

Ask. 1

Δευτέρα, 13 Οκτωβρίου 2025 12:21 μμ

1. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου €3.000 το οποίο τοκίζεται:

- (a) με ετήσιο επιτόκιο 7% για 5 έτη,
- (b) επιτόκιο 4% για 8 μήνες,
- (c) με ετήσιο επιτόκιο 9% για 80 ημέρες.

$$\alpha) K_5 = 3000 + 3000 \cdot 5 \cdot \frac{7}{100} = 3000 + 30 \cdot 5 \cdot 7 = 4050$$

$$b) K_8 = 3000 + 3000 \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{100} = 3000 + 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 3080$$

$$c) K_{80} = 3000 + 3000 \cdot \frac{80}{365} \cdot \frac{9}{100} = 3059,14 \dots$$

Ask. 2

Δευτέρα, 13 Οκτωβρίου 2025

12:26 μμ

2. Έστω κεφάλαιο €10.000 το οποίο τοκίστηκε από την 1η Ιανουαρίου έως τις 26^η Μαρτίου με ετήσιο επιτόκιο 9%. Να βρεθεί το νέο κεφάλαιο που δημιουργείται στην περίπτωση όπου έχουμε:
- (a) Πολιτικό έτος (όχι δίσεκτο). Δηλαδή ο Ιανουάριος έχει 31 ημέρες, ο Φεβρουάριος 28, ο Μάρτιος 31 και το έτος αποτελείται από 365 ημέρες.
- (b) Εμπορικό έτος. Δηλαδή όλοι οι μήνες έχουν 30 ημέρες και το έτος αποτελείται από 360 ημέρες.

$$α) \quad v = 31 + 28 + 26 = 85$$

$$K_{85} = 10000 + 10000 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{85}{365} = 10209.59...$$

$$β) \quad v = 30 + 30 + 26 = 86$$

$$K_{86} = 10000 + 10000 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{86}{360} = 10215$$

Ask. 3

Δευτέρα, 13 Οκτωβρίου 2025 12:33 μμ

3. Κεφάλαιο €3.000 τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 12% για 35 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξουμε στο τέλος της κατάθεσης αν ο τοκισμός έγινε

(a) Με απλό τόκο

(b) Με ετήσιο ανατοκισμό.

$$a) K_{35} = 3000 + 3000 \frac{12}{100} 35 = 15600$$

$$b) K_{35} = 3000 \left(1 + \frac{12}{100}\right)^{35} = 158398,85 \dots$$

Ask. 4

Δευτέρα, 13 Οκτωβρίου 2025 12:37 μμ

4. Κεφάλαιο €10.000 τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 15% για 30 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξουμε στο τέλος της κατάθεσης αν ο τοκισμός έγινε

(a) Με απλό τόκο

(b) Με ετήσιο ανατοκισμό.

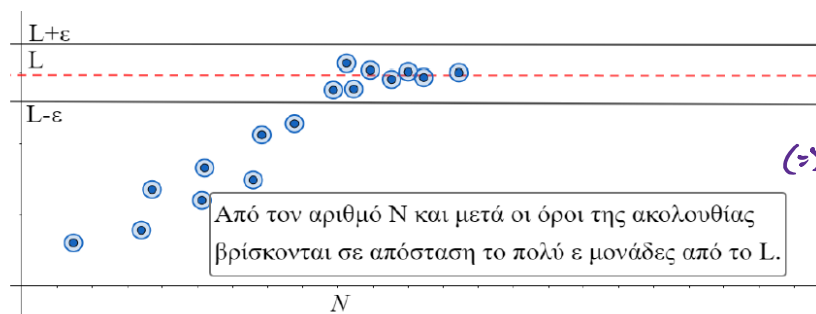
$$α) K_{30} = 10000 + 10000 \cdot \frac{15}{100} \cdot 30 = \dots$$

