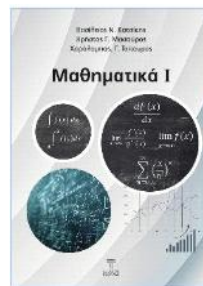


Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3

Link: <https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0>

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874



Τύποι, Ορισμοί & Θεωρήματα (Βιβλίο-Κεφάλαιο XII) :

5. Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων απλών κλασμάτων

- Αν μας δοθεί μια ρητή συνάρτηση, δηλαδή ένα κλάσμα δύο πολυωνύμων, τότε αυτή την ονομάζουμε **γνήσια ρητή συνάρτηση**, αν ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου του παρονομαστή.
- Στην αντίθετη περίπτωση την ονομάζουμε **καταχρηστική**. Αν η ρητή συνάρτηση είναι καταχρηστική, μπορούμε να κάνουμε την διαίρεση, οπότε η καταχρηστική ρητή συνάρτηση μετασχηματίζεται στο άθροισμα ενός πολυωνύμου με μια γνήσια ρητή συνάρτηση.

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

► **Παράδειγμα 5.1.** Η ρητή συνάρτηση

$$\frac{x^4 - 5x^3 + x^2 + 12x - 5}{x^2 - 5x + 3}$$

δεν είναι γνήσια. Διαιρώντας τον αριθμητή με τον παρονομαστή λαμβάνουμε:

$$\frac{x^4 - 5x^3 + x^2 + 12x - 5}{x^2 - 5x + 3} = x^2 - 2 + \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 3}$$

$$x^4 - 5x^3 + x^2 + 12x - 5 \quad | \quad x^2 - 5x + 3$$

$$x^4 - 5x^3 + x^2 + 12x - 5 \quad | \quad x^2 - 5x + 3$$

Καθώς η ολοκλήρωση των πολυωνύμων δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία, το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στην ολοκλήρωση των γνήσιων ρητών συναρτήσεων.

Όπως θα δούμε παρακάτω οι γνήσιες ρητές συναρτήσεις αναλύονται σε αθροίσματα απλών κλασμάτων. Την ολοκλήρωση αυτών των απλών κλασμάτων θα δούμε αμέσως τώρα.

$$\text{i. } \int \frac{A}{x-a} dx$$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{1}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c$$

► Παράδειγμα 5.2.

$$\alpha. \int \frac{5}{x-1} dx = 5 \ln|x-1| + c$$

$$\beta. \int \frac{2}{x+3} dx = 2 \ln|x+3| + c$$

$$\text{ii. } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx, k \neq 1$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c$$

► Παράδειγμα 5.3.

$$\alpha. \int \frac{5}{(x-1)^3} dx = \frac{5}{(1-3)(x-1)^{3-1}} + c = -\frac{5}{2(x-1)^2} + c$$

$$\beta. \int \frac{2}{(x+3)^5} dx = \frac{2}{(1-5)(x+3)^{5-1}} + c = -\frac{1}{2(x+3)^4} + c$$

Η μέθοδος του Heaviside

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές A , B και C έτσι ώστε

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

Για να βρούμε το A πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη της παραπάνω ταυτοτικής ισότητας με το $x-a$ και έχουμε:

$$\frac{P(x)}{(x-b)(x-c)} \equiv A + \frac{B(x-a)}{x-b} + \frac{C(x-a)}{x-c}$$

Θέτοντας στην ισότητα αυτή $x=a$, βρίσκουμε ότι το A είναι

$$A = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)}$$

Ομοίως εργαζόμενοι υπολογίζουμε τα B και C :

$$B = \frac{P(b)}{(b-a)(b-c)} \text{ και } C = \frac{P(c)}{(c-a)(c-b)}$$

► **Παράδειγμα 6.1.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

Λύση. Αναλύουμε το ρητό κλάσμα

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A, B, C με την μέθοδο του Heaviside:

$$A = \frac{1^2 + 1 + 1}{(1-2)(1-3)} = \frac{3}{2}$$

$$B = \frac{2^2 + 2 + 1}{(2-1)(2-3)} = -7$$

$$C = \frac{3^2 + 3 + 1}{(3-1)(3-2)} = \frac{13}{2}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x-1} - 7 \int \frac{dx}{x-2} + \frac{13}{2} \int \frac{dx}{x-3} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x-1| - 7 \ln|x-2| + \frac{13}{2} \ln|x-3| + c \end{aligned}$$

