

$$\sin x \rightarrow \eta\acute{\nu} x$$

$$\cos x \rightarrow \sigma\upsilon\eta x$$

(Άλυτη Άσκηση Κεφ. V) Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης:

128. $f(x) = x^{\sin x}$

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

Α' τρόπος: (Λογαριθμική παραγωγή)

$$f(x) = x^{\sin x} \Rightarrow \ln f(x) = \ln x^{\sin x}$$

$$\ln f(x) = \sin x \cdot \ln x \Rightarrow$$

$$[\ln f(x)]' = [\sin x \cdot \ln x]'$$

$$\ln x^k = k \cdot \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = f(x) \left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \cdot \left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$$

Β' τρόπος:

$$\theta = e^{\ln \theta}$$

$$\ln x^k = k \cdot \ln x$$

$$f(x) = x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \cdot \ln x}$$

$$f'(x) = (e^{\sin x \cdot \ln x})' = e^{\sin x \cdot \ln x} \cdot (\sin x \cdot \ln x)' =$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$x^5$$

$$(5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$$

(Λυμένη Άσκηση Κεφ. VI) ▶ Άσκηση 5.7. Να βρεθεί το όριο

(Λυμένη Άσκηση Κεφ. VI) ► Άσκηση 5.7. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} \quad \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \quad \text{DLH} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1}$$

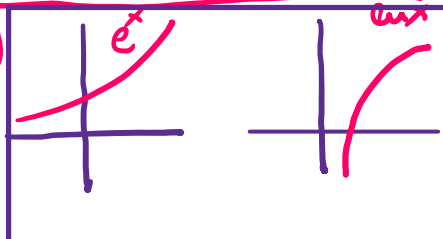
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} \quad \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \quad \text{DLH}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0 \quad \left(\frac{2}{+\infty} \right)$$

L'Hospital's Rule.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ ή $x_0 = \pm\infty$



Απροσδιόριστοι
μορφές

$$\frac{+\infty}{\pm\infty} \quad \text{ή} \quad \frac{0}{0}$$

$$\frac{0}{0} \rightarrow \text{DLH}$$

ή
απροσδ. μορφές

$$\frac{+\infty}{0} \quad \text{ή} \quad \frac{0}{\pm\infty} \quad \left(\begin{array}{l} \frac{1}{0} \rightarrow \infty \\ \frac{0}{1} \rightarrow 0 \end{array} \right)$$

$$\infty \cdot \infty \quad \text{ή} \quad 0 \cdot 0$$

$$\infty \cdot 0 \rightarrow \frac{1}{0} \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$$

(Λυμένο Παράδειγμα Κεφ. XII)

Να βρεθούν όλες
τις περιπτώσεις παραγκυαίως
ολοκληρώσεως

► Παράδειγμα 2.1. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: iii. $\int x^n \ln x \, dx$

Λύση.

$$\int p(x) \cdot \ln x \, dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx = \left[f(x) \cdot g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

$$\int \frac{1}{x^{n+1}} \, dx = \frac{1}{-n} x^{-n} + C = -\frac{1}{n} x^{-n} + C$$

$$\begin{aligned}
 \int x^n \cdot \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' \cdot \ln x \, dx = \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' \cdot \ln x \, dx = \\
 &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x \right] - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\
 &= \frac{x^{n+1} \cdot \ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx = \\
 &= \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

π.χ.

$$\begin{aligned}
 \underline{I} &= \int e^x \cdot \sin x \, dx = \int (e^x)' \cdot \sin x \, dx = \\
 &= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx = \\
 &= e^x \cdot \sin x - \int (e^x)' \cdot \cos x \, dx = \\
 &= e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x + \underbrace{\int e^x \cdot \sin x \, dx}_I \right) = \\
 &= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - I \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$I = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - I \Rightarrow$$

$$I = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(Λυμένο Παράδειγμα Κεφ. XII)

► Παράδειγμα 5.4. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{4}{x^2} \, dx = \int 4x^{-2} \, dx = \frac{4x^{-1}}{-1} + C = -\frac{4}{x} + C$$

