

► Άσκηση 3. Δίνεται η συνάρτηση των ολικών εσόδων μιας επιχείρησης:

$$TR(q) = -q^3 + 18q^2 - 60q,$$

όπου q είναι η ποσότητα προϊόντος που διατίθεται στην αγορά.

i. Να προσδιορισθεί η ποσότητα q στην οποία η συνάρτηση των μέσων εσόδων έχει τοπικό ακρότατο. Στη συνέχεια να χαρακτηριστεί το σημείο αυτό ως τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο και να βρεθεί η τιμή των ολικών (TR) και των μέσων εσόδων (AR) στο ακρότατο.

ii. Να υπολογιστεί η συνάρτηση οριακών εσόδων (MR) και να βρεθεί η τιμή της στο τοπικό ακρότατο του πρώτου ερωτήματος.

iii. Να προσδιορισθεί η ποσότητα q για την οποία ισχύει $MR = AR$. Συγκρίνετε αυτή την ποσότητα με την ποσότητα προϊόντος για την οποία υπάρχει ακρότατο στο AR .

iv. Να επιβεβαιωθεί ότι στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα μέσα έσοδα η ελαστικότητα των ολικών εσόδων ισούται με την μονάδα. Να δοθεί η ερμηνεία της τιμής της ελαστικότητας.

v. Να επιβεβαιωθεί ότι στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα ολικά έσοδα η ελαστικότητα των μέσων εσόδων ισούται με μείον ένα. Να δοθεί η ερμηνεία της τιμής της ελαστικότητας.

i) $TR(q) = -q^3 + 18q^2 - 60q,$

$ATR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} = -Q^2 + 18Q - 60$

$ATR'(Q) = -2Q + 18 = 0 \Rightarrow Q = 9$

$ATR''(Q) = -2$

$ATR''(9) = -2 < 0 \rightarrow$ Για $Q = 9$ τα μέσα έσοδα μεγιστοποιούνται.

$f(x) \rightarrow \frac{f(x)}{x}$
 $TR \rightarrow ATR = \frac{TR}{Q}$
 $TC \rightarrow ATC = \frac{TC}{Q}$

ii. Να υπολογιστεί η συνάρτηση οριακών εσόδων (MR) και να βρεθεί η τιμή της στο τοπικό ακρότατο του πρώτου ερωτήματος.

$$MR(Q) = TR'(Q) = -3Q^2 + 36Q - 60$$

$$\text{Για } Q = 9, \quad MR(9) = -3 \cdot 9^2 + 36 \cdot 9 - 60 = 21.$$

Ερμηνεία: Το $MR(9) = 21$ ν.μ. προβλέπει τα έσοδα που θα έχουμε από την πώληση μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος (875 ως 10th μονάδας προϊόντος).

iii. Να προσδιορισθεί η ποσότητα q για την οποία ισχύει $MR = AR$. Συγκρίνετε αυτή την ποσότητα με την ποσότητα προϊόντος για την οποία υπάρχει ακρότατο στο AR .

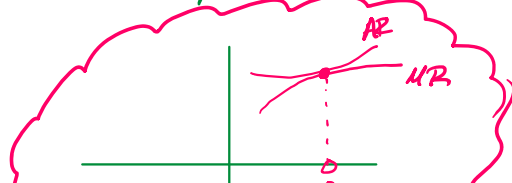
$$MR(Q) = AR(Q) \Rightarrow$$

$$-3Q^2 + 36Q - 60 = -Q^2 + 18Q - 60 \Rightarrow$$

$$-2Q^2 + 18Q = 0 \Rightarrow -2Q(Q - 9) = 0 \Rightarrow$$

$$Q = 0 \text{ ή } Q = 9 \rightarrow \text{Έχουμε μέγιστα μέσα έσοδα (εφ. i)}$$

Θεωρούμε ότι για να ωδητάμε για έσοδα θα πρέπει $Q > 0$.