Ασκήσεις:

► **Άσκηση 6.1.** (Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου XII)

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x+1}{2x^2-10x+12} dx$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x-2)(x-3)$$

οπότε αναλύουμε το ρητό κλάσμα $\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$ σε απλά κλάσματα:

$$\frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

Με την μέθοδο Heaviside έχουμε:

$$A = \frac{2+1}{2-3} = -3, B = \frac{3+1}{3-2} = 4$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{2x^2-10x+12} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} dx = \frac{1}{2} \left(-3 \int \frac{dx}{x-2} + 4 \int \frac{dx}{x-3} \right) = \\ &= 2 \ln|x-3| - \frac{3}{2} \ln|x-2| + c \end{aligned}$$

► **Άσκηση 6.2.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$$

Λύση. Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή:

$$x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x-2)(x+3)$$

Στη συνέχεια αναλύουμε το κλάσμα σε απλά κλάσματα:

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A, B, C :

$$A = \frac{0+1}{(0-2)(0+3)} = -\frac{1}{6}, B = \frac{2+1}{2(2+3)} = \frac{3}{10}, C = \frac{-3+1}{-3(-3-2)} = -\frac{2}{15}$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx = \int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} dx = -\frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{10} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15} \int \frac{dx}{x+3} =$$

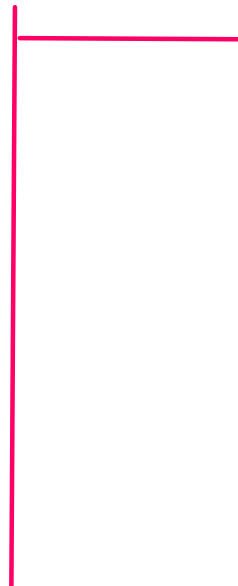
$$= -\frac{1}{6} \ln|x| + \frac{3}{10} \ln|x-2| - \frac{2}{15} \ln|x+3| + c$$

► **Άσκηση 6.5.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2x^3 - 8x^2 + 9x + 1}{x^2 - 4x + 4} dx$$

Λύση. Εδώ έχουμε να ολοκληρώσουμε μια καταχρηστική ρητή συνάρτηση. Πρέπει επομένως να προηγηθεί η διαίρεση του αριθμητή δια του παρονομαστή ώστε η συνάρτηση αυτή να καταστεί το άθροισμα ενός πολυωνύμου και μιας γνήσιας ρητής συνάρτησης.

$$2x^3 - 8x^2 + 9x + 1 \quad x^2 - 4x + 4$$



Εκτελώντας την διαίρεση λαμβάνουμε:

$$\frac{2x^3 - 8x^2 + 9x + 1}{x^2 - 4x + 4} = 2x + \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 4}$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

Επομένως πρέπει να αναλύσουμε το ρητό κλάσμα $\frac{x+1}{(x-2)^2}$ σε απλά κλάσματα:

$$\frac{x + 1}{(x - 2)^2} \equiv \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{(x - 2)^2}$$

Απαλείφοντας τους παρονομαστές έχουμε ότι:

$$x + 1 \equiv A_1(x - 2) + A_2$$

Για $x = 2$ και $x = 0$ (τυχαία "βολική" επιλογή)
έχουμε

$$\text{και } A_1 = 1, A_2 = 3.$$

Συνεπώς,

$$\frac{x + 1}{(x - 2)^2} \equiv \frac{1}{x - 2} + \frac{3}{(x - 2)^2}$$

Έχουμε επομένως να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 8x^2 + 9x + 1}{x^2 - 4x + 4} dx &= \int \left[2x + \frac{1}{x - 2} + \frac{3}{(x - 2)^2} \right] dx = \\ &= 2 \int x dx + \int \frac{dx}{x - 2} + 3 \int \frac{dx}{(x - 2)^2} = x^2 + \ln|x - 2| - \frac{3}{x - 2} + c \end{aligned}$$