► Παράδειγμα 5.4. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2}{x^2 - 2x - 4} dx = \int \frac{2}{x^2 - 2x - 4} dx$$

$$x^2 - 2x - 4 = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Delta = 4 + 16 = 20 \quad \leftarrow \begin{matrix} \sqrt{20} = \\ \sqrt{4 \cdot 5} \end{matrix}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} =$$

$$= \begin{matrix} 1 + \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} \end{matrix}$$

$$\text{άρα } x^2 - 2x - 4 = (x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})$$

$$\frac{2}{x^2 - 2x - 4} = \frac{2}{(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})} = \frac{A}{x - 1 - \sqrt{5}} + \frac{B}{x - 1 + \sqrt{5}}$$

$$2 = A(x - 1 + \sqrt{5}) + B(x - 1 - \sqrt{5})$$

$$\text{Για } x = 1 + \sqrt{5} : 2 = A(1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}) \Rightarrow$$

$$2 = A \cdot 2\sqrt{5} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Για } x = 1 - \sqrt{5} : 2 = B(1 - \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5}) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad B = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \left(\text{ή } -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

Συνολικά έχουμε:

$$\frac{2}{x^2 - 2x - 4} = \frac{\overset{A}{\sqrt{5}/5}}{x - 1 - \sqrt{5}} + \frac{\overset{B}{-\sqrt{5}/5}}{x - 1 + \sqrt{5}}$$

$$\int \frac{2}{x^2 - 2x - 4} dx = \int \frac{\sqrt{5}/5}{x - 1 - \sqrt{5}} dx + \int \frac{-\sqrt{5}/5}{x - 1 + \sqrt{5}} dx$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

βαθμός $P(x) \geq$ βαθμός $Q(x)$

$$P(x) \left| \frac{Q(x)}{\pi(x)} \right. \\ u(x)$$

$$P(x) = Q(x) \cdot \eta(x) + \nu(x)$$

$$\int \frac{T(x)}{R(x)} dx$$

βαθμός $T(x) <$ βαθμός $R(x)$

↓
Ανάλυση κλάσματος.

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \ln|x-1-\sqrt{5}| - \frac{\sqrt{5}}{5} \ln|x-1+\sqrt{5}| + C$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{5}}{x-1+\sqrt{5}} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + C$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$$

$$\int e^{2x+3} dx = \frac{e^{2x+3}}{2} + C$$

(Άλυτη Άσκηση Κεφ. XIII - βλέπε Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου)

1. Η συνάρτηση των οριακών εσόδων μιας μονοπωλιακής επιχείρησης είναι η ακόλουθη:

$$MR(q) = 60 - 2q - 2q^2$$

Αν τα σταθερά έσοδα είναι μηδέν, να βρεθούν:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & 4 \\ \uparrow & & \downarrow \\ q=0 & \rightarrow & Q=4 \end{array}$$

σταθερά έσοδα
60δολ

$$TR(0) = 0$$

- η συνάρτηση των συνολικών εσόδων $TR(q)$
- η συνάρτηση ζήτησης $P_d(q)$
- τα πεδία ορισμού και τιμών της συνάρτησης ζήτησης, δεδομένου ότι η συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί την οικονομική συνθήκη να είναι φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

$$i) TR(Q) = \int 60 - 2Q - 2Q^2 dQ =$$

$$60Q - Q^2 - \frac{2Q^3}{3} + C$$

οφws:

$$TR(0) = 0 \Rightarrow 0 = 60 \cdot 0 - 0^2 + 2 \cdot \frac{0^3}{3} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{C=0}$$

οφws:

$$TR(0) = 0 \Rightarrow 0 = 60 \cdot 0 - 0^2 + 2 \cdot \frac{0^3}{3} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{C=0}$$

Αρα, $TR(Q) = -\frac{2}{3}Q^3 - Q^2 + 60Q$

ii) $P(Q) = \frac{-\frac{2}{3}Q^3 - Q^2 + 60Q}{Q}$ $TR(Q) = P \cdot Q \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(Q) = -\frac{2}{3}Q^2 - Q + 60$$

$$P = \frac{TR(Q)}{Q}$$

iii. τα πεδία ορισμού και τιμών της συνάρτησης ζήτησης, δεδομένου ότι η συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί την οικονομική συνθήκη να είναι φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