$$b) K_{30} = 10000 \left(1 + \frac{15}{100}\right)^{30} = \dots$$

Σύγκλιση και όριο ακολουθίας - Κεφάλαιο VII

4. Σύγκλιση και όριο ακολουθίας

Δεδομένου ότι οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις, μπορούμε να αναζητήσουμε τα όριά τους. Ωστόσο, επειδή μια ακολουθία $\{a_n\}$ ορίζεται μόνο για φυσικούς αριθμούς n , το μόνο όριο που έχει νόημα είναι το όριο για $n \rightarrow +\infty$. Το όριο μια ακολουθίας $\{a_n\}$ έχει σκοπό να περιγράψει την συμπεριφορά της ακολουθίας στο $+\infty$. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, θα πούμε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ έχει όριο τον αριθμό L αν οι όροι της ακολουθίας, τελικά, πλησιάζουν τον αριθμό L . Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχει ένας αριθμός N στην ακολουθία μετά το οποίο όλοι οι όροι της βρίσκονται μεταξύ των γραμμών $y = L + \varepsilon$ και $y = L - \varepsilon$, βλέπε σχήμα 3.



Σχήμα 3

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

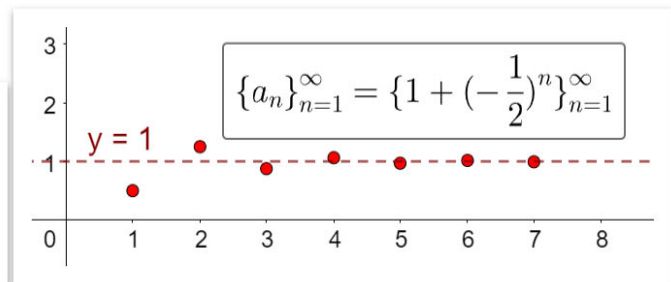
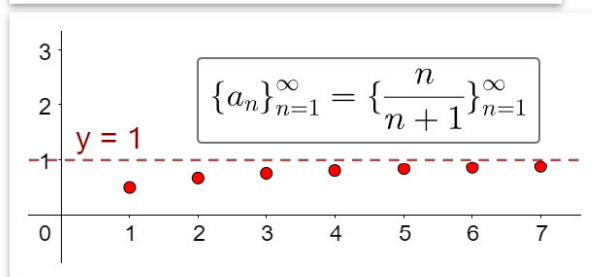
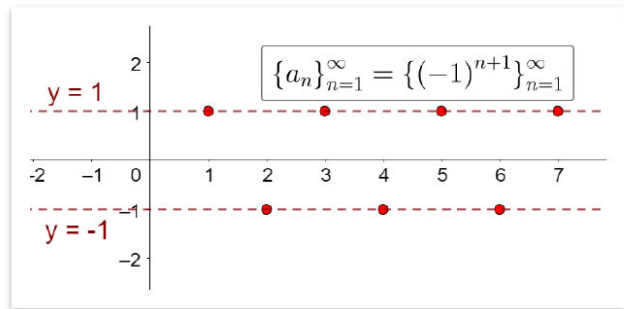
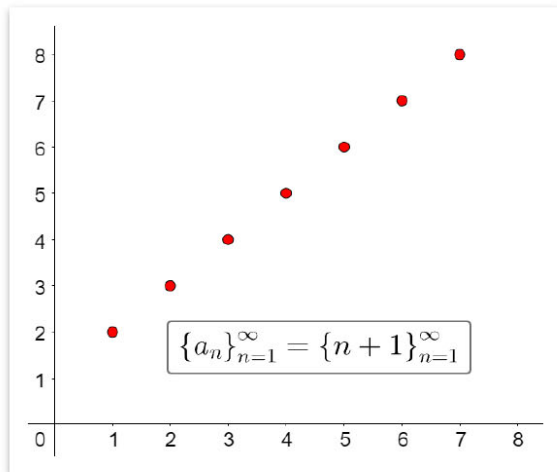
Ορισμός 4.1. Μια ακολουθία $\{a_n\}$ λέμε ότι **συγκλίνει στο όριο** $L \in \mathbb{R}$ εάν για δεδομένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε $|a_n - L| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq N$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ ή } a_n \rightarrow L.$$

Μια ακολουθία που δεν συγκλίνει σε κάποιο πεπερασμένο όριο λέγεται ότι **αποκλίνει**.