(Βλέπε -> Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου XII*)

***Στο βιβλίο είναι άλυτες ασκήσεις**

Να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι μ, ν , αντικαταστήστε πριν την

ολοκλήρωση με:

μ = τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου (ΑΜ) σας +1,

ν = προτελευταίο ψηφίο του ΑΜ σας +1.

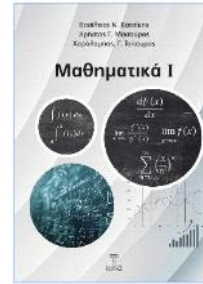
$$35. \int \frac{\mu x + \nu}{x^2 - 3x + 2} dx$$

$$37. \int \frac{\mu x + \nu}{x^2 - 4x + 3} dx$$



Εργασία για το σπίτι: Λύνουμε τις ασκήσεις 35 και 37 βάζοντας το πραγματικό μας "μ" και "ν" από τον αριθμό μητρώου (ΑΜ) μας.

Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3
Link: <https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0>
Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874



Τύποι, Ορισμοί & Θεωρήματα (Βιβλίο-Κεφάλαιο X) :

4. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη για όλες τις τιμές του x , όταν $a \leq x < +\infty$. Τότε το ολοκλήρωμα

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx$$

υπάρχει και η συνάρτηση $I(b)$ είναι «καλά ορισμένη» για κάθε $b > a$. Είναι προφανές να αναρωτηθούμε τι συμβαίνει όταν $b \rightarrow +\infty$.

Ορισμός 4.1. Αν το όριο

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε αυτό καλείται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $(a, +\infty)$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Δηλαδή, με βάση τον ορισμό που μόλις δώσαμε, έχουμε ότι

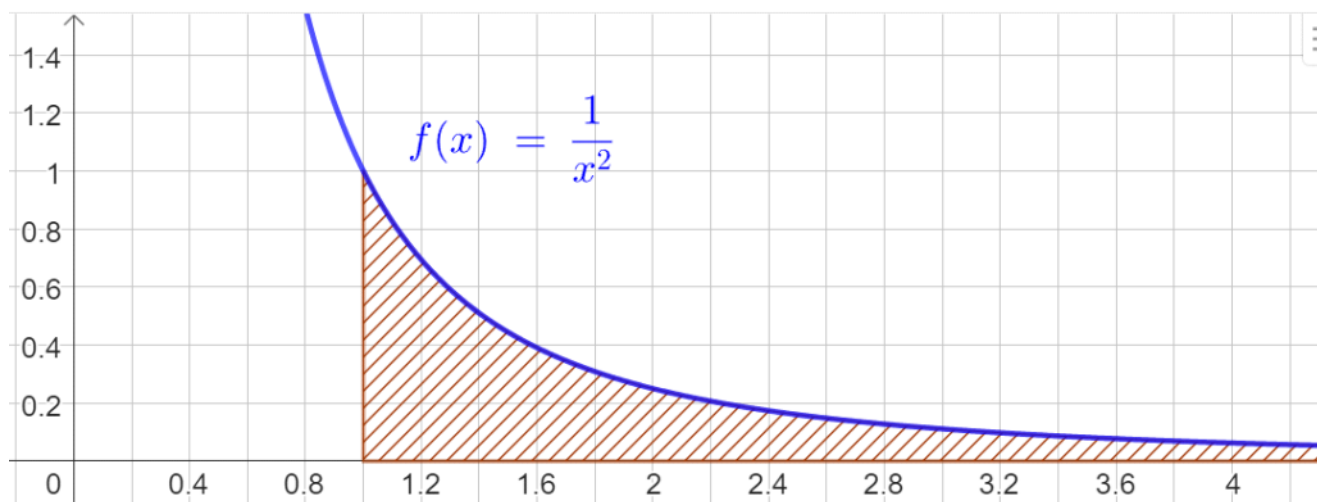
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Αν το όριο στον ορισμού 4.1 υπάρχει και είναι πεπερασμένο, συνηθίζουμε να λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει. Στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι αποκλίνει.

