

59. $f(x) = x^{\ln x}$

3' τρόπος (Λογαριθμική Παράγωγος)

$$f(x) = x^{\ln x}$$

$$\ln f(x) = \ln x^{\ln x} \Rightarrow \ln f(x) = \ln x \cdot \ln x \Rightarrow$$

$$\ln f(x) = \ln^2 x \Rightarrow [\ln f(x)]' = [\ln^2 x]' \Rightarrow$$

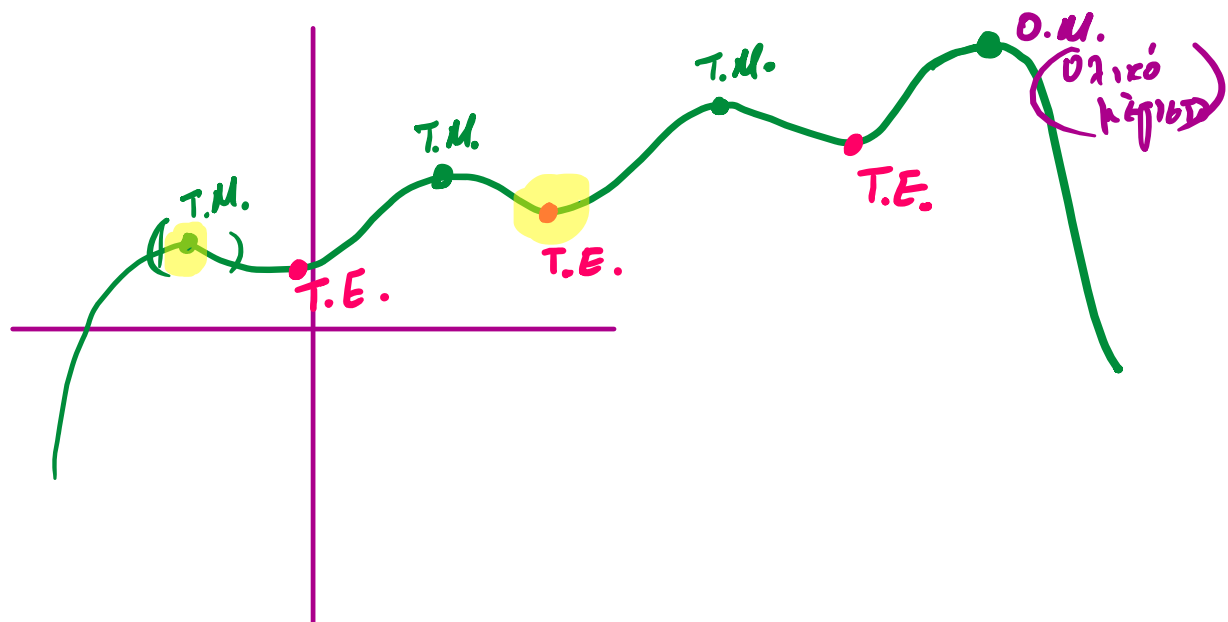
πυθμός
μεγεθών

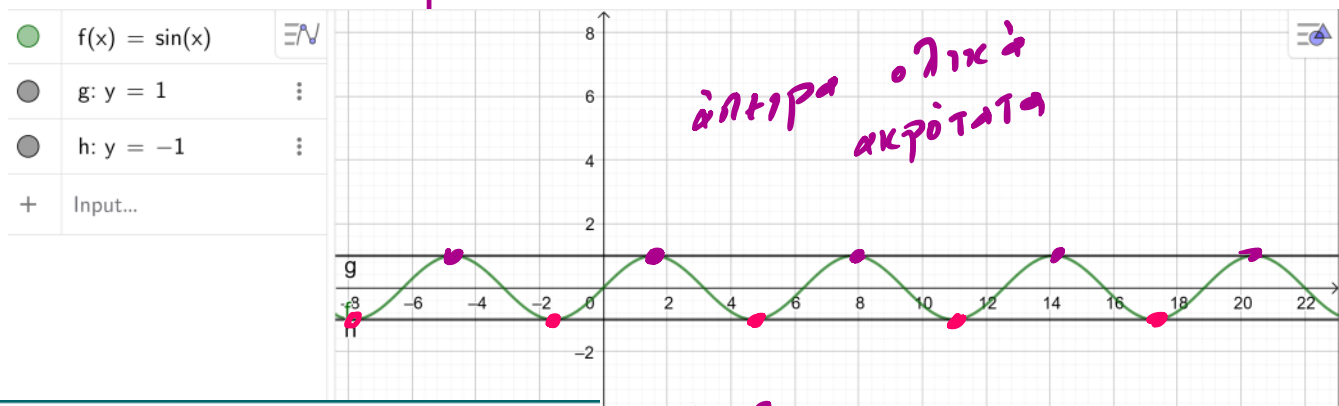
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x}$$

$$f'(x) = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}$$

$$x^k \cdot \frac{1}{x} = x^{k-1} = x$$

$$f'(x) = x^{\ln x - 1} \cdot 2 \ln x$$





► Άσκηση 1.2. (Βλέπε -> Λυμένες ασκήσεις)

Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

Π.Ο. ΠΑ $\sqrt[k]{x^a} = x^{a/k}$ $x^{2/3}$

$$f'(x) = (x-1)' \cdot \sqrt[3]{x^2} + (x-1) \left(\sqrt[3]{x^2} \right)' =$$

$$= \sqrt[3]{x^2} + (x-1) \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1} + \frac{2x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} + \frac{2x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$= \frac{5x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{5x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

κρίσιμα σημεία:

• $f'(x) = 0 \Rightarrow 5x-2=0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

• Σημεία στα οποία δεν ορίζεται η 1^η παράγωγος

Παρατηρώ ότι $A_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot x^{-1/3}}{3 \cdot x^{1/3}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$(\sqrt[k]{a})^k = a, \quad a \geq 0$$

$$\left(\sqrt[k]{x} \right)^k = x$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\sqrt[k]{x} = \begin{cases} \sqrt[k]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[k]{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

$k = \text{περιττός}$

$k = \text{περιττός} (1, 3, 5, 7, \dots)$

$$\sqrt[k]{x} \geq 0, \quad x \geq 0$$

$$\sqrt[k]{x} < 0, \quad x < 0$$

οπότε $x=0$ κρίσιμο σημείο

$2 \cdot x^{1/3}$ $3 \cdot \sqrt[3]{x}$

S.O.S.

► Παράδειγμα 3.7. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$$

$$A_f = \mathbb{R}, A_{f'} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\text{κρίσιμα σημεία: } x = \frac{2}{5}, x = 0$$

$$f' > 0 \rightarrow f \uparrow$$

$$f' < 0 \rightarrow f \downarrow$$

Πίνακας μονοτονίας:

$$f'(x) = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

		0	2/5	
5x-2	-	-	0	+
$\sqrt[3]{x}$	-	+	+	+
f'(x)	+	-	0	+
f(x)		↗	↘	↗
		T.M.	T.E.	

$$A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta = f(x)$$

A
B
Γ
Δ
f(x)

συνολικό πρόσημο

Θέση τοπ. ακροτάτων:

$$x=0, x=\frac{2}{5}$$

Ακρότατες τιμές:

$$f(0), f\left(\frac{2}{5}\right)$$

Θέση
(x, y)
Τίμη

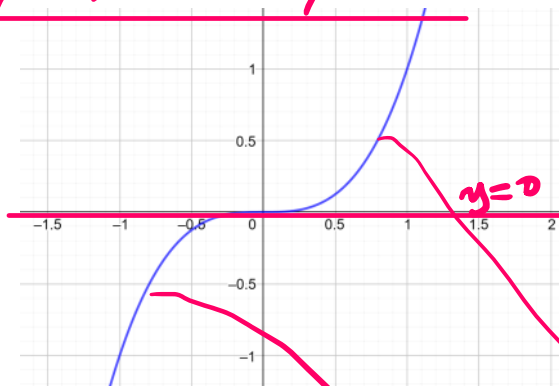
Ακρότατα σημεία:

$$(0, f(0)), \left(\frac{2}{5}, f\left(\frac{2}{5}\right)\right)$$

Εξωτερικά σημεία:

$$0, 3, 0, 1, 2$$

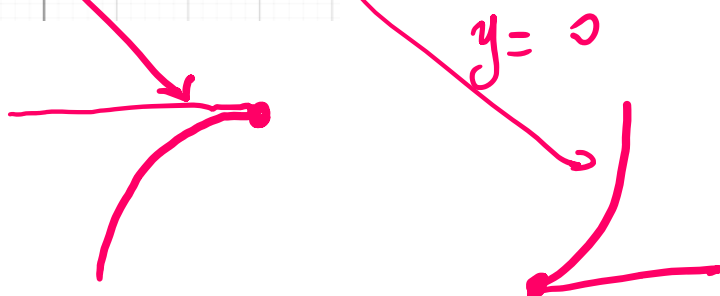
Εφαρμογή σε συνάρτηση:



$$f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2$$

εξ. εφ. στο $x=0$

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow$$



Κριτήριο 2^{ος} Παραγώγου:

Έστω $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f'(x_0) = 0, x_0 \in (a, b)$

τότε αν f 2 φορές παραγωγισίμη

α) $f''(x_0) > 0$, το $(x_0, f(x_0))$ είναι τοπικό
ελάχιστο

β) $f''(x_0) < 0$, το $(x_0, f(x_0))$ είναι τοπικό
μέγιστο.

γ) $f''(x_0) = 0$ (το κριτήριο δεν
εφαρμόζεται)

Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x + 7$

$$A_f = \mathbb{R}, f'(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$A_{f'} = \mathbb{R}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$f''(x) = 2x - 3$$

(κρίτήριο $2^{\text{ης}}$ παραγώγου)

$$f''(1) = -1 < 0 \rightarrow (1, f(1)) \text{ Τ.Μ.}$$

$$f''(2) = 1 > 0 \rightarrow (2, f(2)) \text{ Τ.Ε.}$$

$$f(x) = x^5 + 4$$

ακρότατα - στροφές, καμπές

$$f'(x) = 5x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ κρίσιμο σφτίο}$$

$$f''(x) = 20x^3, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2, \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 120x, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = 120, \quad f^{(5)}(0) = 120 \neq 0 \quad (5 = \text{περιττός})$$

άρα το $(0, f(0))$ στροφής καμπής