Στο σχήμα 4 βλέπουμε ότι οι δύο πρώτες ακολουθίες αποκλίνουν ενώ η τρίτη και η τέταρτη συγκλίνουν στον αριθμό 1, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ and } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] = 1$$



Σχήμα 4

Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο δηλώνουμε χωρίς απόδειξη, δείχνει ότι οι γνωστές ιδιότητες των ορίων

ισχύουν και στις ακολουθίες. Αυτό το θεώρημα εξασφαλίζει ότι οι αλγεβρικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για όρια της μορφής $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για όρια της μορφής $\lim_{n \rightarrow +\infty}$.

Πρόταση 4.1. Υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ συγκλίνουν στα όρια L_1 και L_2 , αντίστοιχα, και c είναι μια σταθερά. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c \cdot L_1$
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L_1 + L_2$
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L_1 - L_2$
- e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L_1 \cdot L_2$
- f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L_1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L_2$$

Παρατήρηση 4.1. Εάν ο γενικός όρος μιας ακολουθίας είναι μια συνάρτηση του n , δηλαδή $f(n)$, και $f(x)$ είναι η αντίστοιχη συνάρτηση που ορίζεται σε ολόκληρο το διάστημα $[1, +\infty)$, τότε οι τιμές της $f(n)$ μπορούν να θεωρηθούν ως τιμές από ένα «δείγμα» που λαμβάνουμε από την $f(x)$ για θετικές ακέραιες τιμές του x . Επομένως ισχύει:

$$\text{αν } f(x) \rightarrow L \text{ για } x \rightarrow +\infty, \text{ τότε } f(n) \rightarrow L \text{ για } n \rightarrow +\infty$$

Παρόλα αυτά, το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή αν $f(n) \rightarrow L$ για $n \rightarrow +\infty$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει $f(x) \rightarrow L$ για $x \rightarrow +\infty$.

Πρόταση 4.2. Μια ακολουθία συγκλίνει σε ένα όριο L αν και μόνο αν οι ακολουθίες των άρτιων και των περιττών όρων της συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό L .

► **Παράδειγμα 4.1.** Παρατηρούμε ότι η παρακάτω ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \dots$$

1 2 3 4 5 6

συγκλίνει στο μηδέν, αφού οι άρτιοι όροι της

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \dots \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

συγκλίνουν στο μηδέν και οι περιττοί όροι της

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

συγκλίνουν, επίσης, στο μηδέν. ◀

► **Παράδειγμα 4.2.** Παρατηρούμε ότι η παρακάτω ακολουθία:

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots$$

1 2 3 4 5 6

δεν συγκλίνει, αφού οι άρτιοι όροι της

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

δεν συγκλίνει, αφού οι άρτιοι όροι της

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

συγκλίνουν στο μηδέν και οι περιττοί όροι της

$$1, 1, 1, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

συγκλίνουν σε διαφορετικό αριθμό, στο ένα. ◀

Λυμένες Ασκήσεις

► **Άσκηση 4.1.** Να βρείτε το όριο των παρακάτω ακολουθιών:

i. $\left\{ \frac{n}{3n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

ii. $\left\{ (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

iii. $\left\{ (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

iv. $\{8 - 2n\}_{n=1}^{+\infty}$

Λύση.

i. Εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που ακολουθούμε στα όρια συναρτήσεων και διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το n έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}$$

ii. Αυτή η ακολουθία είναι η ίδια με εκείνη του μέρους i., εκτός από τον παράγοντα $(-1)^{n+1}$, ο οποίος ανάλογα με το n μας δίνει $+1$ ή -1 . Έτσι, οι όροι αυτής της ακολουθίας ταλαντεύονται μεταξύ θετικών και αρνητικών τιμών, με τους περιττούς όρους να είναι πανομοιότυποι με εκείνους του μέρους i. και τους άρτιους όρους να είναι οι αρνητικοί εκείνων του μέρους i.. Δεδομένου ότι η ακολουθία στο μέρος i. έχει όριο $\frac{1}{3}$, προκύπτει ότι οι μονοί όροι σε αυτή την ακολουθία μας δίνουν $\frac{1}{3}$ και οι ζυγοί όροι μας δίνουν $-\frac{1}{3}$. Άρα, η ακολουθία δεν έχει όριο, δηλαδή αποκλίνει.

