και επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, τελικά έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Σημειώνουμε ότι, αν και το όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hôpital διότι δεν μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα $x!$ για μη ακέραιες τιμές του x . ◀

► **Άσκηση 5.2.** Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας:

$$a_n: 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, \dots, (-1)^n \frac{1}{2^n}, \dots$$

Λύση. Αν πάρουμε την απόλυτη τιμή των όρων της ακολουθίας προκύπτει η ακολουθία:

$$|a_n|: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

Η τελευταία έχει γενικό όρο $|a_n| = \frac{1}{2^n}$ και γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

έχει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$. Τελικά, έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$ και από την Πρόταση 5.1, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. ◀

Παραγοντικό ενός φυσικού αριθμού

Υπενθυμίζεται ότι το **παραγοντικό ενός φυσικού αριθμού** v συμβολίζεται με $v!$, διαβάζεται v παραγοντικό, και είναι το γινόμενο όλων των θετικών ακεραίων μικρότερων ή ίσων με v :

$$v! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot v$$

Επιπλέον ορίζουμε, $0! = 1$.

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

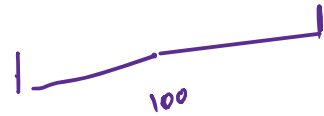
$$2! = 1 \cdot 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$\vdots$

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$$



$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$



Σημειώσεις 1

Δευτέρα, 20 Οκτωβρίου 2025 12:15 μμ

► **Άσκηση 5.1.** Με τη βοήθεια του κριτηρίου της παρεμβολής, να προσδιορίσετε το όριο της ακολουθίας:

$$\left\{ \frac{n!}{n^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}^n}{\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_n} =$$

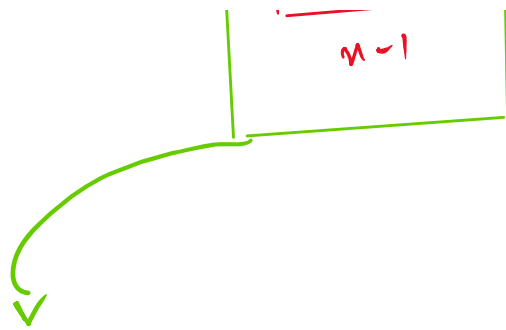
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \underbrace{(n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n)}_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}^n}{\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{n-1}}$$

$$\dot{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n \cdot n^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n!}{n^{n-1}}$$

$$\frac{1}{n} \cdot \left[\frac{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}^n}{\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{n-1}} \right]$$

?

$$\boxed{\frac{1}{n}}$$



>
<



$$n=1 \Rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

$$n=2 \Rightarrow \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$n=3 \Rightarrow \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{6}{27} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 9} = \frac{2}{9}$$

$$n=4 \Rightarrow \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{4!}{4^4} =$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{4}$$

⋮

⋮

<

Αρα

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$$

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{n!}{n^n}, \quad c_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

► Άσκηση 5.2. Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας:

$$a_n: 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, \dots, (-1)^n \frac{1}{2^n}, \dots$$

$$|a_n| = \frac{1}{2^n}$$

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -|\alpha_n| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n|$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$$

Μονότονες ακολουθίες - Η ιδιότητα “τελικά” - Κεφάλαιο VII

7. Μονότονες ακολουθίες

Πολλές φορές είναι καλό να γνωρίζουμε αν μια ακολουθία συγκλίνει χωρίς απαραίτητα να μας ενδιαφέρει το όριο της. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε διάφορα κριτήρια ελέγχου της σύγκλισης μιας ακολουθίας

Ορισμός 7.1. Μια ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται:

αυστηρά αύξουσα αν $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$

αύξουσα αν $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$

αυστηρά φθίνουσα αν $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$

φθίνουσα αν $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$

Μια ακολουθία που είναι αύξουσα ή φθίνουσα ονομάζεται **μονότονη** και μια ακολουθία που είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα ονομάζεται **γνησίως μονότονη**.

