

► **Άσκηση 6.** Οι συναρτήσεις οριακού κόστους και οριακών εσόδων μιας επιχείρησης είναι:

$$MC(q) = 20 + 12q(q^2 + 2)^2 \quad \text{και} \quad MR(q) = 2q^{-2} + 3q^{-1}$$

αντίστοιχα, όπου $q \neq 0$. Γνωρίζουμε επίσης ότι, όταν η επιχείρηση παράγει 3 μονάδες προϊόντος, το συνολικό κόστος παραγωγής ανέρχεται στις 2760 νομισματικές μονάδες, ενώ όταν η επιχείρηση πουλάει μια μονάδα προϊόντος τα συνολικά έσοδα ανέρχονται σε 10 νομισματικές μονάδες. Ζητούνται:

- η συνάρτηση συνολικού και μέσου κόστους.
- η συνάρτηση συνολικών εσόδων.
- η συνάρτηση $P(q)$ της συγκεκριμένης επιχείρησης.**
- αν η συνάρτηση οριακού εσόδου μιας επιχείρησης εξαρτάται από τον χρόνο και είναι $MR(t) = (t - 1)^2$ βρείτε τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης κατά τα 5 πρώτα έτη λειτουργίας της.

τιμή - (αντίστροφη συνάρτηση) **S.O.S.** *Σύμβαση*

$$TC(3) = 2760$$

$$TR(1) = 10$$

Ισχύει ότι:

$$TC(Q) = \int TC'(Q) dQ = \int MC(Q) dQ$$

$$TR(Q) = \int TR'(Q) dQ = \int MR(Q) dQ$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\substack{\downarrow \\ \text{μεταβολή ως } F \\ \text{από "a" ως "b"}.}} = \Delta F \Big|_a^b$$

Π.χ. Αν θέλουμε να βρούμε την μεταβολή του συνολικού κόστους από επίπεδο παραγωγής $Q=2$ μον. σε επίπεδο παραγωγής $Q=7$ μον. και γνωρίζω ότι το $MC(Q) = Q + 4$.

$$\Delta TC \Big|_2^7 = \text{μεταβολή του κόστους από } Q=2 \rightarrow Q=7$$

$$\begin{aligned}\Delta TC \Big|_2^7 &= \text{μεταβολή του κόστους από } Q=2 \rightarrow Q=7 \\ &= TC(7) - TC(2) = \left[TC(Q) \right]_2^7 = \int_2^7 TC'(Q) dQ \\ &= \int_2^7 MC(Q) dQ = \int_2^7 (Q + 4) dQ = \\ &\left[\frac{Q^2}{2} + 4Q \right]_2^7 = \dots\end{aligned}$$

Συνολικά έχουμε:

$$\Delta TC(Q) \Big|_a^b = \int_a^b MC(Q) dQ$$

$$\Delta TR(Q) \Big|_a^b = \int_a^b MR(Q) dQ$$

i) $MC(q) = 20 + 12q(q^2 + 2)^2$ και $MR(q) = 2q^{-2} + 3q^{-1}$

$$MC(Q) = 20 + 12Q(Q^4 + 4Q^2 + 4) = 12Q^5 + 48Q^3 + 48Q + 20$$

$$\begin{aligned}TC(Q) &= \int MC(Q) dQ = \int (12Q^5 + 48Q^3 + 48Q + 20) dQ = \\ &= 2Q^6 + 12Q^4 + 24Q^2 + 20Q + C\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $TC(3) = 2760$

$$2760 = 2 \cdot 3^6 + 12 \cdot 3^4 + 24 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3 + C \Rightarrow \dots$$

$$C = 54$$

Άρα, $TC(Q) = 2Q^6 + 12Q^4 + 24Q^2 + 20Q + 54$

Άρα, $TC(Q) = 2Q^5 + 12Q^4 + 24Q^3 + 20Q + 54$

Μέσο κόστος: $ATC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} =$

$$ATC(Q) = 2Q^4 + 12Q^3 + 24Q^2 + \frac{54}{Q} + 20$$

ii)

$$MR(q) = 2q^{-2} + 3q^{-1}$$

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$TR(Q) = \int MR(Q) dQ = \int 2Q^{-2} + 3Q^{-1} dQ =$$

$$= 2 \cdot \frac{Q^{-1}}{-1} + 3 \ln|Q| + C = \frac{-2}{Q} + 3 \ln|Q| + C$$

Όπως, $TR(1) = 10$ επομένως $10 = \frac{-2}{1} + 3 \ln 1 + C$

$$\Rightarrow C = 12.$$

Συνολική έσοδος:

$$TR(Q) = \frac{-2}{Q} + 3 \ln|Q| + 12$$

iii) Όταν μας δίνεται την $P(Q)$ = τιμή του προϊόντος ως προς την ποσότητα λύνουμε την συνάρτηση των συνολικών εσόδων ως προς P .

