

(Λυμένη Άσκηση Κεφ. XIII)

► **Άσκηση 7.11.** Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για ένα προϊόν είναι αντίστοιχα:

$$P_d(q) = -q^2 - 5q + 900 \text{ και } P_s(q) = q^2 + 25q \quad \textcircled{1}$$

όπου η ποσότητα μετριέται σε χιλιάδες μονάδες και η τιμή σε ευρώ.

Ζητούνται:

i. Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας

ii. Το πλεόνασμα καταναλωτή

iii. Το πλεόνασμα παραγωγού

$$i) P_s(Q) = P_d(Q) \Rightarrow -Q^2 - 5Q + 900 = Q^2 + 25Q \Rightarrow$$

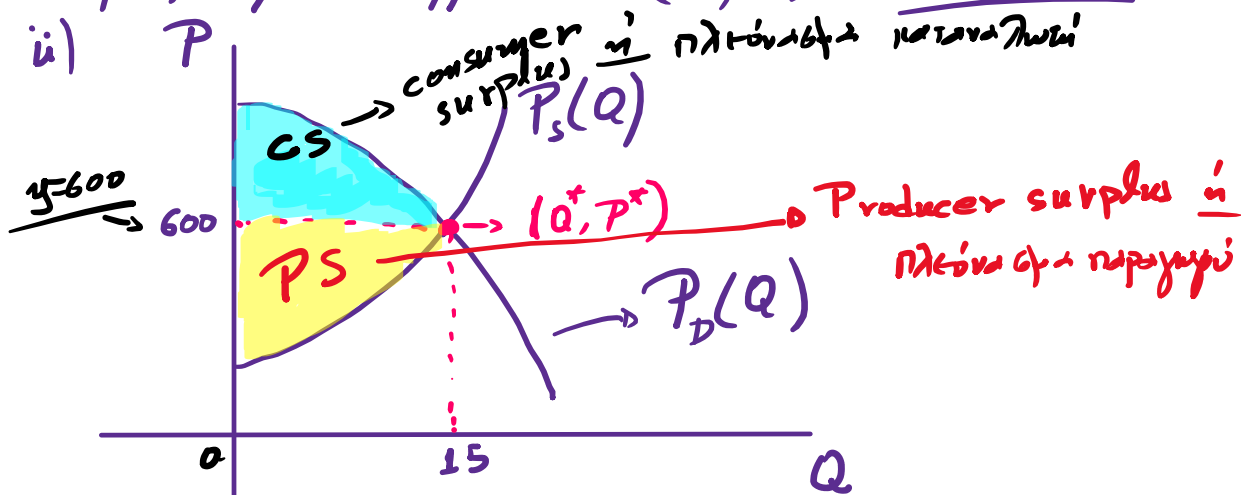
$$2Q^2 + 30Q - 900 = 0 \Rightarrow Q^2 + 15Q - 450 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\boxed{Q = 15} \quad \text{ή} \quad \boxed{Q = -30} \text{ Απορ. } (Q \geq 0)$$

Δεγν.

$$\text{Για } Q=15 \xrightarrow{\textcircled{1}} P(15) = 15^2 + 25 \cdot 15 = 600$$

$$\text{Άρα, σημείο ισορροπίας: } (Q^*, P^*) = (15, 600)$$



$$CS = \int_0^{15} (P_d(Q) - 600) dQ = \int_0^{15} (-Q^2 - 5Q + 900 - 600) dQ =$$

$$= \int_0^{15} (-Q^2 - 5Q + 300) dQ = \left[-\frac{Q^3}{3} - \frac{5Q^2}{2} + 300Q \right]_0^{15} =$$

$$= -\frac{15^3}{3} - 5 \cdot \frac{15^2}{2} + 300 \cdot 15 - 0 = 2812.5 \text{ Ευρώ}$$

$$= -\frac{15^3}{3} - 5 \cdot \frac{15^2}{2} + 300 \cdot 15 - 0 = \underline{2812.5 \text{ Ευρώ}}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } PS &= \int_0^{15} (600 - P_s(Q)) dQ = \int_0^{15} 600 - Q^2 - 25Q dQ = \\ &= \left[600Q - \frac{Q^3}{3} - \frac{25Q^2}{2} \right]_0^{15} = 600 \cdot 15 - \frac{15^3}{3} - 25 \cdot \frac{15^2}{2} - 0 \\ &= \underline{5062.5 \text{ Ευρώ}} \end{aligned}$$

(Λυμένη Άσκηση Κεφ. XIII) ► **Άσκηση 7.11.** Μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν του οποίου η συνάρτηση ζήτησης είναι

$$P_d(q) = -\frac{2}{3}q^2 - 8q + 2600 \quad \textcircled{1}$$

και η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι

$$TC(q) = 2q^2 + 200q + 3000$$

Η τιμή του προϊόντος μετρίεται σε ευρώ και η ποσότητα q σε τόνους.

