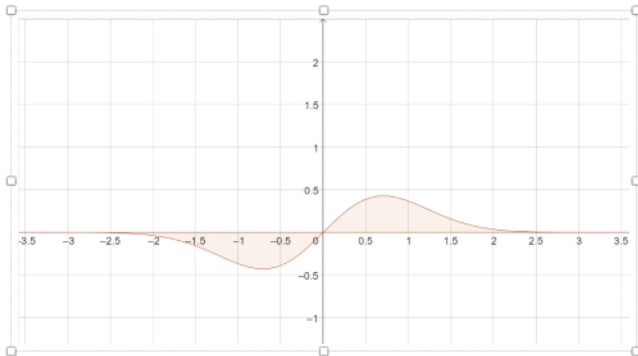


5.0.5.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$$



$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad ; \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_a^k f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_k^a f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

I

I_1

I_2

Για να συγκλίνει το I (σε πραγματικό αριθμό) θα πρέπει να συγκλίνουν και το I_1 και το I_2 .

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$$

I_1 I_2

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 x \cdot e^{-x^2} dx = \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_k^0 x \cdot e^{-x^2} dx = (*)$$

Θέτω $u = -x^2$, $\frac{du}{dx} = (-x^2)' \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow$

$$\frac{du}{-2} = x \cdot dx$$

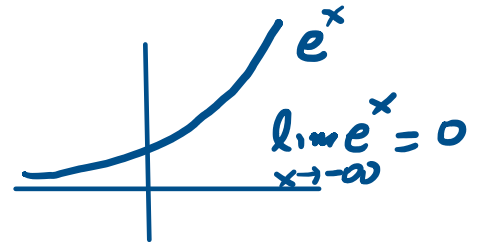
... $\int_{x=0}^{x=-\infty} \dots$ $\int_{x=0}^{x=-\infty} \dots$

$\Gamma_1, \alpha > 1, u = -k^2, \Gamma_1, \alpha = 0, u = 0$

$$(*) = \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_{-k^2}^0 e^u \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_{-k^2}^0 e^u du =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow -\infty} [e^u]_{-k^2}^0 = -\frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow -\infty} (e^0 - e^{-k^2})$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$



$$I_2 = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k x \cdot e^{-x^2} dx = (*)$$

ΘΕΤΩ $u = -x^2, \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow \boxed{\frac{du}{-2} = x \cdot dx}$

$\Gamma_1, \alpha = 0, u = 0, \alpha = k, u = -k^2$

$$(*) = -\frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{-k^2} e^u du = -\frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow +\infty} [e^u]_0^{-k^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow +\infty} (e^{-k^2} - e^0) = -\frac{1}{2} (-1) = \frac{1}{2}$$

Συνολικά, $I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

ΕΠΙΣ. το γενικ. ολοκλήρωμα
συγκλίνει στο μηδέν.

Οικονομικές Συναρτήσεις

Συναρτησών Ζήτησής (Demand) (κατά τη λωή)

Q_D^{quantity} = ζητούμενη ποσότητα

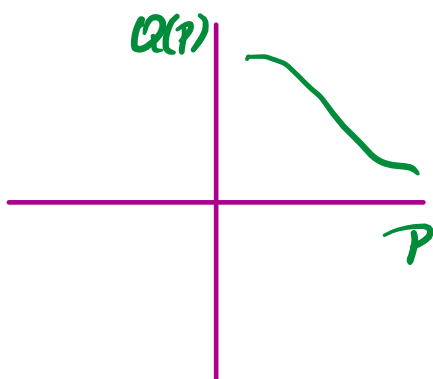
$P_D = \text{price}$ = τιμή προϊόντος

Συναρτησών Ζήτησής

$$Q_D(P) = f(x)$$

Πεδίο ορισμού:

$$P_D \geq 0, \quad Q_D(P) \geq 0$$



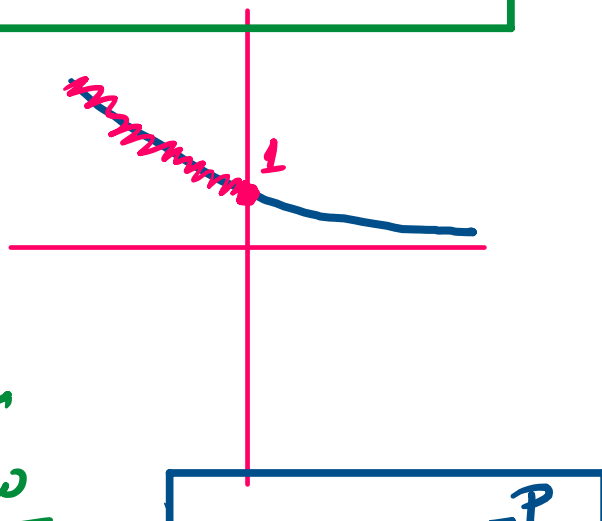
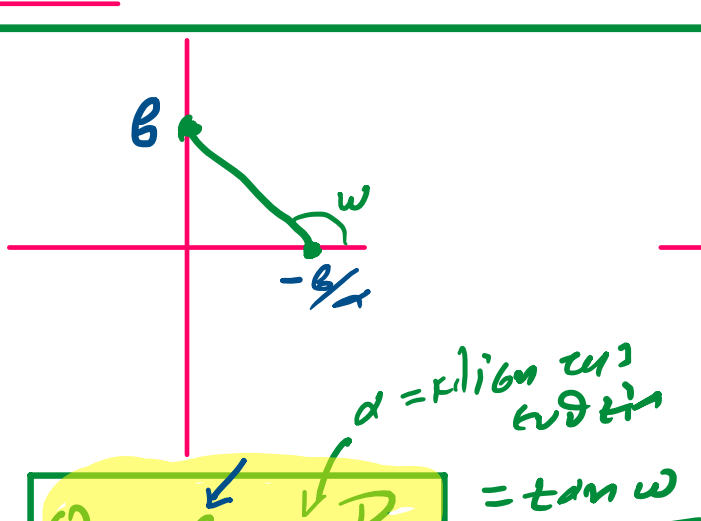
Νόμος της Ζήτησής

Αν αυξήσω το P τότε
μειώνεται το Q

$$Q_D(P) \downarrow \leadsto$$

$$Q'_D(P) \leq 0$$

Συνοψικά: $Q \geq 0, P \geq 0, Q'_D(P) \leq 0$



$$Q = \theta + \alpha P = \tan \omega$$

$$\alpha < 0$$

$$Q(P) = e^{-P} = \left(\frac{1}{e}\right)^P$$

Συνάρτηση προσφοράς (προβερρόμενης ποσότητας) (παραγωγή)

$$Q_s \xrightarrow{(\text{supply})} Q_s(P) = f(x)$$

Q_s

Νόμος ως προσφοράς:

Αν αυξήσουμε την τιμή λαμβάνουμε ο παραγωγός να αυξήσει την παραγωγή.

$$Q_s(P) \uparrow \leadsto Q'_s(P) \geq 0$$

Συνοδικά:

$$P_s \geq 0, Q_s \geq 0, Q'_s(P) \geq 0$$

(γραμμικά)

► **Παράδειγμα 3.2.** Ένας παραγωγός διαθέτει το προϊόν του, όταν η τιμή ανά μονάδα υπερβεί τις 5 νομισματικές μονάδες. Για κάθε επιπλέον νομισματική μονάδα ο παραγωγός αυξάνει την προσφορά του κατά δύο μονάδες προϊόντος. Να βρεθεί και να σχεδιασθεί η συνάρτηση προσφοράς $S(p)$.

