

$f(x) = \boxed{}$ Μελέτη ως προς
 μονοτονία - ακρότητα
 κυρτότητα - σιγεία καμπύλης

- $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \nearrow p_1 \\ \searrow p_2 \\ \vdots \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \nearrow p_1 \\ \searrow p_2 \\ \vdots \end{matrix}} \right\} \text{ κρίσιμα σημεία}$

Πίνακας μονοτονίας

	p_1	p_2	...
$f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	↘	↗	↗

T.E.

όχι
ακρότατο

κρίτήριο 2^{ης} παραγώγου

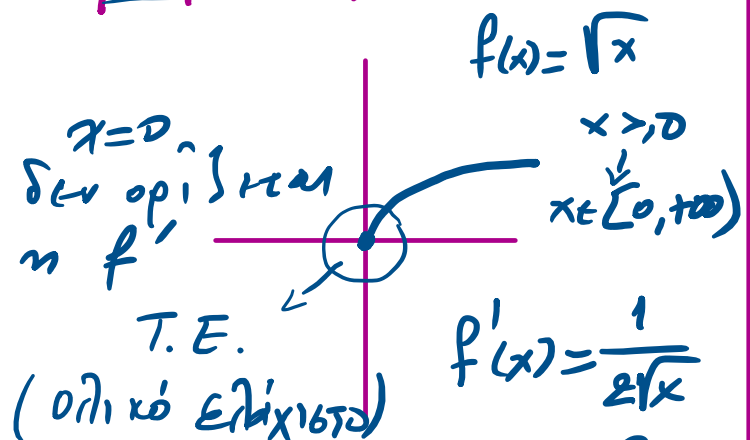
$$f''(x)$$

$$f''(p_1) > 0 \leadsto \text{T.E.}$$

$$f''(p_2) = 0$$

- $f' \leadsto$ δεν ορίζεται $\rightarrow$ κρίσιμο σημείο

Ελέγχω αν είναι
 ακρότατο ή όχι
 μέσω της μονοτονίας



- Έχουμε κρίσιμα σημεία (σίγουρα ακρότατα) στα σημεία που είναι κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού ($[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$)

Σιγεία καμπύλης - κυρτότητα:

$$f''(x) = 0 \begin{matrix} \nearrow p_1 \\ \searrow p_2 \end{matrix}$$

$$f'' > 0 \rightarrow f \text{ κυρτή}$$

$$f''(x) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow p_1 \\ \rightarrow p_2 \\ \searrow \vdots \end{matrix}$$

	p_1	p_2	...
f''	-	+	-
f	∩	∪	∪

Σ.κ.

↘ όχι Σ.κ.

$$f' > 0 \rightarrow f \text{ κυρτή}$$

∪

$$f'' < 0 \rightarrow f \text{ κοίλη}$$

∩

Κριτήριο ν-οστής παραγώγου:

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = a \text{ (κρίσιμο σημείο)}$$

$$f''(a) \begin{matrix} \nearrow > 0 \\ \searrow < 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = a \text{ Τ.Ε.} \\ x = a \text{ Τ.Μ.} \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{= 0}$$

$$f'''(a) = \begin{matrix} \nearrow > 0 \\ \searrow < 0 \end{matrix} \boxed{\neq 0} \rightarrow x = a \text{ Σ.κ.}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{= 0}$$

$$f^{(4)}(a) \begin{matrix} \nearrow > 0 \\ \searrow < 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = a \text{ Τ.Ε.} \\ x = a \text{ Τ.Μ.} \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{= 0}$$

$$f^{(5)}(a) = \begin{matrix} \nearrow > 0 \\ \searrow < 0 \end{matrix} \boxed{\neq 0} \rightarrow x = a \text{ Σ.κ.}$$

$$\boxed{=0}$$

⋮

► Άσκηση 1. (Βλέπε -> Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου VIII) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία-ακρότατα, κυρτότητα-σημεία καμπής και στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$

$$A_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2x - 7 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$r_1 = \frac{-1 - \sqrt{43}}{6} = -1.26$$

$$r_2 = \frac{-1 + \sqrt{43}}{6} = 0.93$$

Πίνακας Σημίων

	-1.26	0.93	
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

T.M.

T.E.

Μονοτονία:

$f \nearrow$ στο $(-\infty, -1.26]$ και
στο $[0.93, +\infty)$

$f \searrow$ στο $[-1.26, 0.93]$

Ακρότατα:

Το $(-1.26, f(-1.26)) \rightarrow$ T.M.

Το $(0.93, f(0.93)) \rightarrow$ T.E.

κριτήριο της f'' παραγώγου:

$$f''(x) = 12x + 2$$

$$f''(-1.26) = 12(-1.26) + 2 < 0 \rightarrow \text{T.M.}$$

$$f''(0.93) = 12 \cdot 0.93 + 2 > 0 \rightarrow \text{T.E.}$$

Σημεία καμπής - κυρτότητα

$$f''(x) = 12x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$$

$$f''(x) = 12x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$$

	$-\frac{1}{6}$	
f''	$- \quad 0 \quad +$	
f	$\cap \quad \cup$	

Σ.Κ.

$$\left(-\frac{1}{6}, f\left(-\frac{1}{6}\right)\right) \underline{\text{Σ.Κ.}}$$

κρίτήριο ν-οστής
παραγώγου.

$$f'''(x) = 12$$

$$f'''(-\frac{1}{6}) = 12 \neq 0$$

οπότε έχω
Σ.Κ.

