

Μαθηματικά Ι (Φροντιστήριο)

Σημειώσεις Διαλέξεων

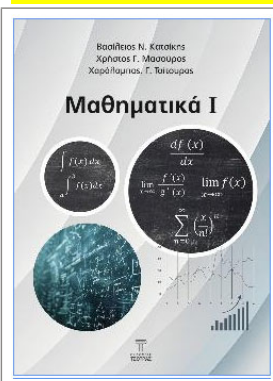
Διδάσκων: Σπυρίδων Δ. Μουρτάς

eClass ΕΚΠΑ: ECON299

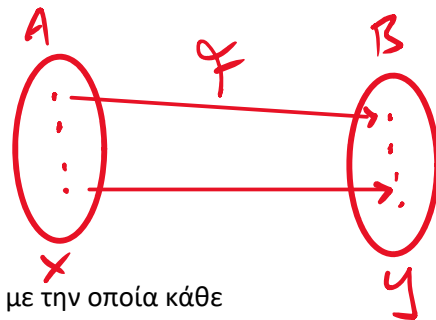
Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3

Link: <https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0>

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874

	• Κεφάλαιο VI, Παράγραφος 6 • Κεφάλαιο VII, Παράγραφοι 1-14 • Κεφάλαιο XVI, Παράγραφοι 1,2,4,5 • Κεφάλαιο XVII, Παράγραφοι 1,2
---	--

Ακολουθίες - Κεφάλαιο VII



1. Πραγματικές συναρτήσεις

Συνάρτηση f από ένα μη κενό σύνολο A σε ένα μη κενό σύνολο B λέγεται μια σχέση με την οποία κάθε στοιχείο x του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο y του συνόλου B , και συμβολίζεται

$$f: A \rightarrow B \text{ ή } y = f(x)$$

Εάν τα σύνολα A και B είναι υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ($A, B \subseteq \mathbb{R}$) τότε η f θα ονομάζεται **πραγματική συνάρτηση** και ισχύει:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Το στοιχείο x ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** ή πρότυπο και το στοιχείο y , που αντιστοιχεί στο x , ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή** ή εικόνα του x και συμβολίζεται ως $f(x)$.

Το σύνολο A όλων των x ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f και θα το συμβολίζουμε $D(f)$. Το σύνολο B όλων των εικόνων $f(x)$ ονομάζεται **πεδίο τιμών** της f και θα το συμβολίζουμε $R(f)$.

Βασικές μαθηματικές συναρτήσεις

1. Σταθερή: $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$
2. Γραμμική (Ευθεία): $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$
3. Τετραγωνική (Πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού): $f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}$
4. Ομογραφική: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$
5. Πολυωνυμικές: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
6. Ρητές: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, P(x), Q(x)$ πολυώνυμα πεπερασμένου βαθμού
7. Εκθετική: $f(x) = a^x, a > 0$
8. Λογαριθμική: $f(x) = \log_a x, 0 < a \neq 1$
9. Τριγωνομετρικές: $f(x) = \eta \mu x, f(x) = \sigma \nu \eta x, f(x) = \varepsilon \varphi x$

2. Ακολουθίες

Ακολουθία ονομάζεται μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ και σύνολο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Δηλαδή, χαρακτηρίζουμε **ακολουθία** κάθε συνάρτηση της μορφής

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Οι ακολουθίες συμβολίζονται με μικρά γράμματα, π.χ. a . Η **εικόνα** του αριθμού $n \in \mathbb{N}$, $a(n)$, ονομάζεται n -οστός όρος της ακολουθίας και συνήθως συμβολίζεται a_n ή $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ή $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$.

Ο a_{n+1} ονομάζεται **επόμενος** του a_n και ο a_n **προηγούμενος** του a_{n+1} .

Οι ακολουθίες μπορούν να αναπαρασταθούν

- δι' αναγραφής, π.χ. $2, 4, 6, 8, \dots$
- ή δι' ενός γενικού τύπου, π.χ. $a_n = n + 2$
- ή με μία αναδρομική σχέση όπου θα πρέπει να δίνονται οι **αρχικές τιμές** των πρώτων όρων της ακολουθίας.