$$Q(5) = 0$$

$$Q(5+1) = Q(6) = 2$$

$$Q_s(P) = \beta + \alpha P \Rightarrow$$

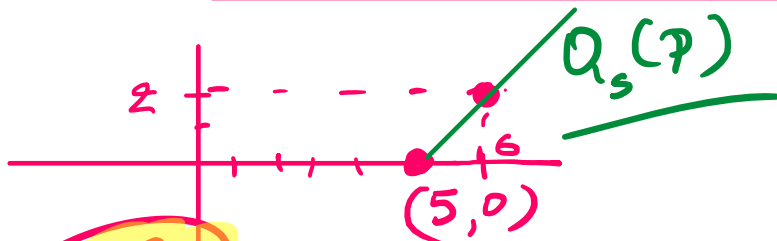
$$Q_s(5) = \beta + \alpha \cdot 5 \Rightarrow \boxed{0 = \beta + \alpha \cdot 5}$$

$$Q_s(6) = 2 \Rightarrow \boxed{6\alpha + \beta = 2}$$

$$\boxed{\alpha = 2}$$

$$\boxed{\beta = -10}$$

$$\boxed{Q_s(P) = -10 + 2P}$$

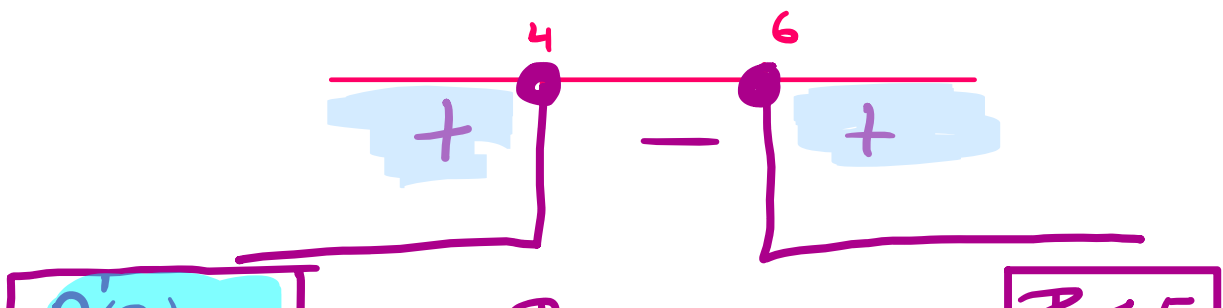


Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $Q(P) = P^2 - 10P + 24$
 Να εξετασθεί για ποιές τιμές του P είναι
 συνάρτηση ζήτησης.

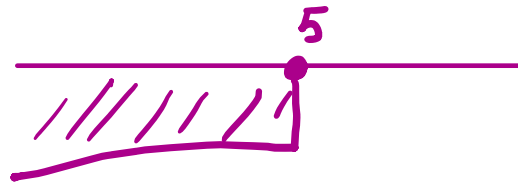
Νόμος Ζήτησης: $\boxed{P > 0}$, $\boxed{Q > 0}$, $\boxed{Q'(P) \leq 0}$