► **Παράδειγμα 7.1.** Στον παρακάτω πίνακα έχουμε από ένα παράδειγμα για κάθε μια περίπτωση που θα μπορούσε να εμφανιστεί σχετικά με την μονοτονία μιας ακολουθίας (βλέπε και σχήμα).

Ακολουθία	Μονοτονία
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$	Αυστηρά αύξουσα

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Αυστηρά φθίνουσα

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots$$

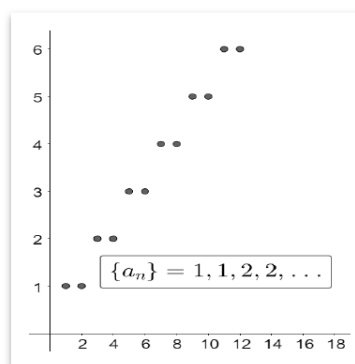
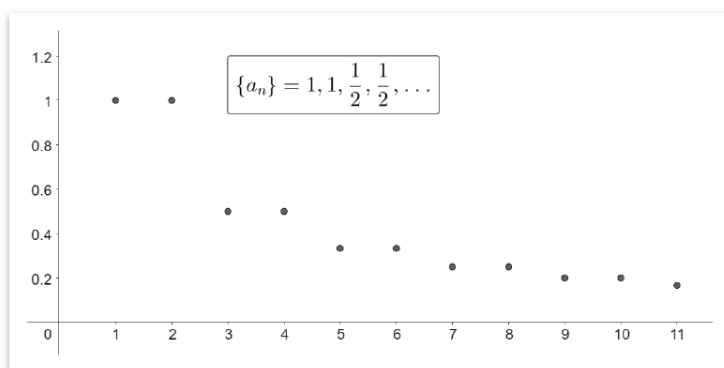
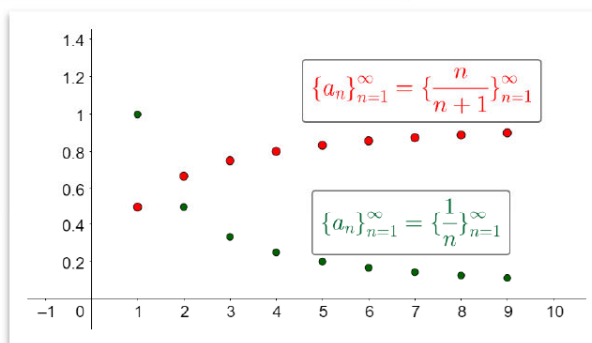
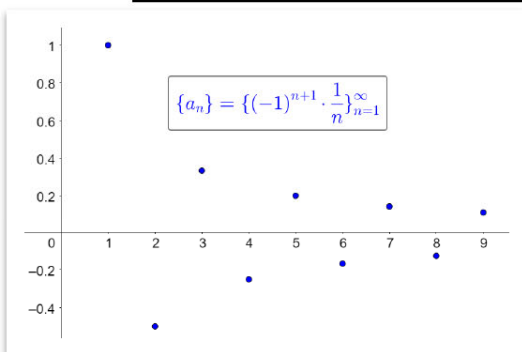
Αύξουσα, όχι αυστηρά αύξουσα

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots$$

Φθίνουσα, όχι αυστηρά φθίνουσα

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \dots$$

Ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα



Σχήμα 5 ◀

Προκειμένου να ελέγξουμε τη μονοτονία μιας ακολουθίας, συνήθως, ακολουθούμε την παρακάτω μεθοδολογία, κατά περίπτωση.