- ή δι' ενός γενικού τύπου,
- ή με μία αναδρομική σχέση όπου θα πρέπει να δίνονται οι **αρχικές τιμές** των πρώτων όρων της ακολουθίας.

$$πχ. \quad a_n = n + 2$$

$$πχ. \quad a_n = a_{n-1} + 2$$

Πράξεις μεταξύ ακολουθιών:

- Ισότητα
- Άθροισμα
- Διαφορά
- Γινόμενο
- Πηλίκο
- Γινόμενο πραγματικού αριθμού με ακολουθία
- Τετραγωνική ρίζα της ακολουθίας

$$a_n = 2n$$

$$b_n = n + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 2n \\ b_n = n + 1 \end{array} \right\} a_n + b_n = 3n + 1$$

► **Παράδειγμα 2.1.** Να βρείτε έναν γενικό όρο, με βάση τους πρώτους όρους που δίνονται, για τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\alpha) \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \quad \beta) \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \quad \gamma) \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots \quad \delta) 1, 3, 5, 7, \dots$$

Για την περίπτωση α) παρατηρούμε ότι ο παρανομαστής κάθε κλάσματος είναι μεγαλύτερος κατά μια μονάδα από τον αριθμητή, επομένως η ακολουθία θα είναι:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$(-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\text{και } f(n) = \frac{n}{n+1}.$$

Για την περίπτωση β) παρατηρούμε ότι ο παρανομαστής κάθε κλάσματος είναι δύναμη του δύο, επομένως η ακολουθία θα είναι:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

$$\text{και } f(n) = \frac{1}{2^n}.$$

Για την περίπτωση γ) παρατηρούμε ότι κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο αν προσθέσουμε τον αριθμό +2, επομένως, η ακολουθία θα είναι:

$$1, 3, 5, 7, \dots, n+2, \dots$$

$$\text{και } f(n) = n+2.$$

Όταν σε μια ακολουθία:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

είναι γνωστός ο γενικός όρος, τότε δεν είναι απαραίτητο να γράψουμε τους πρώτους όρους και συνηθίζεται να γράφουμε τον γενικό όρο μέσα σε άγκιστρα, δηλαδή

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ή απλά } \{a_n\}$$

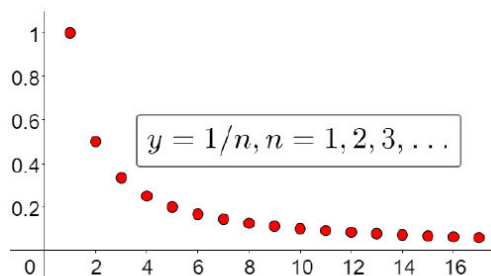
Για παράδειγμα, την ακολουθία του α) ερωτήματος του προηγούμενου παραδείγματος θα μπορούσαμε να την γράψουμε ως $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Να σημειώσουμε εδώ ότι δεν είναι απαραίτητο σε μια ακολουθία ο δείκτης της (δηλαδή το n) να ξεκινά από την τιμή 1, σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να ξεκινά από το μηδέν ή από οποιονδήποτε άλλον φυσικό αριθμό. Δείτε για παράδειγμα την ακολουθία:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots$$

Θα μπορούσαμε να την περιγράψουμε με δυο τρόπους, είτε ως $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ στην οποία ο δείκτης αρχίζει από το μηδέν, είτε ως $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ στην οποία ο δείκτης αρχίζει από το ένα.

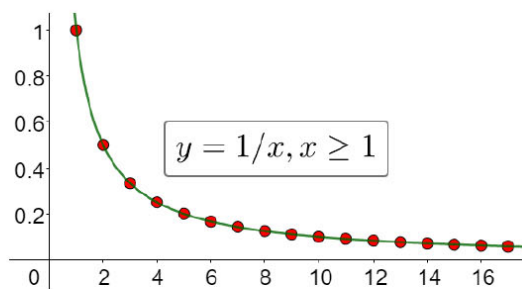
3. Γραφική παράσταση μιας ακολουθίας

Αφού οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις, έχει νόημα να μιλάμε για την γραφική τους παράσταση. Ας δούμε για παράδειγμα την ακολουθία $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, τότε η γραφική της παράσταση είναι τα σημεία $(x, y) \equiv \left(n, \frac{1}{n}\right), n = 1, 2, 3, \dots$, βλέπε σχήμα 1.



Σχήμα 1

Προσοχή στη διαφορά της παραπάνω γραφικής παράστασης από την γραφική παράσταση της αντίστοιχης συνάρτησης, δηλαδή της $y = \frac{1}{x}, x \geq 1$, η οποία είναι μια συνεχόμενη καμπύλη όπως στο σχήμα 2.