$$\boxed{Q > 0} \Rightarrow \boxed{P^2 - 10P + 24 > 0}$$

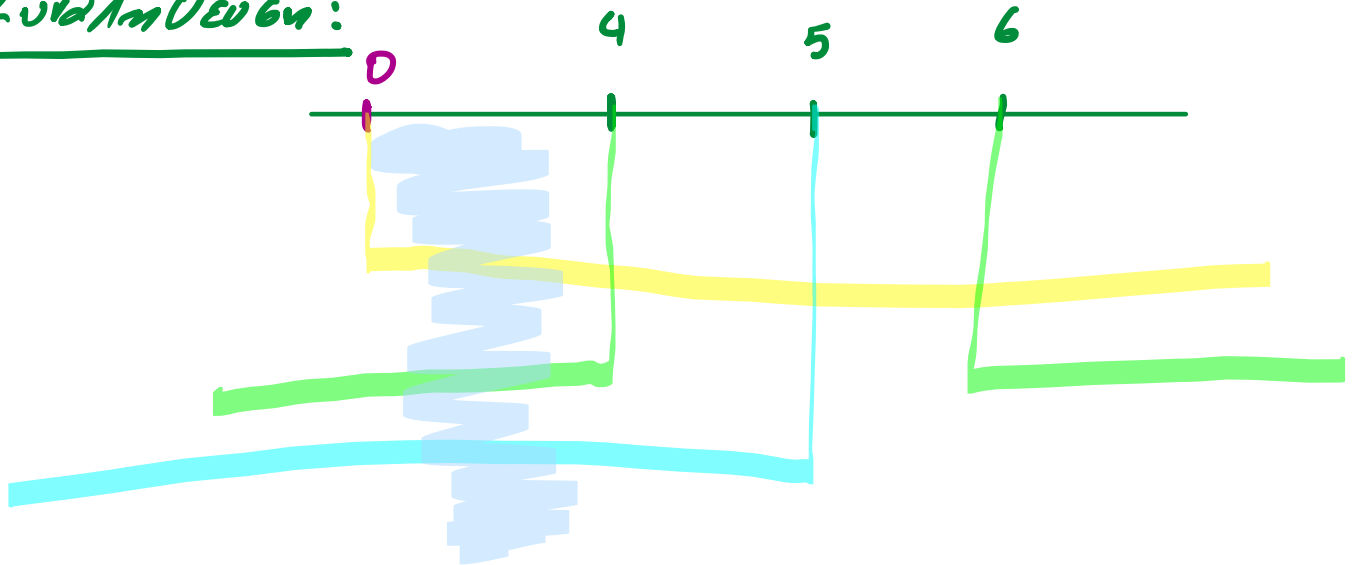
$$\boxed{P = 6} \quad \text{ή} \quad \boxed{P = 4}$$



$$\boxed{Q(P) \leq 0} \Rightarrow 2P - 10 \leq 0 \Rightarrow \boxed{P \leq 5}$$



Συναρτήσεις:



Αρα, $P \in [0, 4]$.

ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΠΡΟΠΙΑΣ

$$\boxed{Q_s = Q_D}$$

και

$$\boxed{P_s = P_D}$$

$$\begin{pmatrix} P^*, Q^* \\ \downarrow \\ x, f(x) \end{pmatrix}$$

Συναρτήσεις κέρδους, εσόδων, κόστους

$$α) \quad TC = TVC + FC$$

total Cost
(συνολικό κόστος)

total variable cost
(συνολικό μεταβλητό κόστος)

fixed cost
σταθερό ή παρόν κόστος

π.κ. $TC(P) = P^2 - 3P + 72$

↓ TVC

→ FC

$$TC(0) = FC$$

ή

$$TC(Q) = Q^2 - 3Q + 72$$

β) Συνολικά έσοδα:

$$TR = Q \cdot P$$

total revenue
(συνολικά έσοδα)

π.κ. Δίνεται η συνάρτηση ζήτησης

$Q = 4 - 2P$ να υπολογιστείτε τα
συνάρτημα των συνολικών εσόδων ως προς
 P και ως προς Q .

$$TR(P) = Q \cdot P = (4 - 2P)P = 4P - 2P^2$$

↙ $Q = 4 - 2P \Rightarrow 2P = 4 - Q \Rightarrow P = 2 - \frac{Q}{2}$

$$Q = 4 - 2P \Rightarrow 2P = 4 - Q \Rightarrow P = 2 - \frac{Q}{2}$$

$$TR(Q) = Q \cdot P = Q \cdot \left(2 - \frac{Q}{2}\right)$$

$$TR(Q) = 2Q - \frac{Q^2}{2}$$

Συνάρτηση κέρδους: (Profit)

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

Νεκρό σημείο: $\pi(Q) = 0 \Leftrightarrow TR(Q) = TC(Q)$

► **Παράδειγμα 3.6.** Αν η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι

$$D(p) = 120 - p$$

$$\text{ή } Q_p(P) = 120 - P \quad \text{ή} \quad Q = 120 - P$$

και η συνάρτηση του συνολικού κόστους είναι

$$TC(q) = 2q^2 + 6q + 216$$

$$P = 120 - Q$$

να βρεθεί η συνάρτηση που δίνει το συνολικό κέρδος και να προσδιορισθούν τα νεκρά σημεία αν υπάρχουν τέτοια.

