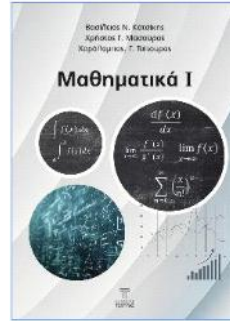


Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης - Κεφάλαιο XII

Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3

Link: <https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0>

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874



Ημερομηνία διάλεξης: 23-10-2025

Τύποι, Ορισμοί & Θεωρήματα (Βιβλίο-Κεφάλαιο XII) :

Τύποι βασικών ολοκληρωμάτων

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + c$$

1. Ολοκλήρωση Αθροίσματος

Γνωρίζουμε τους τύπους:

$$\int [c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx = c_1 \int f_1(x) dx + \dots + c_n \int f_n(x) dx$$

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx$$

Οι τύποι αυτοί απλοποιούν την ολοκλήρωση και μας βοηθούν στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων συναρτήσεων που μπορούν να γραφούν ως άθροισμα στοιχειωδών συναρτήσεων.

Παραδείγματα:

► **Παράδειγμα 1.1.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int (2x^4 - 5 \sin x + 7\sqrt{x}) dx$ ii. $\int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^2 dx$

iii. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x} dx$

Λύση.

i. $\int (2x^4 - 5 \sin x + 7\sqrt{x}) dx = 2 \int x^4 dx - 5 \int \sin x dx + 7 \int \sqrt{x} dx =$

$$= 2 \left[\frac{x^{4+1}}{4+1} + c_1 \right] - 5 [(-\cos x) + c_2] + 7 \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c_3 \right] = 2 \frac{x^5}{5} + 5 \cos x + 14 \frac{x\sqrt{x}}{3} + c$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$$

ii. $\int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^2 dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^2 dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right) dx =$

$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int x^{\frac{5}{6}} dx + \int x^{\frac{7}{6}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{11} x^{\frac{11}{6}} + \frac{6}{13} x^{\frac{13}{6}} + c$$

iii. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x} dx = \int \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x} dx = \int \frac{x}{x} dx - 2 \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx + \int \frac{1}{x} dx =$

$$= \int dx - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int \frac{1}{x} dx = x - 4\sqrt{x} + \ln x + c$$

★ **Παρατήρηση.** Αρκετές φορές έχουμε δει την μέθοδο αυτή να την εφαρμόζουν, κάποιοι φοιτητές, και σε γινόμενα. Αυτό το μεγάλο λάθος πρέπει να προσέχετε να μην το κάνετε. Η ολοκλήρωση του γινομένου δύο συναρτήσεων είναι το θέμα της επομένης παραγράφου.

□

2. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Θεώρημα 2.1. Αν οι f' και g' είναι συνεχείς, τότε:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

► **Παράδειγμα 2.1.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int \ln x \, dx$ ii. $\int x \ln x \, dx$

Λύση.

$$\begin{aligned} \text{i. } \int \ln x \, dx &= \int (x)' (\ln x) dx = x \ln x - \int x (\ln x)' dx = \\ &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \int x \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' (\ln x) dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + c \\ &= \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + c \end{aligned}$$

► **Παράδειγμα 2.2.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int x e^x dx$ ii. $\int x a^x dx$

Λύση.

i. $\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int x' e^x dx = (x - 1) e^x + c$

ii.
$$\begin{aligned} \int x a^x dx &= \frac{1}{\ln a} \int x a^x \ln a dx = \frac{1}{\ln a} \int x (a^x)' dx = \frac{1}{\ln a} \left(x a^x - \int a^x dx \right) = \\ &= \frac{1}{\ln a} \left(x a^x - \frac{1}{\ln a} a^x \right) + c = \frac{a^x}{\ln a} \left(x - \frac{1}{\ln a} \right) + c \end{aligned}$$

► **Παράδειγμα 2.3.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

i. $\int e^{-x} \sin x dx$

Λύση.

i. Ας ονομάσουμε I το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε.