Σχήμα 2

Ask. 1

Δευτέρα, 6 Οκτωβρίου 2025 12:43 μμ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(a) $f(x) = x^3$

(b) $\frac{1}{(x-1)(x-3)}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

a) π.ο. $\mathbb{R}$

b) $(x-1)(x-3) \neq 0$, π.ο. $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$
ή $\mathbb{R} - \{1, 3\}$

c) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$\rho_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} & \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ & \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \\ & \rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \end{aligned}$$

$$(x-3)(x-2) \geq 0$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
f(x)	+	-	+	

π.ο. $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

Ask. 4

Δευτέρα, 6 Οκτωβρίου 2025 12:52 μμ

4. Γράψτε τους τέσσερις πρώτους όρους της ακολουθίας:

(a) $\{1 + (-1)^n\}_{n=0}^{+\infty}$

(b) $\{n^2 + 2\}_{n=0}^{+\infty}$

a)

$$\alpha_0 = 1 + (-1)^0 = 2$$
$$\alpha_1 = 1 + (-1)^1 = 0$$
$$\alpha_2 = 1 + (-1)^2 = 2$$
$$\alpha_3 = 1 + (-1)^3 = 0$$

b)

$$\alpha_0 = 0^2 + 2 = 2$$
$$\alpha_1 = 1^2 + 2 = 3$$
$$\alpha_2 = 2^2 + 2 = 6$$
$$\alpha_3 = 3^2 + 2 = 11$$

Ask. 5

Δευτέρα, 6 Οκτωβρίου 2025

12:57 μμ

5. Αν $a_0 = 5$, να βρεθεί ο πέμπτος όρος της ακολουθίας: $a_n = a_{n-1} - 1$

$$a_0 = 5$$

$$a_1 = 5 - 1 = 4$$

$$a_2 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = 3 - 1 = 2$$

$$a_4 = 2 - 1 = 1$$

$$a_5 = 1 - 1 = 0$$

Πρόοδοι και Εφαρμογές στις Οικονομικές Επιστήμες - Κεφάλαια XVI & XVII

Αριθμητική Πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού. Δηλαδή:

$$a_{n+1} = a_n + w, n = 1, 2, 3, \dots$$

Ο n -οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με **πρώτο όρο** a_1 και **διαφορά** w είναι

$$a_n = a_1 + (n - 1)w$$

$$a_{n+1} - a_n = w$$

$$\text{π.χ. } 2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 + 2 = 4$$

$$\vdots$$
$$a_{50} = 2 + (50 - 1) \cdot 2 = 100$$

$$a_{50} = ?$$

Ιδιότητες

- Μία αριθμητική πρόοδος ορίζεται πλήρως εάν γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά της.
- Το άθροισμα των πρώτων n όρων αριθμητικής προόδου, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, με διαφορά w είναι

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)w}{2} n$$

ή

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

$$S_{50} = \frac{2 + 100}{2} \cdot 50 = 2550$$

Γεωμετρική Πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό. Δηλαδή:

$$a_{n+1} = a_n \cdot \lambda, n = 1, 2, 3, \dots$$

Ο n -οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με **πρώτο όρο** a_1 και **λόγο** λ είναι

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

$$\text{π.χ. } 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$
$$a_1 = 2, \lambda = 2$$

$$a_{50} = 2 \cdot 2^{50-1} = 2^{50}$$

Σημειώστε ότι σε μια γεωμετρική πρόοδο a_n υποθέτουμε πάντα ότι $a_1 \neq 0$ και $\lambda \neq 0$, οπότε ισχύει ότι $a_n \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots$

Ιδιότητες

- Μία γεωμετρική πρόοδος ορίζεται πλήρως εάν γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της και το λόγο της.
- Το άθροισμα των πρώτων n όρων γεωμετρικής προόδου, S_n , με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ είναι

$$S_n = a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

- Το άθροισμα άπειρων όρων μίας γεωμετρικής προόδου, S_∞ , με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ , με $|\lambda| < 1$, είναι ίσο με:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - \lambda}$$

$$S_{50} = 2 \cdot \frac{2^{50} - 1}{2 - 1} = 2^{51} - 2$$

$$\text{Έστω } \lambda = \frac{1}{2}, a_1 = 2 \text{ τότε } S_\infty = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

Απλός Τόκος

Αν τοκίσουμε ένα κεφάλαιο K για ένα έτος με ετήσιο επιτόκιο i , τότε στο τέλος του έτους θα δημιουργηθεί τόκος I ο οποίος θα δίνεται από τη σχέση:

$$I = K \cdot i.$$

Το νέο κεφάλαιο που δημιουργείται στο τέλος των n ετών είναι ίσο με το αρχικό κεφάλαιο K συν τους τόκους των n ετών, το συμβολίζουμε με K_n και είναι:

$$K_n = K + I_n.$$

Τύποι:

Χρόνος σε έτη n

Χρόνος σε μήνες μ

Χρόνος σε ημέρες ν

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1) \cdot \omega$$

$$\begin{aligned} K_n &= K_1 + (n-1) \cdot K_0 \cdot i \\ &= (K_0 + K_0 \cdot i) + (n-1) \cdot K_0 \cdot i \\ &= K_0 + n \cdot K_0 \cdot i \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} I_n = K \cdot n \cdot i \\ K_n = K + K \cdot n \cdot i \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} I_\mu = K \cdot \frac{\mu}{12} \cdot i \\ K_\mu = K + \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} I_\nu = K \cdot \frac{\nu}{365} \cdot i \\ K_\nu = K + \frac{K \cdot \nu \cdot i}{365} \end{array}$$

Παρατηρήστε ότι στον απλό τόκο το αρχικό κεφάλαιο παραμένει σταθερό σε όλες τις περιόδους τοκισμού.

$$K_0 = 1000 \text{ €}$$

$$i = 10\% = \frac{10}{100}$$

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 + I_1$$

$$K_2 = K_0 + I_2$$

$\vdots$

$$K_n = K_0 + I_n$$

Ανατοκισμός

Στον ανατοκισμό, στο τέλος κάθε περιόδου, ο τόκος και το κεφάλαιο αθροίζονται και το άθροισμα αυτό τοκίζεται σαν νέο αρχικό κεφάλαιο.

Τα κεφάλαια που προκύπτουν κατά τη διαδικασία του ανατοκισμού στο τέλος κάθε περιόδου, αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το αρχικό κεφάλαιο κατάθεσης και λόγο τον όρο $1 + i$.

Ο γενικός τύπος του ανατοκισμού είναι ο ακόλουθος:

$$\alpha_n = \alpha_1 \cdot 2^{n-1}$$

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

Όπου K_0 συμβολίζει το αρχικό κεφάλαιο. Σημειώστε ότι για να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο θα πρέπει το επιτόκιο να είναι σταθερό για όλη τη διάρκεια του ανατοκισμού.

$$\begin{aligned} K_n &= K_1 \cdot (1 + i)^{n-1} = (K_0 + K_0 \cdot i) (1 + i)^{n-1} = \\ &= K_0 (1 + i) (1 + i)^{n-1} \\ &= K_0 \cdot (1 + i)^n \end{aligned}$$

$$K_0 = 1000, \quad i = 10\%$$

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = 1000 + 1000 \cdot \frac{10}{100} = 1100$$

$$K_2 = \dots$$

$\vdots$

$$K_n = \frac{K_0 (1 + i)^2}{1 + i} = 1 + i$$

$$f = \frac{v_2}{v_1} = \frac{k_0(1+i)^2}{k_0(1+i)} = 1+i$$

Ask. 2

Δευτέρα, 6 Οκτωβρίου 2025 1:28 μμ

2. Έστω αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο το 3 και διαφορά το 3. Να υπολογίσετε τον τεσσαρακοστό όρο της, a_{40} . Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της, S_{40} .

$$a_1 = 3, \quad \omega = 3$$

$$a_{40} = 3 + (40 - 1) \cdot 3 = 120$$

$$S_{40} = \frac{3 + 120}{2} \cdot 40 = 2460$$

Ask. 6

Δευτέρα, 6 Οκτωβρίου 2025 1:30 μμ

6. Έστω γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο το 3 και λόγο το $\frac{1}{4}$. Να υπολογίσετε τον τεσσαρακοστό όρο της, a_{40} . Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της, S_{40} , και το άθροισμα άπειρων όρων της, S_{∞} .

$$a_1 = 3, r = \frac{1}{4}$$

$$a_{40} = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{40-1} = \frac{3}{4^{39}}$$

$$S_{40} = 3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{40} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = 3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{40} - 1}{-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{3 \cdot \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{40} - 1\right)}{1}}{-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{-3 \cdot 4 \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{40} - 1\right)}{1 \cdot 3}$$

$$= -4 \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{40} - 1\right)$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{40} + 4$$

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

$$= -4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{40} + 4$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{40} + 4 = 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{39}$$

$$\approx -4 \cdot 4^{-40} + 4 = 4 - 4^{-39}$$

$$S_{\infty} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$