$$TR(Q) = P(Q) \cdot Q \Rightarrow P(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Q) = \frac{-\frac{2}{Q} + 3 \ln|Q| + 12}{Q}$$

$$P(Q) = -\frac{2}{Q^2} + \frac{3 \ln|Q|}{Q} + \frac{12}{Q}$$

$$\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} \right] a$$

iv)

αν η συνάρτηση οριακού εσόδου μιας επιχείρησης εξαρτάται από τον χρόνο και είναι $MR(t) = (t-1)^2$ βρείτε τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης κατά τα 5 πρώτα έτη λειτουργίας της.

$$t: 0 \longrightarrow 5$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$a \quad b$$

$$\Delta TR \Big|_0^5 = TR(5) - TR(0) =$$

$$[TR(t)]_0^5 = \int_0^5 MR(t) dt = \int_0^5 (t-1)^2 dt =$$

$$= \left[\frac{(t-1)^3}{3} \right]_0^5 = \frac{4^3}{3} + \frac{1}{3} = \dots = \frac{65}{3}$$

ή

$$= \int_0^5 t^2 - 2t + 1 dt = \left[\frac{t^3}{3} - t^2 + t \right]_0^5 = \dots = \frac{65}{3}$$

► Άσκηση 7. Αν η συνάρτηση του οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι

$$MC(q) = -\frac{100}{q^2} + \frac{1}{4}$$

και η συνάρτηση του συνολικού κόστους έχει ελάχιστη τιμή 35 νομισματικών μονάδων, να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους της επιχείρησης.

$$TC(Q) = \text{ελάχιστη τιμή } 35 \text{ ν.μ.}$$

άρα υπάρχει κάποια ποσότητα Q_0 ώστε

$$TC'(Q_0) = 0 \text{ (I) και}$$

$$TC''(Q_0) > 0$$

και $T(Q_0) = 35$ (II)

$$TC(Q) = \int MC(Q) dQ = \int -\frac{100}{Q^2} + \frac{1}{4} dQ =$$

$$= \frac{100}{Q} + \frac{1}{4} Q + C \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$TC(Q) = \frac{100}{Q} + \frac{Q}{4} + C$$

Από την σχέση (I) $\Rightarrow TC'(Q_0) = 0 \Rightarrow$

$$MC(Q_0) = 0 \Rightarrow -\frac{100}{Q_0^2} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{100}{Q_0^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow Q_0^2 = 400 \Rightarrow \boxed{Q_0 = 20} \text{ ή } \boxed{Q_0 = -20}$$

Δεκτή Απορ.

Επομένως από την (II) $\Rightarrow TC(Q_0) = 35 \Rightarrow$

$$TC(20) = 35$$

Άρα, $TC(Q) = \frac{100}{Q} + \frac{Q}{4} + C \Rightarrow$

$$35 = \frac{100}{20} + \frac{20}{4} + C \Rightarrow$$

$$35 = 5 + 5 + C \Rightarrow$$

$$\boxed{C = 25}$$

$$35 = 5 + 5 + C \Rightarrow C = 25$$

Συνολικά έξοδα:

$$TC(Q) = \frac{100}{Q} + \frac{Q}{4} + 25$$

S.O.S

► **Άσκηση 8.** Δίνονται οι συναρτήσεις ζήτησης $D(p)$ και προσφοράς $S(p)$ ενός προϊόντος ως προς την τιμή p της μιας μονάδας:

$$q_d = D(p) = 140 - 2p \quad \text{και} \quad q_s = S(p) = 4p + 20$$

i. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση **συνολικού κόστους**, αν το συνολικό κόστος παραγωγής q μονάδων, $TC(q)$, δίνεται από ένα **δευτεροβάθμιο πολυώνυμο** ως προς q και γνωρίζουμε ότι:

α. το σταθερό συνολικό κόστος ισούται με 90 νομισματικές μονάδες

β. **το κέρδος**, δηλαδή η διαφορά των συνολικών εσόδων από το συνολικό κόστος, **μεγιστοποιείται στην τιμή ισορροπίας και**

γ. το οριακό κόστος για παραγόμενη ποσότητα που αντιστοιχεί στο ήμισυ της τιμής ισορροπίας ισούται με 7 νομισματικές μονάδες.

ii. Να βρεθεί η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα. Να υπολογισθούν τα μέγιστα συνολικά έσοδα.