Γενικά ισχύει ότι:

Τα μέσα έσοδα μεγιστοποιούνται για ποσότητα Q_0 για την οποία ισχύει $MR(Q_0) = AR(Q_0)$

$$(MR(9) = AR(9)) \quad Q = 9$$

iv. Να επιβεβαιωθεί ότι στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα μέσα έσοδα η ελαστικότητα των ολικών εσόδων ισούται με την μονάδα. Να δοθεί η ερμηνεία της τιμής της ελαστικότητας.

$$\epsilon_{f(x)} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$f(x) \rightarrow TR(Q) \quad \epsilon_{TR(Q)} = \frac{Q}{TR(Q)} \cdot TR'(Q)$$

$$\Rightarrow \epsilon_{TR(Q)} = \frac{Q}{-Q^3 + 18Q^2 - 60Q} \cdot (-3Q^2 + 36Q - 60) =$$

$$= \frac{-3Q^3 + 36Q^2 - 60Q}{-Q^3 + 18Q^2 - 60Q}$$

$$\epsilon_{TR(9)} = \frac{-3 \cdot 9^3 + 36 \cdot 9^2 - 60 \cdot 9}{-9^3 + 18 \cdot 9^2 - 60 \cdot 9} = \frac{81}{81} = 1$$

Πρακτική ελαστικότητας: μοναδιαία ελαστική

Ερμηνεία: Αν αυξήσουμε την ποσότητα Q κατά 1% τότε θα αυξηθεί το συνολικό έσοδο κατά 1%.

v. Να επιβεβαιωθεί ότι στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα ολικά έσοδα η ελαστικότητα των μέσων εσόδων ισούται με μείον ένα. Να δοθεί η ερμηνεία της τιμής της ελαστικότητας.

$$TR(Q) = -Q^3 + 18Q^2 - 60Q$$

$$TR'(Q) = -3Q^2 + 36Q - 60 = -3(Q^2 - 12Q + 20)$$

$$TR'(Q) = 0 \Rightarrow Q^2 - 12Q + 20 = 0$$

$$Q = 2 \quad \text{ή} \quad Q = 10$$

Δεκτή Δεκτή

$$TR''(Q) = -6Q + 36$$

$$TR''(2) = -6 \cdot 2 + 36 > 0 \rightarrow Q = 2 \quad \text{T.E.}$$

$$TR''(10) = -6 \cdot 10 + 36 < 0 \rightarrow Q = 10 \quad \text{T.Μ.}$$

Ελαστικότητα του $AR(Q)$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{AR(Q)} &= \frac{Q}{AR(Q)} \cdot AR'(Q) = \\ &= \frac{Q(-2Q+18)}{-Q^2+18Q-60} = \frac{-2Q^2+18Q}{-Q^2+18Q-60} \end{aligned}$$

για $Q=10$: $\epsilon_{AR(10)} = \frac{-2 \cdot 10^2 + 18 \cdot 10}{-10^2 + 18 \cdot 10 - 60} = \frac{-20}{20} = -1$

Χαρακτηρισμός ελαστ.: $|\epsilon_{AR(Q)}| = |-1| = 1$
μοναδιαία ελαστική

Ερμηνεία: Αν αυξήσουμε την ποσότητα Q κατά 1% τότε τα μέσα έσοδα θα μειωθούν κατά 1%.

S.O.S.

► Άσκηση 4: Η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι $q + 2p = 40$, όπου q η ζητούμενη ποσότητα και p η τιμή του προϊόντος, ενώ η συνάρτηση του μέσου κόστους του, είναι $AC = 20q^{-1} + 4$. $= \frac{20}{Q} + 4$