$$TR(Q) = P \cdot Q = (120 - Q) \cdot Q$$

$$TR(Q) = 120Q - Q^2$$

Συνολικό κέρδος: $\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) =$

$$\pi(Q) = 120Q - Q^2 - 2Q^2 - 6Q - 216$$

$$\pi(Q) = -3Q^2 + 114Q - 216$$

Νεκρό σημείο: $\pi(Q) = 0 \Rightarrow$

$$-3Q^2 + 114Q - 216 = 0 \Rightarrow \dots$$

$$Q = 2$$

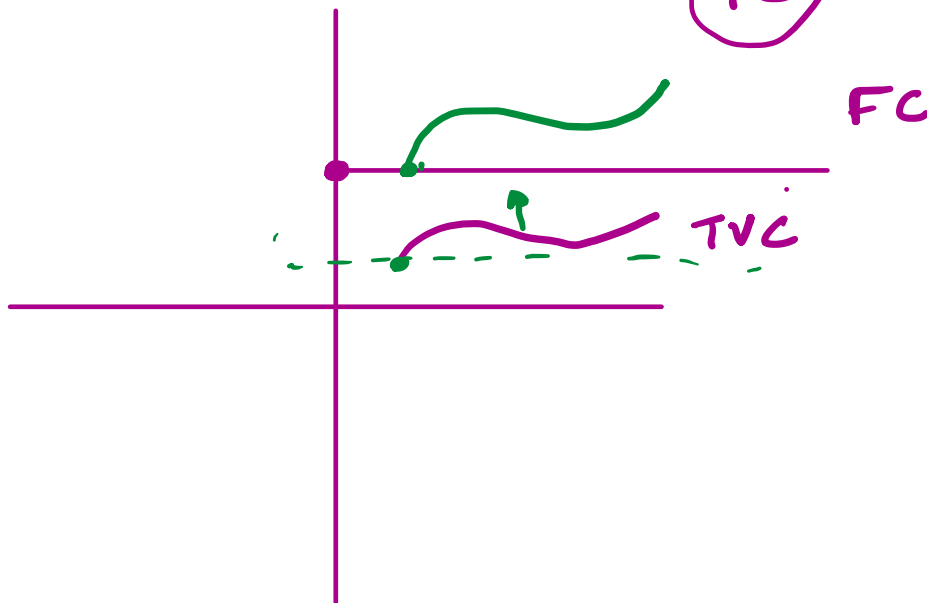
Δεκτή

ή

$$Q = 36$$

Δεκτή

$$\textcircled{TC} = TVC + FC$$



Μέσες Συναρτήσεις.

Γενικό αν $F(Q)$ είναι μια
οικονομική συνάρτηση τότε η
αντίστοιχη μέση συνάρτηση ως

δίνεται από τον τύπο:

$$AF(Q) = \frac{F(Q)}{Q}$$

average

$TC(Q)$

average
όρα Μέσο κόστος

$$ATC = \frac{TC(Q)}{Q}$$

Μέσο έσοδο

$$ATR = \frac{TR(Q)}{Q}$$

ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

① Οριακό κόστος: Αν $TC(Q) =$ συνολ. κόστος
τότε ως οριακό κόστος (marginal)
 $MC = TC'(Q)$

$TC \rightarrow MC$ (παράγωγος)
 $MC \rightarrow TC$ (ολοκλήρωση)

Ερμηνεία: Οριακό κόστος αναφέρεται κόστος
για την κατασκευή μια επιπλέον μονάδας
προϊόντος.

$MC(10)$ ↓ = δίνει το κόστος κατασκευής
της 11^{ης} μονάδας προϊόντος.