Ζητούνται:

- i. Να βρεθεί ο αριθμός μονάδων και η τιμή μονάδας που μεγιστοποιούν τα κέρδη.
- ii. Να βρεθεί το πλεόνασμα καταναλωτή αν το προϊόν πωλείται στην τιμή που η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα κέρδη της.

$$i) \quad TR(Q) = P \cdot Q = \left(-\frac{2}{3}Q^2 - 8Q + 2600 \right) \cdot Q \Rightarrow$$

$$\boxed{TR(Q) = -\frac{2}{3}Q^3 - 8Q^2 + 2600Q}$$

↙ κέρδος

$$\begin{aligned} \pi(Q) &= TR(Q) - TC(Q) = \\ &= -\frac{2}{3}Q^3 - 8Q^2 + 2600Q - (2Q^2 + 200Q + 3000) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{3}Q - 8Q + 2600Q - (10Q^2 + 20Q^2 + \dots)$$

$$\pi(Q) = -\frac{2}{3}Q^3 - 10Q^2 + 2400Q - 3000$$

$$\pi'(Q) = -2Q^2 - 20Q + 2400$$

$$\pi'(Q) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{Q = 30} \text{ ή } Q = -40$$

δεν τήν απαρ. (Q > 0)

$$\pi''(Q) = -4Q - 20$$

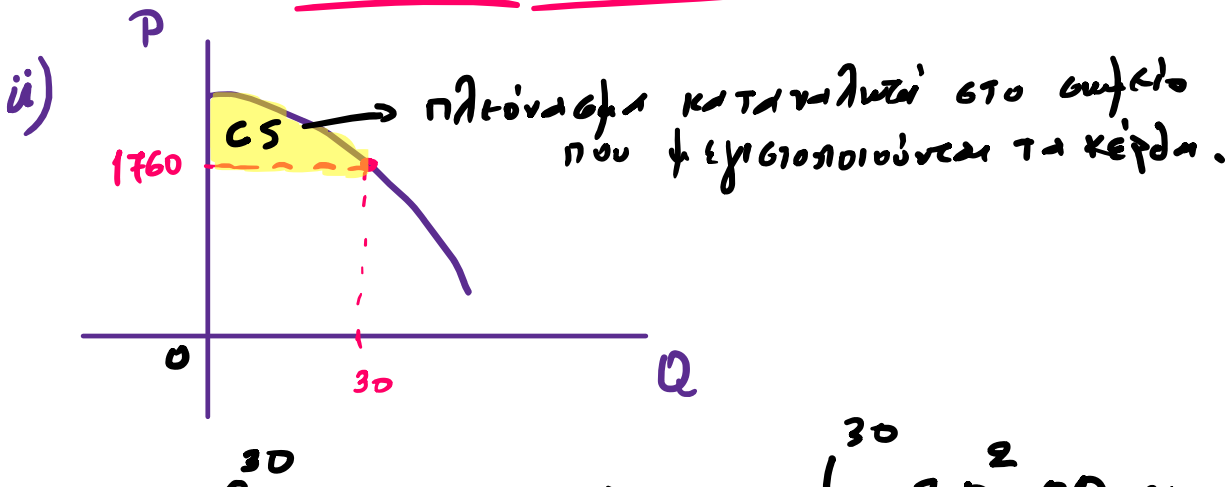
$$\pi''(30) = -4 \cdot 30 - 20 = -140 < 0$$

Αφού $\pi''(30) < 0$ στο $\boxed{Q = 30}$ έχουμε
 μεγιστοποίηση των κερδών.

Η τιμή θα είναι ① $\Rightarrow P_D(30) = -\frac{2}{3} \cdot 30^2 - 8 \cdot 30 + 2600$

$$\Rightarrow \underline{P_D(30) = 1760.}$$

Στο σημείο που έχουμε μεγιστοποίηση του κέρδους
 ισχύει $\underline{Q = 30, P = 1760.}$



$$\begin{aligned}
 CS &= \int_0^{30} (P_D(Q) - 1760) dQ = \int_0^{30} -\frac{2}{3}Q^2 - 8Q + 2400 - 1760 dQ \\
 &= \int_0^{30} -\frac{2}{3}Q^2 - 8Q + 840 dQ = \left[-\frac{2Q^3}{9} - 4Q^2 + 840Q \right]_0^{30} = \\
 &= -\frac{2 \cdot 30^3}{9} - 4 \cdot 30^2 + 840 \cdot 30 = \dots = \underline{15600 \text{ ευρώ}}
 \end{aligned}$$