$$Q(P) = 40 - 2P$$

$$P = 20 - \frac{Q}{2}$$

- Προσδιορίστε την τιμή της q για την οποία μεγιστοποιούνται τα κέρδη.
- Υπολογίστε την ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα κέρδη.
- Υποθέστε ότι η κυβέρνηση επιβάλλει έναν εφάπαξ φόρο $t = 48$ νομισματικών μονάδων. Πώς επηρεάζεται η καμπύλη των κερδών;
- Υποθέστε ότι η κυβέρνηση επιβάλλει έναν φόρο ύψους t νομισματικών μονάδων ανά μονάδα πωλούμενης ποσότητας. Να υπολογισθεί η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη μετά την επιβολή φόρου. Επίσης να υπολογισθεί η τιμή που πρέπει να λάβει ο t ώστε η κυβέρνηση να εισπράξει τα μέγιστα φορολογικά έσοδα από τη συγκεκριμένη φορολογία. Πόσα θα είναι τα έσοδα αυτά;

$$i) TR(Q) = P \cdot Q = \left(20 - \frac{Q}{2}\right) Q \Rightarrow TR(Q) = 20Q - \frac{Q^2}{2}$$

$$AC(Q) = \frac{20}{Q} + 4$$

↓

$$TC = Q \cdot AC(Q) \Rightarrow$$

$$TC(Q) = 20 + 4Q$$

$$\begin{aligned} AC &= \frac{TC}{Q} \\ TC &= AC \cdot Q \end{aligned}$$

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) \Rightarrow \pi(Q) = 20Q - \frac{Q^2}{2} - 20 - 4Q$$

$$\pi(Q) = -\frac{Q^2}{2} + 16Q - 20$$

$$\pi'(Q) = -Q + 16 = 0 \Rightarrow Q = 16$$

$$\pi'(Q) = -Q + 16 = 0 \Rightarrow \boxed{Q = 16}$$

$$\pi''(Q) = -1, \quad \pi''(16) = -1 < 0 \rightarrow Q = 16$$

μέγιστα κέρδη.

ii. Υπολογίστε την ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

$$\epsilon_{f(x)} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow Q_D(P) \\ Q_D(P) = 40 - 2P \\ \text{(and επώνυμο)} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{Q_D(P)} &= \frac{P}{Q_D(P)} \cdot Q'_D(P) = \\ &= \frac{P \cdot (-2)}{40 - 2P} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\epsilon_{Q_D(P)} = \frac{-2P}{40 - 2P}}$$

Για $Q = 16$ μεγιστοποιούνται τα κέρδη άρα

$$\text{αφού } Q = 40 - 2P \Rightarrow 16 = 40 - 2P \Rightarrow$$

$$2P = 40 - 16 \Rightarrow \boxed{P = 12}$$

$$\begin{aligned} \text{Για } \boxed{P = 12}, \quad \epsilon_{Q_D(12)} &= \frac{-2 \cdot 12}{40 - 2 \cdot 12} = \frac{-24}{40 - 24} = \frac{-24}{16} = \\ &= -\frac{3}{2} = -1.5. \end{aligned}$$

Χαρακτηρισμός ελαστ.: $|\epsilon_{Q_D}| = |-1.5| = 1.5 > 1$
ελαστική.

Ερμηνεία: Αν αυξηθούμε την τιμή κατά 1%

τότε η ζητούμενη ποσότητα θα μειωθεί κατά 1.5%.

Επιπρόσθετο ερώτημα: Να εξεταστεί ποσοστό μεταβολής

Επιπρόσθετο ερώτημα: Να εξετάσετε πόσο θα μειωθεί η Σήτηση (ελαστικότητα) αν αυξήσουμε την τιμή κατά 3%.