iii. Αφού η ακολουθία $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, το γινόμενο $(-1)^{n+1}(1/n)$ ταλαντεύεται μεταξύ θετικών και αρνητικών τιμών που πλησιάζουν το μηδέν είτε από δεξιά (περιττά n), είτε από αριστερά (άρτια n). Επομένως θα ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 0.$$

iv. Παρατηρούμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} (8 - 2n) = 8 - \infty = -\infty$, άρα η ακολουθία $\{8 - 2n\}_{n=1}^{+\infty}$ αποκλίνει. ◀

► **Άσκηση 4.2.** Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n}.$$

Λύση. Η έκφραση $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n}$ είναι απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\frac{\infty}{\infty}$, οπότε όπως και στα όρια συναρτήσεων ενδείκνυται ο κανόνας L'Hospital. Ωστόσο, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτόν τον κανόνα άμεσα στην ποσότητα $\frac{n}{e^n}$ επειδή οι συναρτήσεις n και e^n έχουν οριστεί στους θετικούς ακέραιους αριθμούς, και επομένως δεν είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Για να παρακάμψουμε αυτό το πρόβλημα επεκτείνουμε τα πεδία ορισμού αυτών των συναρτήσεων σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς, αλλάζουμε τη μεταβλητή από n σε x , και εφαρμόζουμε τον κανόνα του L'Hôpital στο όριο του πηλίκου $\frac{x}{e^x}$. Έτσι έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Τελικά έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$. ◀

Άσκηση 4.3. Να δείξετε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Λύση. Είναι,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{1}{n}\right) \ln n} = e^0 = 1.$$

Διότι, με εφαρμογή του κανόνα L'Hôpital στην $\left(\frac{1}{x}\right) \ln x$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) \ln x = 0$. ◀

$$1) \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

Α' Τρόπος

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\infty}} = 1$$

Β' Τρόπος

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1-1}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1$$

2) Να διαχθαι μέσω ορισμάτι οτι :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+2}{3n} = \frac{5}{3}$$

$$L = \frac{5}{3}, \quad \alpha_n = \frac{5n+2}{3n}$$

$$|\alpha_n - L| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{5n+2}{3n} - \frac{5}{3} \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{5n+2}{3n} - \frac{5n}{3n} \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{5n+2-5n}{3n} \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2}{3n} \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3n} < \epsilon$$

$$\Rightarrow \forall \alpha \quad n > \frac{2}{3\epsilon}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \left| \frac{5n+2}{3n} - \frac{5}{3} \right| < \epsilon$$

Σημειώσεις 2

Δευτέρα, 13 Οκτωβρίου 2025 1:39 μμ

i. $\left\{ \frac{n}{3n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n(3 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{3 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{+\infty}} = \frac{1}{3}$$

ii. $\left\{ (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \boxed{(-1)^{n+1}} \cdot \boxed{\frac{n}{2n+1}}$$

↓
+ ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n(2 + \frac{1}{n})} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Επείδη } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\text{Το } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2n+1} \text{ αποκλινει.}$$

iii. $\left\{ (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\hookrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 0$$

συνκλινει.

$$\{8 - 2n\}_{n=1}^{+\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 8 - 2n = 8 - \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = 8 - \infty = -\infty$$

Άρα η ακολουθία αποκλίνει.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n}.$$

Έστω $f(x) = \frac{x}{e^x}$. τότε $a_n = \frac{n}{e^n}$

ήντα εφαρμόζουμε τον $f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} =$$

$$= \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Άρα αποδεικνύεται ότι $f(x) \rightarrow 0$ καθώς $x \rightarrow +\infty$

$$a_n \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } n \rightarrow +\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$$