Μέθοδος 1 - διαφορά διαδοχικών όρων:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \rightarrow \text{αυστηρά αύξουσα}$$

$$a_{n+1} - a_n < 0 \rightarrow \text{αυστηρά φθίνουσα}$$

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \rightarrow \text{αύξουσα}$$

$$a_{n+1} - a_n \leq 0 \rightarrow \text{φθίνουσα}$$

Μέθοδος 2 - λόγος διαδοχικών όρων:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \rightarrow \text{αυστηρά αύξουσα}$$

$$a_{n+1}/a_n < 1 \rightarrow \text{αυστηρά φθίνουσα}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \rightarrow \text{αύξουσα}$$

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \rightarrow \text{φθίνουσα}$$

Μέθοδος 3 - έλεγχος μονοτονίας της αντίστοιχης συνάρτησης:

Θεωρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση $f(x)$, της δοσμένης ακολουθίας, δηλαδή ισχύει $f(n) = a_n$, όπου a_n ο γενικός όρος της ακολουθίας. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, μπορούμε να ελέγξουμε τη μονοτονία της ακολουθίας από τη μονοτονία της f . Τα παραπάνω συγκεντρώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Παράγωγος της f για $x \geq 1$	Συμπέρασμα για την $a_n = f(n)$
$f'(x) > 0$	αυστηρά αύξουσα
$f'(x) < 0$	αυστηρά φθίνουσα
$f'(x) \geq 0$	αύξουσα
$f'(x) \leq 0$	φθίνουσα

► **Παράδειγμα 7.2.** Με τη βοήθεια της διαφοράς διαδοχικών όρων μπορούμε να δείξουμε ότι η ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

είναι αυστηρά αύξουσα.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι

$$a_n = \frac{n}{n+1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Οπότε έχουμε $a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$ και

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

Αφού είναι $a_{n+1} - a_n > 0$, η ακολουθία είναι αυστηρά αύξουσα. ◀

► **Παράδειγμα 7.3.** Με τη βοήθεια του λόγου διαδοχικών όρων μπορούμε να δείξουμε ότι η προηγούμενη ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

είναι αυστηρά αύξουσα.

$$\text{Πράγματι, είναι } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1, n \geq 1.$$

Αφού είναι $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, η ακολουθία είναι αυστηρά αύξουσα. ◀

► **Παράδειγμα 7.4.** Με τη βοήθεια της μονοτονίας της αντίστοιχης συνάρτησης θα δείξουμε ότι η προηγούμενη ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

είναι αυστηρά αύξουσα.

Πράγματι, είναι $f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, x \geq 1$. Για $x \geq 1$, η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε θα ισχύει $a_n = f(n) < f(n+1) = a_{n+1}$, δηλαδή η ακολουθία είναι αυστηρά αύξουσα. ◀

8. Ιδιότητες που ισχύουν «τελικά»

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, υπάρχουν ακολουθίες στις οποίες οι πρώτοι όροι συμπεριφέρονται ιδιόρρυθμα και στη συνέχεια η ακολουθία παρουσιάζει ένα συγκεκριμένο μοτίβο. Για παράδειγμα, η παρακάτω ακολουθία είναι σαφώς αύξουσα από τον 6^ο όρο και μετά αλλά δεν θα μπορούσαμε να την κατατάξουμε, στο σύνολό της, στις αύξουσες ακολουθίες.

$$-10, -9, -8, -17, 12, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Προκειμένου να περιγράψουμε τη συμπεριφορά τέτοιων ακολουθιών δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 8.1. Αν, με εξαίρεση πεπερασμένου πλήθους αρχικών όρων, μια ακολουθία εμφανίζει μια συγκεκριμένη ιδιότητα, τότε θα λέμε ότι η ακολουθία έχει τελικά τη συγκεκριμένη ιδιότητα.

Με βάση τον προηγούμενο ορισμό, ενώ δεν μπορούμε να πούμε ότι η ακολουθία:

$$-10, -9, -8, -17, 12, 1, 2, 3, 4, \dots$$

είναι αυστηρά αύξουσα, μπορούμε να πούμε ότι είναι τελικά αύξουσα, εννοώντας ότι από έναν όρο της και μετά είναι αυστηρά αύξουσα.