Αφού 1% αύξηση στην τιμή οδηγεί σε μείωση της Σήτησης κατά 1.5%, αναλογικά θα έχουμε ότι:
αύξηση στην τιμή κατά 3% οδηγεί σε μείωση της Σήτησης κατά $3 \cdot 1.5\% = 4.5\%$.

iii. Υποθέστε ότι η κυβέρνηση επιβάλει έναν εφάπαξ φόρο $t = 48$ νομισματικών μονάδων. Πώς επηρεάζεται η καμπύλη των κερδών;

$$TC = 20 + 4Q$$

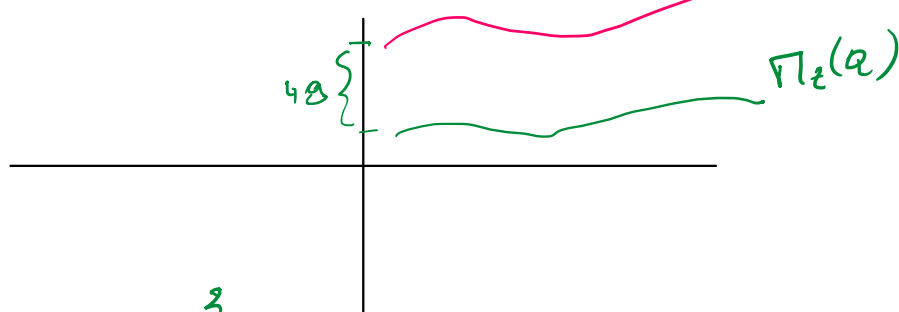
→ κέρδη προ φόρου:

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) \Rightarrow \pi(Q) = 20Q - \frac{Q^2}{2} - 20 - 4Q$$

$$\pi(Q) = -\frac{Q^2}{2} + 16Q - 20$$

$$\pi_t(Q) = TR(Q) - TC(Q) - 48 = \pi(Q) - 48$$

$$\pi_t(Q) = \pi(Q) - 48$$



$$\pi_t(Q) = -\frac{Q^2}{2} + 16Q - 20 - 48$$

$\underbrace{-\frac{Q^2}{2} + 16Q - 20}_{\pi(Q)} \quad \downarrow \quad t$

$$\pi_t(Q) = -\frac{Q^2}{2} + 16Q - 68$$

$$\pi_t'(Q) = -Q + 16 = 0 \Rightarrow Q = 16$$

$$\pi_t''(Q) = -1 < 0 \quad \delta p \rightarrow Q=16 \rightarrow \psi \in \mathbb{R}.$$

κερδών.

iv. Υποθέστε ότι η κυβέρνηση επιβάλλει έναν φόρο ύψους t νομισματικών μονάδων ανά μονάδα πωλούμενης ποσότητας. Να υπολογισθεί η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη μετά την επιβολή φόρου. Επίσης να υπολογισθεί η τιμή που πρέπει να λάβει ο t ώστε η κυβέρνηση να εισπράξει τα μέγιστα φορολογικά έσοδα από τη συγκεκριμένη φορολογία. Πόσα θα είναι τα έσοδα αυτά;

Αφού επιβάλλεται φόρος t ν.μ. ανά μονάδα προϊόντος
τότε ο συνολικός φόρος θα είναι

$$\text{Φόρος} = Q \cdot t$$

Άρα $TC(Q) = 20 + 4Q$
(προ φόρου) FC ↓ TVC ↓ Taxes

$$TC_t(Q) = 20 + 4Q + Qt$$

(μετά φόρου)

κερδών: $\pi_t(Q) = TR(Q) - TC_t(Q)$

$$= 20Q - \frac{Q^2}{2} - 20 - 4Q - Qt$$

↓ TR

$$\pi_t(Q) = -\frac{Q}{2} + (16-t)Q - 20$$

$16Q - Qt$
 $(16-t)Q$

$$\pi_t'(Q) = -\frac{Q}{2} + 16 - t = 0 \Rightarrow Q = 16 - t$$

$$\pi_t''(Q) = -1, \quad \pi_t''(16-t) = -1 < 0$$

Επομένως, για $Q = 16 - t$ έχουμε μεγιστοποίηση των κερδών.