► **Παράδειγμα 4.1.** Θα αποδείξουμε ότι $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$.

Πράγματι,

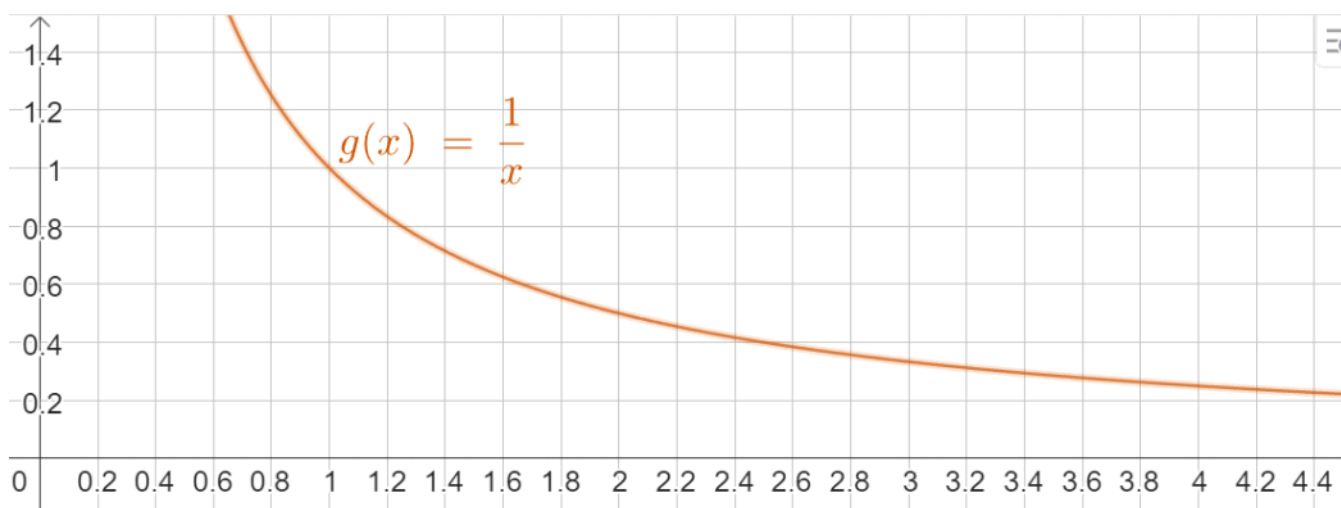
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{b} - 1 \right] = 1$$