Άσκηση. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x - 6} dx$$

$$\begin{array}{r|l}
 \cancel{x^2} + 2x - 3 & \cancel{x^2} - x - 6 \\
 - \cancel{x^2} - x - 6 & 1 \\
 \hline
 3x + 3 &
 \end{array}$$

Το υπόλοιπο διαίρεσης:

$$x^2 + 2x - 3 = 1 \cdot (x^2 - x - 6) + (3x + 3)$$

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x - 6} = \frac{(x^2 - x - 6) + (3x + 3)}{x^2 - x - 6} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 6} + \frac{3x + 3}{x^2 - x - 6}$$

$$= 1 + \frac{3x + 3}{x^2 - x - 6}$$

$$\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x - 6} dx = \int 1 + \frac{3x + 3}{x^2 - x - 6} dx = \int 1 dx + \int \frac{3x + 3}{x^2 - x - 6} dx$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 x (I)

$x + (I)$

$$I = \int \frac{3x+3}{x^2-x-6} dx$$

$$\frac{3x+3}{x^2-x-6} = \frac{3x+3}{(x-3)(x+2)}$$

$$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$$

$$\downarrow$$
$$x=3 \text{ ; } x=-2$$

$$x^2+0x-6 = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\frac{3x+3}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$3x+3 = A(x+2) + B(x-3)$$

$$\text{For } x=-2 : -3 = 0 - 5B \Rightarrow B = \frac{3}{5}$$

$$\text{For } x=3 : 12 = 5A \Rightarrow A = \frac{12}{5}$$

$$\text{Apr, } \int \frac{3x+3}{x^2-x-6} dx = \int \frac{12/5}{x-3} dx + \int \frac{3/5}{x+2} dx$$

$$= \frac{12}{5} \cdot \ln|x-3| + \frac{3}{5} \ln|x+2| + C,$$

$$C \in \mathbb{R}$$

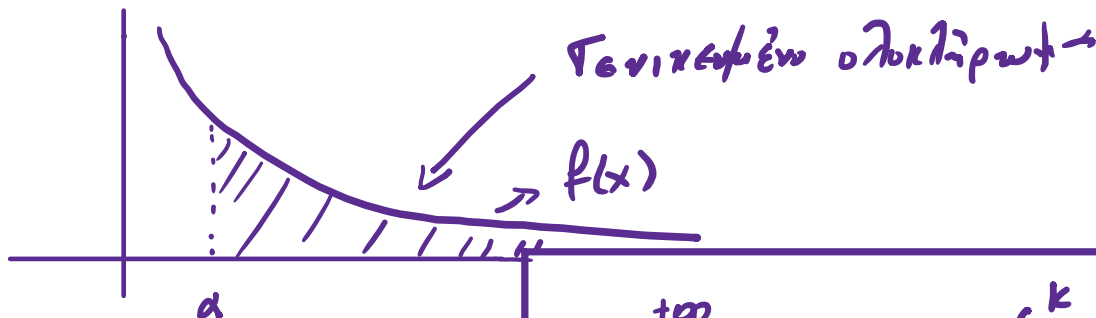
$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + C$$

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περιορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις

$$y = \frac{1}{x \cdot (1 + \ln x)^2}, x = 1$$

και του θετικού ημιάξονα Ox , για $x \geq 1$.

γεν. ολοκλ.



$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^k f(x) dx$$

$x \geq 1$

$$E = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \cdot (1 + \ln x)^2} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k \frac{1}{x \cdot (1 + \ln x)^2} dx$$

$$\int_1^k \frac{1}{x \cdot (1 + \ln x)^2} dx = (*)$$

$$\text{Θέτω } u = 1 + \ln x, \frac{du}{dx} = (\ln x)' \Rightarrow$$

$$\Theta \tilde{\epsilon} \tau \omega \quad \boxed{u = 1 + \ln x}, \quad \frac{du}{dx} = (1 + \ln x)' \Rightarrow$$

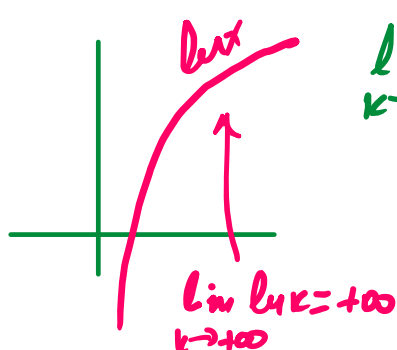
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{du = \frac{1}{x} dx}$$

$$\Gamma, \alpha \quad x=1, \quad u = 1 + \ln 1 \Rightarrow \boxed{u=1}$$

$$\Gamma, \alpha \quad x=k, \quad \boxed{u = 1 + \ln k}$$

$$\begin{aligned}
 (*) \int_1^{1+\ln k} \frac{1}{u^2} du &= \left[-\frac{1}{u} \right]_1^{1+\ln k} = \\
 &= -\left[\frac{1}{u} \right]_1^{1+\ln k} = -\left(\frac{1}{1+\ln k} - 1 \right) \\
 &= \boxed{-\frac{1}{1+\ln k} + 1}
 \end{aligned}$$