Οριακό έσοδο: Αν $TR(Q) =$ συνάρτηση εσόδων
τότε το οριακό έσοδο $MR(Q) = TR'(Q)$

$TR \longrightarrow MR$ (παραγωγή)

$MR \longrightarrow TR$ (ολοκλήρωση)

Ερμηνεία: Οριακό έσοδο ονομάζεται το έσοδο από την πώληση μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος.

$MR(Q)$ = δείχνει το έσοδο από την πώληση της Q^{th} μονάδας προϊόντος

► **Παράδειγμα 5.3.** Έστω ότι τα οριακά έσοδα MR μιας επιχείρησης εξαρτώνται από τις πωλήσεις και δίνονται από την συνάρτηση:

$$MR(q) = 60 - 2q - 2q^2$$

Αν τα σταθερά έσοδα είναι μηδενικά να βρεθεί η συνάρτηση των συνολικών εσόδων

$$TR(0) = 0$$

σταθερά έσοδα $\rightarrow TR(0)$

σταθερό κόστος $FC = TC(0)$

$$TR(Q) = \int MR(Q) dQ =$$

$$= \int 60 - 2Q - 2Q^2 dQ =$$

$$60Q - Q^2 - \frac{2Q^3}{3} + C$$

$$\text{Άρα, } TR(Q) = -\frac{2Q^3}{3} - Q^2 + 60Q + C$$

$$\text{'Όμως, } TR(0) = 0 \Rightarrow 0 = C$$

επομένως,

$$TR(Q) = -\frac{2Q^3}{3} - Q^2 + 60Q$$

► **Παράδειγμα 5.4.** Έστω ότι η συνάρτηση των εσόδων μιας επιχείρησης είναι $TR(q) = 7q$ και ότι η συνάρτηση οριακού κόστους είναι $MC(q) = 3q^2 - 18q + 22$, όπου η παραγωγή μετριέται σε χιλιάδες τεμάχια. Αν το σταθερό κόστος είναι μηδενικό, να βρεθούν

- (i) τα νεκρά σημεία της επιχείρησης
 (ii) το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιείται (α) το κέρδος και (β) η ζημία.

$$FC = 0 \Rightarrow TC(0) = 0$$

Συνολικό κόστος: $TC(Q) = \int 3Q^2 - 18Q + 22 dQ =$

$$Q^3 - 9Q^2 + 22Q + C \Rightarrow$$

$$TC(Q) = Q^3 - 9Q^2 + 22Q + C$$

$$TC(0) = 0 \Rightarrow 0 = C \Rightarrow C = 0$$

Άρα, $TC(Q) = Q^3 - 9Q^2 + 22Q$

i) Νεκρά σημεία : $TR(Q) = TC(Q)$ ή $\pi(Q) = 0$

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) \Rightarrow \pi(Q) = 7Q - Q^3 + 9Q^2 - 22Q$$

$$\Rightarrow \pi(Q) = -Q^3 + 9Q^2 - 15Q$$

$$\pi(Q) = 0 \Rightarrow -Q^3 + 9Q^2 - 15Q = 0$$

$$Q(-Q^2 + 9Q - 15) = 0 \Rightarrow$$

$$Q = 0 \quad \text{ή} \quad -Q^2 + 9Q - 15 = 0$$

$$Q = 2.203 \quad \text{ή} \quad Q = 6.791$$

ii) $\pi(Q) = -Q^3 + 9Q^2 - 15Q$

$$\pi'(Q) = -3Q^2 + 18Q - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$Q=1 \quad \text{ή} \quad Q=5$$

$$\pi''(Q) = -6Q + 18$$

$$\pi''(1) = -6 \cdot 1 + 18 = 12 > 0 \rightarrow \text{T.E.}$$

$$\pi''(5) = -6 \cdot 5 + 18 = -12 < 0 \rightarrow \text{T.Μ.}$$

Για $Q=5$ μεγιστοποιείται το κέρδος

ελάχιστο κέρδος = μέγιστη ζημία
 άρα για $Q=1$.