Παρατήρηση 8.1. Σε αυτό το σημείο θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι ιδιότητες όπως η σύγκλιση μιας ακολουθίας δεν εξαρτώνται από τη συμπεριφορά των πρώτων όρων της αλλά από το πως συμπεριφέρονται οι όροι της τελικά (δηλαδή από έναν όρο και ύστερα). Για παράδειγμα, η ακολουθία:

$$3, -9, -12, 14, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

τελικά συμπεριφέρεται όπως η ακολουθία:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Άρα συγκλίνει στο μηδέν.

Λυμένες Ασκήσεις

► **Άσκηση 8.1.** Να δείξετε ότι η παρακάτω ακολουθία είναι τελικά αυστηρά αύξουσα:

$$-10, -9, -8, -17, 12, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι για όλα τα $n \geq 6$ ισχύει ότι, $a_n = n - 5$, και $a_{n+1} = n + 1 - 5 = n - 4$ επομένως,

$$a_{n+1} - a_n = n - 4 - (n - 5) = n - 4 - n + 5 = 1 > 0$$

Αφού είναι $a_{n+1} - a_n > 0$, η ακολουθία είναι τελικά αυστηρά αύξουσα. ◀

► **Άσκηση 8.2.** Να δείξετε ότι η παρακάτω ακολουθία είναι τελικά αυστηρά φθίνουσα:

$$\left\{ \frac{9^n}{n!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

Λύση. Έχουμε ότι:

$$a_n = \frac{9^n}{n!} \quad \text{και} \quad a_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{9^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{9^n}{n!}} = \frac{9^{n+1}n!}{9^n(n+1)!} = 9 \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{9}{n+1}$$

οπότε $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, για κάθε $n \geq 9$. Αφού $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, για κάθε $n \geq 9$, η ακολουθία είναι **τελικά αυστηρά φθίνουσα**. ◀

9. Σύγκλιση μονότονων ακολουθιών

Στα ακόλουθα δυο θεωρήματα, δείχνουμε ότι κάθε μονότονη ακολουθία συγκλίνει σε αριθμό ή στο άπειρο, άρα οι μονότονες ακολουθίες δεν μπορούν να είναι αποκλίνουσες.

Θεώρημα 9.1. Αν μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι τελικά αύξουσα, τότε θα ισχύει ένα από τα παρακάτω:

A) Υπάρχει μια σταθερά M , που ονομάζεται ανώτερο φράγμα (ή άνω φράγμα) της ακολουθίας, ώστε $\{a_n\} \leq M$, για όλα τα n . Τότε η $\{a_n\}$ συγκλίνει σε ένα όριο L που ικανοποιεί τη σχέση $L \leq M$.

B) Δεν υπάρχει άνω όριο, οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Θεώρημα 9.2. Αν μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι τελικά φθίνουσα, τότε θα ισχύει ένα από τα παρακάτω:

A) Υπάρχει μια σταθερά M , που ονομάζεται κατώτερο φράγμα (ή κάτω φράγμα) της ακολουθίας, ώστε $\{a_n\} \geq M$, για όλα τα n . Τότε η $\{a_n\}$ συγκλίνει σε ένα όριο L που ικανοποιεί τη σχέση $L \geq M$.

B) Δεν υπάρχει κάτω όριο, οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

► **Παράδειγμα 9.1.** Με τη βοήθεια της μονοτονίας που αποδείξαμε στην άσκηση 8.2, να δείξετε ότι η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει και να βρείτε το όριο της:

$$a_n = \frac{9^n}{n!}$$

Πράγματι, αφού στην άσκηση 8.2 δείξαμε ότι η ακολουθία είναι τελικά φθίνουσα και όλοι οι όροι της είναι θετικοί τότε έχει για κάτω φράγμα το μηδέν, δηλαδή $a_n \geq M = 0$. Από το θεώρημα 9.2 εξασφαλίζεται η σύγκλιση της ακολουθίας σε ένα όριο L .

