

Ερμηνεία: Αν αυξηθεί η τιμή ενός προϊόντος κατά 1% τότε η τιμή E_Q εκφράζει το ποσοστό μείωσης της ζητούμενης ποσότητας.
π.χ. Αν $E_{Q_D} = -0.7$ τότε αύξηση της τιμής κατά 1% θα οδηγήσει σε μείωση της ζητούμενης ποσότητας κατά 0.7%.

Ελαστικότητα ως προσφορά:

$$E_{Q_S} = \frac{P}{Q_S(P)} \cdot Q'_S(P)$$

Ερμηνεία: Αν αυξηθούν οι τιμές κατά 1% τότε η τιμή " E_Q " εκφράζει το ποσοστό αύξησης της προσφερόμενης ποσότητας.

Χαρακτηρισμός Ελαστικότητας.

$|E| = 1$ μοναδιαία ελαστική

$|E| > 1$ ελαστική

$|E| < 1$ ανελαστική

Ιδιότητες:

Πρόταση 6.2. (Την αντιμετωπίζουμε σαν απλή άσκηση) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε για τις ελαστικότητες ισχύουν οι ιδιότητες:

i. $E(f(x) \cdot g(x)) = Ef(x) + Eg(x)$

ii. $E\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = Ef(x) - Eg(x)$

iii. $E(f(x) + g(x)) = \frac{f(x) \cdot Ef(x) + g(x) \cdot Eg(x)}{f(x) + g(x)}$

iv. $E(f(x) - g(x)) = \frac{f(x) \cdot Ef(x) - g(x) \cdot Eg(x)}{f(x) - g(x)}$

v. $E[f(g(x))] = Ef(x) \cdot Eg(x)$

H/V

i) $E(f(x) \cdot g(x)) = E(f(x)) + E(g(x))$

$$E(f(x) \cdot g(x)) = \frac{x}{f(x) \cdot g(x)} \cdot [f(x) \cdot g(x)]' \quad E(f(x)) = \epsilon_f = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$= \frac{x}{f(x) \cdot g(x)} \cdot (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) = \frac{x \cdot f'(x) \cdot g(x)}{f(x) \cdot g(x)} + \frac{x \cdot f(x) \cdot g'(x)}{f(x) \cdot g(x)}$$

$$= \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} + \frac{x \cdot g'(x)}{g(x)} = E[f(x)] + E[g(x)]$$

ii) $E\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = E(f(x)) - E(g(x))$

$$E\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{x}{\frac{f(x)}{g(x)}} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$$

$$\frac{x \cdot g(x)}{f(x)} \cdot \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} =$$

$$\frac{x \cdot g(x)}{f(x)} \cdot \frac{f'(x) \cdot g(x)}{g^2(x)} - \frac{x \cdot g(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} =$$

$$\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} - \frac{x \cdot g'(x)}{g(x)} = E(f(x)) - E(g(x))$$

$$\text{iii. } E(f(x) + g(x)) = \frac{f(x) \cdot Ef(x) + g(x) \cdot Eg(x)}{f(x) + g(x)}$$

$$\begin{aligned} E(f(x) + g(x)) &= \frac{\pi}{f(x) + g(x)} (f(x) + g(x))' \\ &= \frac{\pi}{f(x) + g(x)} \cdot (f'(x) + g'(x)) = \frac{\pi \cdot f'(x)}{f(x) + g(x)} + \frac{\pi \cdot g'(x)}{f(x) + g(x)} \\ &= \frac{E(f(x)) \cdot f(x)}{f(x) + g(x)} + \frac{E(g(x)) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)} = \frac{E(f(x)) \cdot f(x) + E(g(x)) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_f &= \frac{\pi}{f(x)} \cdot f'(x) \\ \epsilon_f \cdot f(x) &= \pi \cdot f'(x) \end{aligned}$$

► Παράδειγμα 6.2. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα της συνάρτησης

$$h(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2} \cdot e^{x^2 + 5}$$

$f(x) = g(x)$

εφαρμόζοντας την
ιδιότητα $E(f(x) \cdot g(x)) =$
(I) $E(f(x)) + E(g(x))$

$$E(h(x)) = E(\sqrt[3]{x^3 + 2} \cdot e^{x^2 + 5}) =$$

$$\stackrel{\text{(I)}}{=} E(\sqrt[3]{x^3 + 2}) + E(e^{x^2 + 5}) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{\sqrt[3]{x^3 + 2}} \cdot (\sqrt[3]{x^3 + 2})' + \frac{\pi}{e^{x^2 + 5}} \cdot (e^{x^2 + 5})' \\ &= \frac{\pi}{\sqrt[3]{x^3 + 2}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 2)^2}} + \frac{\pi}{e^{x^2 + 5}} \cdot 2x \cdot e^{x^2 + 5} \\ &= \frac{\pi x^3}{x^3 + 2} + 2\pi x^2 \end{aligned}$$

$$\epsilon_f = \frac{\pi}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{x^3 + 2})' &= [(x^3 + 2)^{1/3}]' \\ &= \frac{1}{3} (x^3 + 2)^{-2/3} \cdot 3x^2 \\ &= \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 2)^2}} \end{aligned}$$