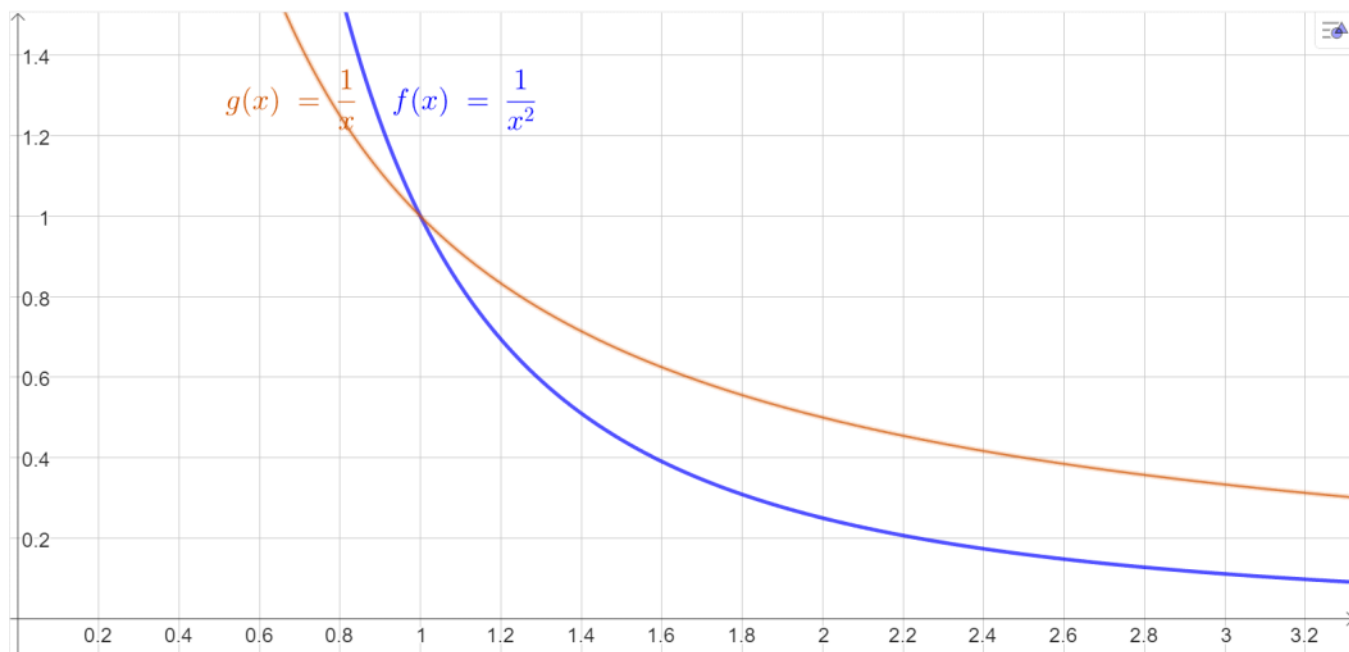


► **Παράδειγμα 4.2.** Θα αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (b - 0) = +\infty$$





► **Παράδειγμα 4.3.** Μετά τα δύο παραπάνω παραδείγματα ας εξετάσουμε γενικά τη συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx.$$

Την απάντηση για $p = 1$ μας την δίνει το παράδειγμα 4.2. Έτσι ας υποθέσουμε ότι $p \neq 1$.

Τότε:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-p} (b^{-p+1} - 1) \right] =$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ +\infty, & p < 1 \end{cases}$$

Κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα συγκλίνει στην τιμή $\frac{1}{p-1}$, αν $p > 1$, ενώ αποκλίνει αν $p < 1$.

Έτσι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ αποτελεί το «σύνορο» μεταξύ συγκλίνουσας και αποκλίνουσας συμπεριφοράς των γενικευμένων ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$.

Αντίστοιχος είναι και ο ορισμός του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^b f(x) dx$:

 **Ορισμός 4.2.** Αν το όριο

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε αυτό καλείται γενικευμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $(-\infty, b)$ και συμβολίζεται με

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$

Δηλαδή, με βάση τον ορισμό 4.2, έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Ένα άλλο είδος γενικευμένου ολοκληρώματος ορίζεται με έναν όχι τόσο προφανή τρόπο:

Ορισμός 4.3. Αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx \quad \text{και} \quad \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

υπάρχουν, τότε ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

- Το γενικευμένο ολοκλήρωμα του ορισμού 4.3 λέμε ότι **συγκλίνει**, αν αμφότερα τα

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx \quad \text{και} \quad \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