Τότε

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-x} \sin x dx = - \int (e^{-x})' \sin x dx = - \left[e^{-x} \sin x - \int e^{-x} (\sin x)' dx \right] = \\ &= -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \sin x - \int (e^{-x})' \cos x dx = \\ &= -e^{-x} \sin x - \left[e^{-x} \cos x - \int e^{-x} (\cos x)' dx \right] = \\ &= -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x + \int e^{-x} (\cos x)' dx = \\ &= -e^{-x} (\sin x + \cos x) - \int e^{-x} \sin x dx = \\ &= -e^{-x} (\sin x + \cos x) - I \end{aligned}$$

Επομένως:

$$I = -e^{-x}(\sin x + \cos x) - I \Leftrightarrow 2I = -e^{-x}(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$$

► **Παράδειγμα 2.4.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int x \cos x \, dx$ ii. $\int x \sin x \, dx$

Λύση.

i. $\int x \cos x \, dx = \int x(\sin x)' \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c$

ii. $\int x \sin x \, dx = - \int x(\cos x)' \, dx = - \left(x \cos x - \int \cos x \, dx \right) = -x \cos x + \sin x + c$

3. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Θεώρημα 3.1. Έστω οι συναρτήσεις f, g με συνεχείς τις $g \circ f$ και f' σε ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών. Αν η G είναι η παράγουσα της g , τότε:

$$\int g(f(x))f'(x)dx = G(f(x)) + c$$

Θεώρημα 3.2. Έστω οι συναρτήσεις f, g με συνεχείς τις $g \circ f$ και f' σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν η G είναι η παράγουσα της g , τότε:

$$\int_a^b g(f(x))f'(x) dx = G(f(b)) - G(f(a))$$

Αν αντικαταστήσουμε την $f(x)$ με u , τότε ο τύπος αυτός μπορεί να πάρει την παρακάτω βολική, για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, μορφή:

$$\int_a^b g(\overbrace{f(x)}^u) \overbrace{f'(x)}^{\frac{du}{dx}} dx = G(f(b)) - G(f(a)) = \int_{u(a)=f(a)}^{u(b)=f(b)} g(u) du$$

► **Παράδειγμα 3.1.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int 3x^2(x^3 + 5) dx$ ii. $\int (x^3 + 2x + 6)(3x^2 + 2) dx$

Λύση. i. Θέτουμε $u = x^3 + 5$ οπότε $du = 3x^2 dx$.

Τότε:

$$\int 3x^2(x^3 + 5) dx = \int (\overbrace{x^3 + 5}^u) (\overbrace{3x^2}^{\frac{du}{dx}}) dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c$$

Άρα

$$\int 3x^2(x^3 + 5) dx = \frac{1}{2}(x^3 + 5)^2 + c$$

ii. Θέτουμε $u = x^3 + 2x + 6$ οπότε $du = (3x^2 + 2)dx$. Τότε:

$$\begin{aligned} \int (x^3 + 2x + 6)(3x^2 + 2) dx &= \int (\overbrace{x^3 + 2x + 6}^u) (\overbrace{3x^2 + 2}^{\frac{du}{dx}}) dx = \\ &= \int u du = \frac{u^2}{2} + c \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\int (x^3 + 2x + 6)(3x^2 + 2) dx = \frac{1}{2}(x^3 + 2x + 6)^2 + c \quad \blacktriangleleft$$

► **Παράδειγμα 3.3.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int (\ln x)^3 \frac{1}{x} dx$

Λύση. Θέτουμε $u = \ln x$ οπότε $du = \frac{1}{x} dx$. Τότε:

$$\int (\ln x)^3 \frac{1}{x} dx = \int (\overbrace{(\ln x)^3}^{u^3}) \left(\overbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}^{\frac{du}{dx}} \right) dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c$$

Άρα

$$\int (\ln x)^3 \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln x)^4}{4} + c$$

► **Παράδειγμα 3.4.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int \sin^4 x \cos x \, dx$ ii. $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$

Λύση. i. Θέτουμε $u = \sin x$ οπότε $du = \cos x \, dx$.