Ασκήσεις:

5. Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι

$Q(P)$

Ασκήσεις:

5. Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι

$$q_d(p) = 25 + 0,3p - 0,2p^2 \rightarrow Q_D(P)$$

και η συνάρτηση προσφοράς

$$q_s(p) = -5 + 2p - 0,01p^2$$

Να βρεθούν:

i. η ελαστικότητα ζήτησης και η ελαστικότητα προσφοράς.

ii. η τιμή της ελαστικότητας ζήτησης και της ελαστικότητας προσφοράς στο σημείο ισορροπίας.

$$i) \quad \epsilon_{Q_D} = \frac{P}{Q_D(P)} \cdot Q'_D(P) = \frac{P}{25 + 0,3P - 0,2P^2} \cdot (0,3 - 0,4P)$$

$$\epsilon_{Q_D} = \frac{0,3P - 0,4P^2}{25 + 0,3P - 0,2P^2}$$

$$\epsilon_{Q_S} = \frac{P}{Q_S(P)} \cdot Q'_S(P) = \frac{P(2 - 0,02P)}{-5 + 2P - 0,01P^2} =$$

$$\Rightarrow \epsilon_{Q_S} = \frac{2P - 0,02P^2}{-5 + 2P - 0,01P^2}$$

Σημείο Ισορροπίας: $Q_S = Q_D \Rightarrow$

$$-5 + 2P - 0,01P^2 = 25 + 0,3P - 0,2P^2 \Rightarrow$$

$$-0,19P^2 - 1,7P + 30 = 0$$

$\Delta = \dots$

$$p = \frac{5\sqrt{2569} - 85}{19} \approx 8.86455$$

Δεχτή

$$p = \frac{-5\sqrt{2569} - 85}{19} \approx -17.81192$$

Απορ.

Στο σημείο ισορ. έχουμε $P = 8.86..$

$$\epsilon_{Q_D}(8.86) = ?$$

$$\epsilon_{Q_S}(8.86)$$

$$\epsilon_n = \frac{0,3P - 0,4P^2}{\dots} \xrightarrow{P=8.86} \dots = -2.4062$$

$$E_{Q_D} = \frac{0.3P - 0.4P^2}{25 + 0.3P - 0.2P^2} \stackrel{P=8.86}{=} \dots = -2.4062$$

Χαρακτηρισμός ελαστικότητας: $|E_{Q_D}| = |-2.4062|$

$$= 2.4062 > 1$$

άρα ελαστική!

Ερμηνεία: Αν αυξηθεί η τιμή κατά 1% τότε η ζητούμενη ποσότητα θα μειωθεί κατά 2.4062%.

Ελαστικότητα ως προσφορά:

$$E_{Q_S} = \frac{2P - 0.02P^2}{-5 + 2P - 0.01P^2} \stackrel{P=8.86}{=} \dots = +1.3532$$

Χαρακτηρισμός ελαστ.: $|E_{Q_S}| = 1.3532 > 1$

άρα είναι ελαστική.

Ερμηνεία: Αν αυξηθεί η τιμή κατά 1% τότε η προσφερόμενη ποσότητα θα αυξηθεί κατά 1.3532%.

(Ερώτηση: Αν η τιμή αυξηθεί κατά 3% να βρείτε την ποσοστιαία μεταβολή της ζήτησης. Η ζήτηση θα μειωθεί κατά $3 \cdot (2.4062\%) = \dots$)

$$3 \cdot (2.4062\%) = \dots$$

$$P \uparrow \rightarrow 1\%$$

$$= TC'(Q)$$

► **Άσκηση 2.** Η συνάρτηση οριακού κόστους $MC(q)$ για κάποιο προϊόν είναι της μορφής $MC(q) = a_2 q^2 + a_1 q + a_0$, όπου η μεταβλητή q συμβολίζει την παραγόμενη ποσότητα. Στο ξεκίνημα της παραγωγής το οριακό κόστος είναι ίσο με 150 νομισματικές μονάδες, ενώ για επίπεδα παραγωγής 10 και 20 μονάδων είναι 80 και 610 νομισματικές μονάδες αντίστοιχα. Το σταθερό κόστος παραγωγής είναι 200 νομισματικές μονάδες και η τιμή του προϊόντος 480 = P νομισματικές μονάδες.

$$L \rightarrow FC = 200 \rightarrow TC(0) = 200$$

i. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση του οριακού κόστους $MC(q)$, και να υπολογισθούν οι συναρτήσεις: συνολικού κόστους $TC(q)$, εσόδων $TR(q)$, και κερδών $\Pi(q)$.

ii. Να υπολογισθεί το επίπεδο παραγωγής $= Q$ το οποίο μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος της επιχείρησης.