iii. Να βρεθεί η ποσότητα που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος. Να υπολογισθεί το ελάχιστο μέσο κόστος.

$$i) \quad TC(Q) = a_2 Q^2 + a_1 \cdot Q + a_0$$

Το σταθερό κόστος είναι 90 νομισματικές μον.

$$FC = TC(0) = a_0 = 90$$

$$q_d = D(p) = 140 - 2p \quad \text{και} \quad q_s = S(p) = 4p + 20$$

Τιμή ισορροπίας: $Q_D = Q_S \Rightarrow 140 - 2P = 4P + 20$

$$6P = 120 \Rightarrow P^* = 20$$

$$Q_D(20) = 140 - 2 \cdot 20 \Rightarrow Q^* = 100$$

Σημείο ισορ. $(P^*, Q^*) = (20, 100)$

Σημείο ισορ. $(P^*, Q^*) = (20, 100)$

Αφού το κέρδος μεγιστοποιείται στην σημείωση θα ισχύει:

$$\pi'(20) = 0$$

$$\text{και } \pi''(20) < 0$$

Συνάρτηση κέρδους:

$$\pi(P) = \text{TR}(P) - \text{TC}(P)$$

$$\Rightarrow \pi(P) = P \cdot Q_D - (\alpha_2 Q_S^2 + \alpha_1 Q_S + 90)$$



$$\Rightarrow \pi(P) = P(140 - 2P) - (\alpha_2 (4P + 20)^2 + \alpha_1 (4P + 20) + 90)$$

Αφού το κέρδος μεγιστοποιείται στην σημείωση ισορ.

$$\pi'(20) = 0$$

$$\pi'(P) = 140 - 4P - \alpha_2 \cdot 8(4P + 20) - 4\alpha_1$$

$$\begin{aligned} [4P + 20]' &= \\ 2(4P + 20) \cdot 4 &= \\ &= 8(4P + 20) \end{aligned}$$

$$\pi'(20) = 0 \Rightarrow 200a_2 + a_1 = 15 \quad (1)$$

το οριακό κόστος για παραγόμενη ποσότητα που αντιστοιχεί στο ήμισυ της τιμής ισορροπίας ισούται με 7 νομισματικές μονάδες.

$$TC'(10) = 7$$

$$P^* = 20 \quad P = \frac{P^*}{2} = 10$$

$$TC(Q) = a_2 Q^2 + a_1 Q + 90$$

$$TC(P) = a_2 (4P + 20)^2 + a_1 (4P + 20) + 90 \Rightarrow$$

$$TC'(P) = 8a_2 (4P + 20) + 4a_1$$

$$P = 10 \Rightarrow$$

$$7 = 480a_2 + 4a_1 \quad (2)$$

Απο (1), (2) έχουμε

$$a_2 = 0.1$$

$$\text{και } a_1 = -5$$

Συνολικά έχουμε :

$$TC(Q) = 0.1Q^2 - 5Q + 90$$

ii. Να βρεθεί η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα. Να υπολογισθούν τα μέγιστα συνολικά έσοδα.

$$TR(P) = P \cdot Q_D = P \cdot (140 - 2P)$$

$$TR(P) = 140P - 2P^2$$

$$TR'(P) = 140 - 4P = 0 \Rightarrow \boxed{P = 35}$$

$$TR''(P) = -4, \quad TR''(35) = -4 < 0$$

Άρα για $\boxed{P = 35}$ μεγιστοποιείται η έσοδα.

$$Q_D = 140 - 2P \xrightarrow{P=35} \boxed{Q_D = 70}$$

Συνολικά έσοδα: $TR(35) = \dots = 2450$

iii. Να βρεθεί η ποσότητα που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος. Να υπολογισθεί το ελάχιστο μέσο κόστος.

$$ATC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}$$

$$\boxed{TC(Q) = 0.1Q^2 - 5Q + 30}$$

$$ATC(Q) = 0.1Q - 5 + \frac{30}{Q}$$

$$ATC'(Q) = 0.1 - \frac{30}{Q^2} = 0 \Rightarrow \frac{30}{Q^2} = 0.1 \Rightarrow$$

$$Q^2 = 300 \Rightarrow$$

$$\boxed{Q = -30}$$

$$\text{ή } \boxed{Q = 30}$$

Απορ.

$$ATC''(Q) = +\frac{180}{Q^3}$$

$$ATC''(30) = +\frac{180}{30^3} > 0$$

Άρα, για $Q = 30$ ελαχιστοποιείται το μέσο κόστος

$$\text{To } \underline{ATC(30)} = 0.1 \cdot 30 - 5 + \frac{90}{30} =$$

$$= 3 - 5 + 3 = \underline{\underline{1}}$$