Τότε:

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx = \int (\overbrace{(\sin^4 x)}^{u^4}) (\overbrace{(\cos x)}^{\frac{du}{dx}}) dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + c$$

Επομένως

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx = \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

ii. Θέτουμε $u = \sin x$ οπότε $du = \cos x \, dx$.

Τότε

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx &= \int \left(\overbrace{(\sqrt{\sin x})}^{\sqrt{u}} \right) (\overbrace{(\cos x)}^{\frac{du}{dx}}) dx \\ &= \int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + c \end{aligned}$$

Άρα

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + c \quad \blacktriangleleft$$

Ασκήσεις:

► Άσκηση 3.3. (Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου XII)

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{\sin x} \sin x \cos x \, dx$$

Λύση. Θέτουμε $u = \sin x$ οπότε $du = \cos x \, dx$.

Τότε

$$\int e^{\sin x} \sin x \cos x \, dx = \int u e^u du$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned} \int u e^u du &= \int u (e^u)' du = u e^u - \int e^u du = u e^u - e^u + c \\ &= e^u (u - 1) + c \end{aligned}$$

Άρα

$$\int e^{\sin x} \sin x \cos x \, dx = e^{\sin x} (\sin x - 1) + c \quad \blacktriangleleft$$

(Βλέπε -> Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου XII*)

*Στο βιβλίο είναι άλυτες ασκήσεις

Να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα. :

$$25. \int \ln(1-x) dx, \quad \int \ln(1-x^2) dx$$

🏠 Εργασία για το σπίτι: Λύνουμε τις παρακάτω λυμένες ασκήσεις-παραδείγματα του βιβλίου για εξάσκηση.

► Παράδειγμα 2.2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

iii. $\int_0^1 x e^{-x} dx$	iv. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$
-----------------------------	------------------------------

Λύση.

$$\begin{aligned} \text{iii. } \int_0^1 x e^{-x} dx &= - \int_0^1 x (e^{-x})' dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = \\ &= -x e^{-x} \Big|_0^1 - e^{-x} \Big|_0^1 = -e^{-1} - (e^{-1} - 1) = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } \int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= - \int_0^1 x^2 (e^{-x})' dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} (x^2)' dx = \\ &= -x^2 e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} 2x dx = -e^{-1} + 2 \int_0^1 x e^{-x} dx \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα το έχουμε ήδη υπολογίσει στο (iii), οπότε:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 2 \frac{e-2}{e} = \frac{2e-5}{e}$$

► **Παράδειγμα 3.5.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int \frac{x}{1+x^2} dx$	ii. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$	iii. $\int x^2 \sqrt{x+1} dx$
------------------------------	--	-------------------------------

Λύση. i. Θέτουμε $u = 1 + x^2$ οπότε $du = 2x dx$, επομένως,

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\overbrace{2x dx}^{du}}{\overbrace{u}^{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln u + c$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

ii. Θέτουμε $u = 1 + x^3$ οπότε $du = 3x^2 dx$, επομένως,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3} \int \frac{\overbrace{3x^2 dx}^{du}}{\overbrace{\sqrt{u}}^{\sqrt{1+x^3}}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{1}{2}} + c$$

Άρα

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{1+x^3} + c$$

iii. Θέτουμε $u = x + 1$ οπότε $x = u - 1$ και $du = dx$. Τότε:

$$\int x^2 \sqrt{x+1} dx = \int (u-1)^2 \sqrt{u} du = \int (u^2 - 2u + 1) u^{\frac{1}{2}} du =$$

$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du = \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

Συνεπώς,

$$\int x^2 \sqrt{x+1} \, dx = \frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$