Τελικά έχουμε: $E = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^{1+\ln k} \frac{1}{u^2} du =$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{1+\ln k} + 1 \right) = 0 + 1 = \underline{\underline{1 \text{ τ.τ.}}}$$


Άσκηση: Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο (1, 1).

$$f(x) = \boxed{x^2}, x > 0 \quad \begin{matrix} g(x) \\ \text{f' } \neq h(x) \end{matrix} \quad h(x) = x^{\boxed{2}}$$

συνάρτησης στο σημείο $(1, 1)$.

$$f(x) = x^{x^2}, x > 0 \quad \text{g(x)} \quad h(x) = x^{\boxed{x^2}}$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(x) = (x^{x^2})' = ?$$

Α' τροπος | λογαριθμική παραγώγιση)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{x^2} \Rightarrow \\ \ln f(x) &= \ln x^{x^2} \Rightarrow \\ \ln f(x) &= x^2 \cdot \ln x \Rightarrow \\ [\ln f(x)]' &= [x^2 \cdot \ln x]' \Rightarrow \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= 2x \ln x + x \Rightarrow \\ f'(x) &= f(x)(2x \ln x + x) \\ f'(x) &= x^{x^2} (2x \ln x + x) \end{aligned}$$

Β' τροπος

$$\begin{aligned} \theta &= e^{\ln \theta} \\ f(x) &= x^{x^2} = e^{x^2 \ln x} \Rightarrow \\ f'(x) &= e^{x^2 \ln x} (x^2 \ln x)' \Rightarrow \\ f'(x) &= e^{x^2 \ln x} \cdot (2x \ln x + x) \Rightarrow \\ f'(x) &= x^{x^2} (2x \ln x + x) \end{aligned}$$

Για $x_0 = 1$ έχουμε $f'(1) = 1(2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + 1) = 1$

Εξ. εφαπτ. $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow$

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = x$$

Γεωμετρική πρόοδος - Γερά

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

π.χ.

$$\boxed{\frac{1}{2}}, \boxed{\frac{1}{4}}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$\lambda = \frac{a_3}{a_2}$$

$$\lambda = \frac{a_4}{a_3}$$

$$a_2 = a_1 \cdot \lambda$$

$$\lambda = \frac{a_2}{a_1}$$

$$a_3 = a_2 \cdot \lambda$$

$$a_3 = a_1 \cdot \lambda \cdot \lambda = a_1 \cdot \lambda^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot \lambda$$

$$a_4 = a_1 \cdot \lambda^3$$

$$a_5 = a_1 \cdot \lambda^4 \rightarrow \text{ν-οστός όρος}$$

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$$

$$\rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Παρατήρηση: Το λ (λόγος της γεωμ. πρόοδου)

προκύπτει αν διαιρέσουμε κάποιον όρο με τον προηγούμενο του δλδ.

$$\lambda = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Αθροισμα η-όρων γεωμ. προόδου και
 άθροισμα απείρων όρων γεωμ. προόδου

π.χ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

π.χ. $S_{50} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{50} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -\left(\frac{1}{2^{50}} - 1\right) =$
 $= 1 - \frac{1}{2^{50}}$

$a_1 + a_2 + \dots + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = ? \rightarrow$ συγκλίνει όταν $|\lambda| < 1$
 $\rightarrow$ αλλιώς αποκλίνει

Λόγισμα:

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η
 σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

$n=1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right), n=2 \Rightarrow \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, n=3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Γεωμ. σειρά:
 $a_1 = \frac{1}{2}$

$\lambda = \frac{1}{2}$

Αφού $|\lambda| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ η σειρά συγκλίνει
 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$

π.φ.ο.ν $|λ| = |1/2| < 1$

και εχουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1^{1/2}}{1 - 1/2} = \frac{1/2}{1/2} = \underline{\underline{1}}$$

Γεωμ. βηρ. $|λ| < 1$

$$S_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-\lambda}$$

π.χ.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots$$

$$\text{Γεωμ. βηρ. } \mu\epsilon \quad a_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$$

$$\lambda = \frac{3}{4}$$

Αφού $|λ| = \left|\frac{3}{4}\right| < 1$ η βηρ. συγκλινει

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{a_1}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{1/4} = \underline{\underline{4}}$$