ΖΗΤΗΣΗ

$$Q, P > 0$$

$$P(Q) \downarrow$$

$$\text{ή } P'_D(Q) \leq 0$$

ΠΡΟΣΦΟΡΑ

$$Q, P > 0$$

$$P_D(Q) \uparrow$$

$$\text{ή } P'_D(Q) > 0$$

$$P_D(Q) = -\frac{2}{3}Q^2 - Q + 60, P > 0, Q > 0$$

$$P'_D(Q) = -\frac{4}{3}Q - 1 \leq 0 \Rightarrow -4Q \leq -3$$

$$\Rightarrow \boxed{Q \geq \frac{3}{4}} \Rightarrow Q \geq \frac{3}{4}$$

δλδ. Πεδίο ορισμού $Q \in [\frac{3}{4}, +\infty)$

$$\boxed{n > 3} \quad P_D(Q) \downarrow$$

$$P \uparrow \quad \boxed{Q < 6} \Rightarrow$$

$\boxed{Q \geq \frac{3}{4}} \xrightarrow{P_D(Q) \downarrow} \begin{array}{|l|} \hline f \uparrow \quad \alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) \\ \hline f \downarrow \quad \alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta) \\ \hline \end{array}$

$P_D(Q) \leq P_D\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow$

$D \leq P_D(Q) \leq \underbrace{-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4} + 60}_{\text{κύριο μέλος}}$

Επόμενη ερώτηση: Να βρεθούν τα έσοδα από την πώληση των πρώτων 4 μονάδων του προϊόντος.

$$MR(q) = 60 - 2q - 2q^2$$

έσοδα από την πώληση $0 \rightarrow 4$ μονάδων =
 $= \Delta TR \Big|_0^4 = TR(4) - TR(0) = \int_0^4 MR(Q) dQ =$
 $\int_0^4 60 - 2Q - 2Q^2 dQ = \left[60Q - Q^2 - \frac{2}{3}Q^3 \right]_0^4 = \dots$

(Άλυτη Άσκηση Κεφ. XIII - βλέπε Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου)

8. Αν η συνάρτηση του οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι

$$MC(q) = -\frac{100}{q^2} + \frac{1}{4} = TC'$$

και η συνάρτηση του συνολικού κόστους έχει ελάχιστη τιμή 10 νομισματικών μονάδων, να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους της επιχείρησης.

Το συνολικό κόστος έχει ελάχιστη τιμή 10 ν.μ.

άρα υπάρχει Q_0 ώστε

$$TC'(Q_0) = 0 \quad (1)$$

$$TC''(Q_0) > 0 \quad (2) \text{ και}$$

$$TC(Q_0) = 10$$

$$MC = TC'$$

$$(1) \quad TC'(Q_0) = 0 \Rightarrow -\frac{100}{Q_0^2} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{100}{Q_0^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow Q_0^2 = 400 \Rightarrow Q_0 = \pm 20 \text{ ή } Q_0 = 20 \text{ (δεκτή).}$$

απορ.

$$TC''(q) = \left(-\frac{100}{q^2} + \frac{1}{4} \right)' = \frac{200}{q^3}$$

$MC = TC'$

$$TC''(20) = \frac{200}{20^3} > 0$$

Αφού $TC''(20) > 0$ για $Q_0 = 20$ έρρηκε κ. τιμή
όμως το TC γίνεται ελάχιστο με ελάχ.

620 TC

οίμως το TC γίνεται ελάχιστο με $\overline{ελαν}$.
αφού $q = 10$ νομ. μοναδ.

$$\boxed{TC(20) = 10}$$

$$\text{Άρα } TC(Q) = \int MC(Q) dQ = \int \frac{-100}{Q^2} + \frac{1}{4} dQ$$

$$= 100 \int \frac{1}{Q^2} dQ + \int \frac{1}{4} dQ = \frac{100}{Q} + \frac{1}{4} Q + C$$

$$TC(20) = 10 \Rightarrow \frac{100}{20} + \frac{1}{4} 20 + C = 10 \Rightarrow$$

$$5 + 5 + C = 10 \Rightarrow \boxed{C = 0}$$

Τελικά,

$$\boxed{TC(Q) = \frac{100}{Q} + \frac{1}{4} Q}$$