Από την άσκηση 8.2 έχουμε ότι:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{9^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{9^n}{n!}} = \frac{9^{n+1}n!}{9^n(n+1)!} = 9 \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{9}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{9}{n+1} \cdot a_n$$

Αν πάρουμε όριο καθώς το $n \rightarrow +\infty$, και στα δυο μέλη της τελευταίας σχέσης, και αφού $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ θα έχουμε:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{n+1} a_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{n+1} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \cdot L = 0$$

Άρα, $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9^n}{n!} = 0$. ◀

► **Παράδειγμα 7.2.** Με τη βοήθεια της διαφοράς διαδοχικών όρων μπορούμε να δείξουμε ότι η ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$\alpha_n = \frac{n}{n+1}$$

είναι αυστηρά αύξουσα.

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$$\text{Ισχύει γτ. } (n+1) > 0 \text{ κ' } (n+2)$$

$$\text{κ' } (n+1)/(n+2) > 0$$

$$\text{ελθών } n > 0$$

Άρα η a_n είναι γν. αύξουσα.

► **Παράδειγμα 7.3.** Με τη βοήθεια του λόγου διαδοχικών όρων μπορούμε να δείξουμε ότι η προηγούμενη ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

είναι αυστηρά αύξουσα.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{n+1}{(n+1)+1}}{\frac{n}{n+1}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)(n+1)}{n \cdot (n+2)} > 1$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+1) > n \cdot (n+2) \quad \text{γτ. } n \cdot (n+2) > 0$$

$$\Rightarrow n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$$

$$\Rightarrow 1 > 0 \quad \text{ισχύει.}$$

Άρα a_n είναι γν. αύξουσα.

► **Παράδειγμα 7.4.** Με τη βοήθεια της μονοτονίας της αντίστοιχης συνάρτησης θα δείξουμε ότι η προηγούμενη ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

είναι αυστηρά αύξουσα.

Η αντίστοιχη συνάρτηση είναι:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

όπου $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1 - x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad \text{για } x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad \text{for } x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{για } (x+1)^2 > 0$$

Άρα $f(x)$ είναι γν. αύξουσα.

Οπότε και α_n είναι γν. αύξουσα.

► **Άσκηση 8.1.** Να δείξετε ότι η παρακάτω ακολουθία είναι τελικά αυστηρά αύξουσα:

$-10, -9, -8, -17, 12, 1, 2, 3, 4, \dots$

$$\alpha_1 = -10$$

$$\alpha_2 = -9$$

$$\alpha_3 = -8$$

$$\alpha_4 = -17$$

$$\alpha_5 = 12$$

$$\alpha_6 = 1$$

$$\alpha_7 = 2$$

$\vdots$

$$\alpha_n = n - 5$$

για $n \geq 6$ τότε $\alpha_n = n - 5$

- $\alpha_{n+1} - \alpha_n > 0$

$$c) (n+1) - 5 - (n - 5) > 0$$

$$\Rightarrow n + 1 - 5 - n + 5 > 0$$

$$\Rightarrow 1 > 0 \quad \text{ισχύει}$$

Άρα η α_n είναι τελικά γν. αیزουσα.

► **Άσκηση 8.2.** Να δείξετε ότι η παρακάτω ακολουθία είναι τελικά αυστηρά φθίνουσα:

$$\left\{ \frac{9^n}{n!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{9^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{9^n}{n!}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{9^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 9^n} < 1$$

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{q^n \cdot q \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot q^n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{q}{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow q < n+1 \quad \text{επειδή } n+1 > 0$$

$$\Rightarrow 0 < n \quad \text{ισχύει για } n \geq 0$$

$$\text{Άρα } \alpha_n \text{ τείνει γν. 0 όταν } n$$