Συνάρτηση των φορολογικών εσόδων:

Ζυνάρτυα τω φορολογικῶν ἐσόδων:

$$GR(t) = Q \cdot t$$

(Government revenue)

για $Q = 16 - t$ $GR(t) = (16 - t)t$
 $GR(t) = 16t - t^2$

$$GR'(t) = 16 - 2t = 0 \Rightarrow t = 8 \text{ v.f.}$$

$$GR''(t) = -2, \quad GR''(8) = -2 < 0$$

Για $t = 8$ μεγιστοποιούνται τα φορολ. έσοδα.

Μέγιστα φορολ. έσοδα $GR(8) = 16 \cdot 8 - 8^2 = 64 \text{ v.f.}$

Σ.Ο.Σ.

► Άσκηση 5. Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για ένα αγαθό εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$q = (10 + p)(3 + 0,3p) \text{ και } q = 2(10 - p)(3,5 + 0,35p)$$

- Να βρείτε ποια από τις δύο συναρτήσεις είναι η συνάρτηση ζήτησης του αγαθού και ποια η συνάρτηση προσφοράς του.
- Να υπολογίσετε την τιμή και την ποσότητα ισορροπίας.
- Να υπολογίσετε την ελαστικότητα ζήτησης και προσφοράς στο σημείο ισορροπίας.

$$Q = 30 + 3P + 3P + 0,3P^2 = 0,3P^2 + 6P + 30$$

$$Q'(P) = 0,6P + 6 > 0 \text{ διότι } P \geq 0$$

αρχά $Q(P) \uparrow$ οπότε

$$Q(P) = 0,3P^2 + 6P + 30$$

συνάρτηση προσφοράς

$$Q(P) \uparrow \rightarrow \text{συνάρτηση προσφοράς} \quad (Q'(P) > 0)$$

$$Q(P) \downarrow \rightarrow \text{συνάρτηση ζήτησης} \quad (Q'(P) \leq 0)$$

$$q = 2(10 - p)(3,5 + 0,35p) \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$Q = -0,7P^2 + 70$$

$$Q'(P) = -1,4P \leq 0, \quad P \geq 0$$

$$Q(P) \downarrow \text{ οπότε}$$

$$Q = -0,7P^2 + 70$$

συνάρτηση ζήτησης

$$\text{ii) } Q_D = Q_S \Rightarrow -0.7P^2 + 70 = 0.3P^2 + 6P + 30 \Rightarrow \\ P^2 + 6P - 40 = 0$$

$$\text{Απορ. } \boxed{P = -10} \quad \text{ή} \quad \boxed{P = 4} \text{ Δεκτή}$$

$P > 0$

$$\text{Για } P = 4, \quad Q = 70 - 0.7P^2 \stackrel{P=4}{=} 58.8$$

$$\text{Σημείο Ισορ. } (P^*, Q^*) = (4, 58.8)$$

$$\text{iii) } \varepsilon_{Q_D} = \frac{P}{Q_D(P)} \cdot Q'_D(P) = \frac{P(-1.4P)}{-0.7P^2 + 70} = \\ \stackrel{P=4}{=} \dots = -0.381.$$

$$\text{Χαρακτηρισμός ελασ.: } |\varepsilon_{Q_D}| = |-0.381| = 0.381 < 1 \\ \text{άρα ανελαστική.}$$

Ερμηνεία: Αν αυξησω τον τιμή κατά 1% η Σύνολο θα μειωθεί κατά 0.381%.

$$\varepsilon_{Q_S} = \frac{P}{Q_S(P)} \cdot Q'_S(P) = \frac{P(0.6P+6)}{0.3P^2+6P+30} \stackrel{P=4}{=} \\ = +0.571$$

$$\text{Χαρακτηρισμός ελασ.: } |\varepsilon_{Q_S(P)}| = 0.571 < 1 \\ \text{άρα ανελαστική}$$

Ερμηνεία: Αν αυξησω τον τιμή κατά 1% ο συνολικός

Ερμηνεία: Αύξηση της τιμής κατά 1% οδηγεί σε
αύξηση της προσφοράς κατά $0.5 \pm 1\%$.