Γραφική παράσταση:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$$

Συμπτώσεις με τους άξονες:

$$\kappa\chi': \text{Θέτω } y = f(x) = 0$$

$$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$$

Διαγόμενοι του -6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

2	1	-7	-6	-1	<u>Σχήμα Horner.</u> $\circ$ <u>πίζα.</u>
$\downarrow$	-2	1	6		
2	-1	-6	0		

$$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = (x+1)(2x^2 - x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow x+1=0 \quad \text{ή} \quad 2x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x+1=0 \quad \text{ή} \quad 2x^2-x-6=0$$

$$x = -1$$

$$x = 2$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

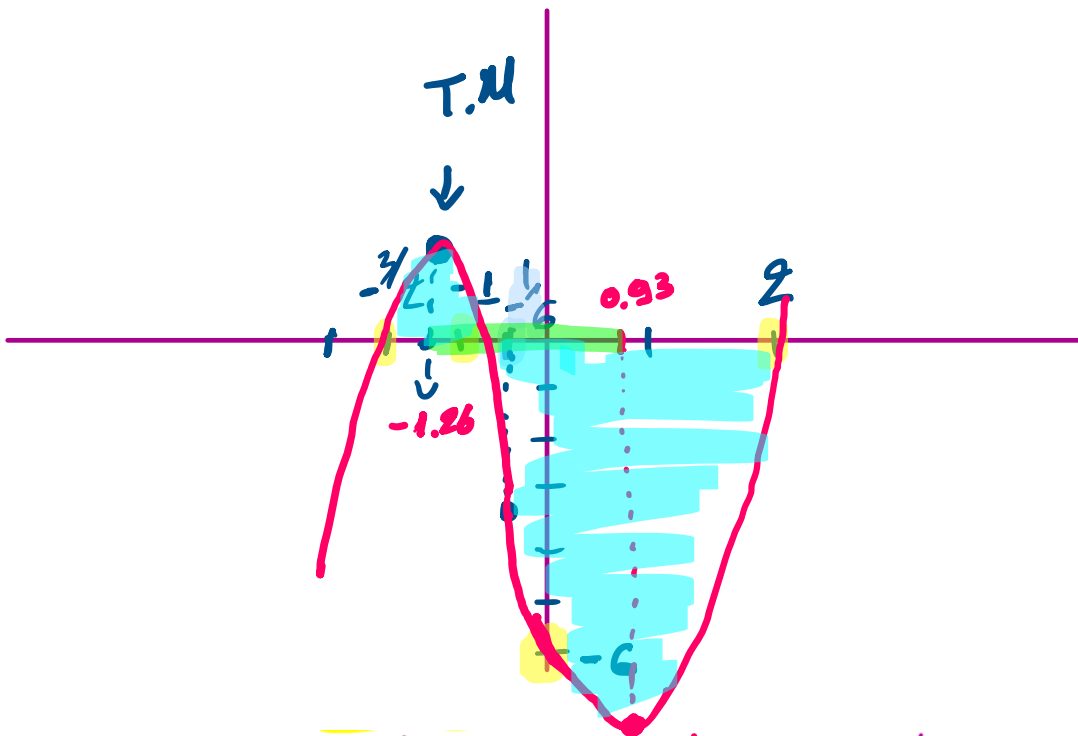
$$\Delta = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \frac{2}{4} \quad \text{ή} \quad \frac{-8}{4}$$

Σημεία τομής με τον xx' : $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1$, $x = 2$

Σημεία τομής με τον yy' : Θέτω $x=0$

$$\text{όρα } y = -6 \rightarrow (0, -6)$$



Πινάκας Σημίων

	-1.26	0.93	
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

T.M

T.E

	-1/6	
f''	-	+
f	∩	∪

Σ.κ.

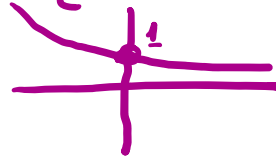
$$\left(-\frac{1}{6}, f\left(-\frac{1}{6}\right)\right) \underline{\text{Σ.κ.}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} =$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \quad \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \quad \text{DLH}$$

$$0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{0}$$

$$\frac{1}{\infty} \cdot \infty$$

$$\frac{1}{0} \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{\infty} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\int x^k dx = \int x^{\frac{1}{k}} dx = \frac{x^{\frac{1}{k}+1}}{\frac{1}{k}+1} + C$$

(καρδιας δυνάμεις)

$$\int \frac{1}{x^r} dx = \int x^{-r} dx = \frac{x^{-r+1}}{-r+1} + C$$

(καρδιας ρος δυνάμεις)

$$\frac{1}{x^r}, \quad r \neq 1$$

Εξαιρέση

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int (ax+b)^k dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{k+1}}{k+1} + C$$

$$\int (\downarrow \overset{x}{ax+b})^k dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{k+1}}{k+1} + C$$

17. x. $\int (3x+2)^{10} dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+2)^{11}}{11} + C$