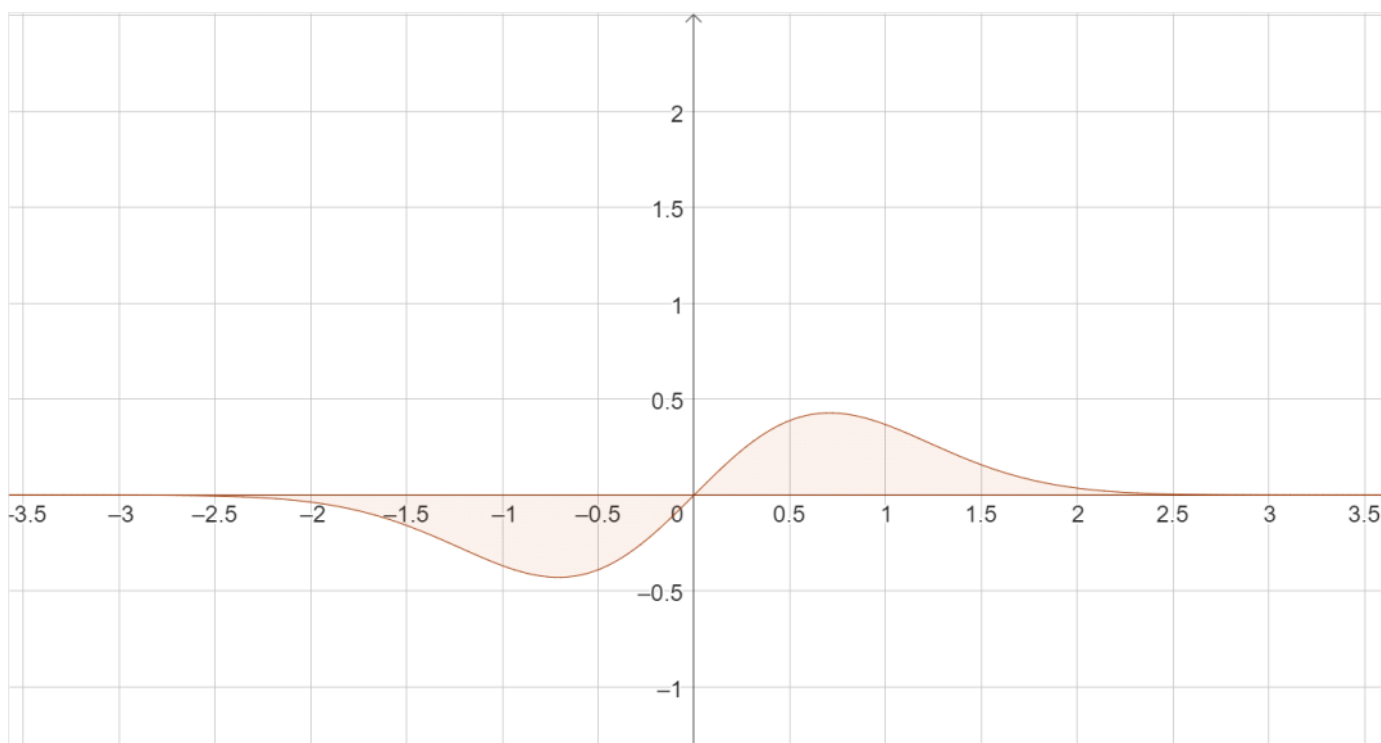
συγκλίνουν.

- Το σημείο 0 έχει ληφθεί ενδεικτικά. Θα μπορούσε να είναι οποιοδήποτε $c \in \mathbb{R}$. Σημασία έχει η ιδέα που κρύβεται πίσω από τον ορισμό αυτό: το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ υπάρχει, εφόσον υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα της συνάρτησης $f(x)$ στα διαστήματα $(-\infty, c)$ και $(c, +\infty)$.

► **Παράδειγμα:** Να εξεταστεί αν συγκλίνει το ολοκλήρωμα, θεωρώντας ενδιάμεσα σημεία αρχικά το $c=0$ και στη συνέχεια το $c=1$ (θα πρέπει να διαπιστώσουμε το ίδιο

αποτέλεσμα):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$$





Εργασία για το σπίτι: Λύνουμε το παρακάτω λυμένο παράδειγμα του βιβλίου για εξάσκηση.

► **Παράδειγμα 4.4.** Θα αποδείξουμε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = 2$.

Πράγματι,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-\frac{x}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^b = -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[e^{-\frac{b}{2}} - 1 \right] = 2$$