$$1) \textcircled{1} \Rightarrow Q = 0 \rightarrow MC(0) = 150$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow Q = 10 \rightarrow MC(10) = 80$$

$$Q = 20 \rightarrow MC(20) = 610$$

$$MC(Q) = a_2 Q^2 + a_1 Q + a_0$$

$$MC(0) = 150 \Rightarrow 150 = a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 \Rightarrow a_0 = 150$$

$$MC(10) = 80 \Rightarrow 80 = 100 a_2 + 10 a_1 + 150 \Rightarrow 10 a_2 + a_1 = -7 \quad (I)$$

$$MC(20) = 610 \Rightarrow 610 = 400 a_2 + 20 a_1 + 150 \Rightarrow 40 a_2 + 2 a_1 = 46 \quad (II)$$

$$10 a_2 + a_1 = -7 \quad ? \Rightarrow \dots \quad a_1 = -37$$

$$\left. \begin{aligned} 10\alpha_2 + \alpha_1 &= -7 \\ 40\alpha_2 + 2\alpha_1 &= 46 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dots \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

Άρα, $MC(Q) = 3Q^2 - 37Q + 150$

$$TC(Q) = \int MC(Q) dQ$$

ΓΤΜΘ. Κόστος = 200

FC=200 ή

$$TC(0) = 200$$

$$TC(Q) = \int 3Q^2 - 37Q + 150 dQ$$

$$= Q^3 - \frac{37Q^2}{2} + 150Q + C = P$$

$$TC(Q) = Q^3 - \frac{37Q^2}{2} + 150Q + C$$

$$TC(0) = 0^3 - \frac{37 \cdot 0^2}{2} + 150 \cdot 0 + C \Rightarrow$$

$$200 = C$$

Συνολικό κόστος:

$$TC(Q) = Q^3 - \frac{37Q^2}{2} + 150Q + 200$$

Συνολικά έσοδα: $TR(Q) = P \cdot Q$

$$TR(Q) = 480 \cdot Q$$

Συνολικά κέρδη: $\pi(Q) = 480Q - Q^3 + \frac{37Q^2}{2} - 150Q - 200$

$$\pi(Q) = -Q^3 + \frac{37Q^2}{2} + 330Q - 200$$

ii) $\pi'(Q) = -3Q^2 + 37Q + 330$

$$ii) \boxed{\pi'(Q) = -3Q^2 + 37Q + 330}$$

$$\pi'(Q) = 0 \Rightarrow \dots \quad \boxed{Q = -6} \rightarrow \text{Απορ.} \quad (Q \geq 0)$$

$$\text{ή} \quad \boxed{Q = \frac{55}{3}} \rightarrow \text{Δεκτή}$$

κριτήριο ως 2^{ος} παραγώγου: $\pi''(Q) = -6Q + 37$

κριτήριο συνήτιο $Q = \frac{55}{3}$

$$\pi''\left(\frac{55}{3}\right) = -6 \cdot \frac{55}{3} + 37 = -110 + 37 < 0$$

$$\pi''\left(\frac{55}{3}\right) < 0 \rightarrow \text{μείνεται κέρδη}$$

$$Q = \frac{55}{3}$$

► Άσκηση 3. Δίνεται η συνάρτηση των ολικών εσόδων μιας επιχείρησης:

$$TR(q) = -q^3 + 18q^2 - 60q,$$

όπου q είναι η ποσότητα προϊόντος που διατίθεται στην αγορά.

i. Να προσδιορισθεί η ποσότητα q στην οποία η συνάρτηση των μέσων εσόδων έχει τοπικό ακρότατο. Στη συνέχεια να χαρακτηριστεί το σημείο αυτό ως τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο και να βρεθεί η τιμή των ολικών (TR) και των μέσων εσόδων (AR) στο ακρότατο.

ii. Να υπολογιστεί η συνάρτηση οριακών εσόδων (MR) και να βρεθεί η τιμή της στο τοπικό ακρότατο του πρώτου ερωτήματος.

iii. Να προσδιορισθεί η ποσότητα q για την οποία ισχύει $MR = AR$. Συγκρίνετε αυτή την ποσότητα με την ποσότητα προϊόντος για την οποία υπάρχει ακρότατο στο AR .

iv. Να επιβεβαιωθεί ότι στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα μέσα έσοδα η ελαστικότητα των ολικών εσόδων ισούται με την μονάδα. Να δοθεί η ερμηνεία της τιμής της ελαστικότητας.

v. Να επιβεβαιωθεί ότι στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα ολικά έσοδα η ελαστικότητα των μέσων εσόδων ισούται με μείον ένα. Να δοθεί η ερμηνεία της τιμής της ελαστικότητας.

i) $\overset{\text{μέσα έσοδα}}{AR} = \frac{TR}{Q} \Rightarrow \frac{-Q^3 + 18Q^2 - 60Q}{Q}$

$\downarrow$
average

$$AR(Q) = \frac{-Q^3 + 18Q^2 - 60Q}{Q}$$

$$\boxed{AR(Q) = -Q^2 + 18Q - 60}$$

$$ATR'(Q) = -2Q + 18 = 0 \Rightarrow \boxed{Q=9}$$

$$ATR''(Q) = -2$$



$$ATR'(9) = -2 < 0 \text{ and } \underline{\underline{T.M.}}$$

$$TR(9) = \dots = 189$$

$$\underline{ATR(9) = \dots = 21.}$$

