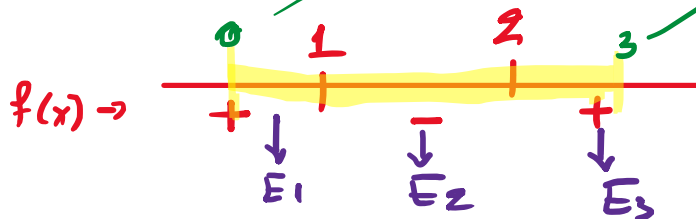


π.χ. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Να βρεθῇ το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται μεταξύ των γραμμών

Βρίσκουμε τις λύσεις της $f(x) = 0$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1} \text{ ή } \boxed{x=2}$$



C_f → $y=0$ → $x \times$
 $x=0$ → $x \times$
 $x=3$ → $x \times$
 ΚΑΤΑΚΟΡ. ΓΡΑΜΜΕΣ

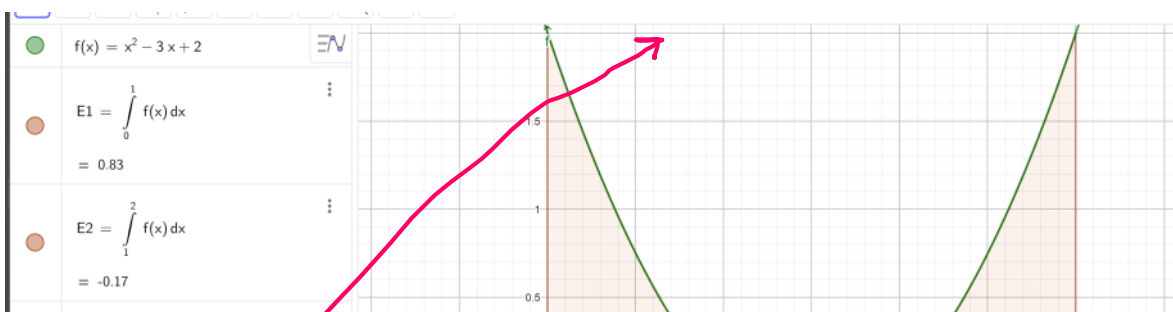
$$E = E_1 + E_2 + E_3 =$$

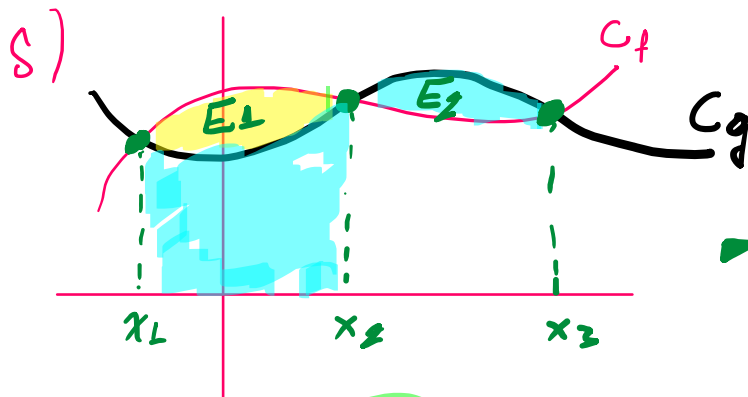
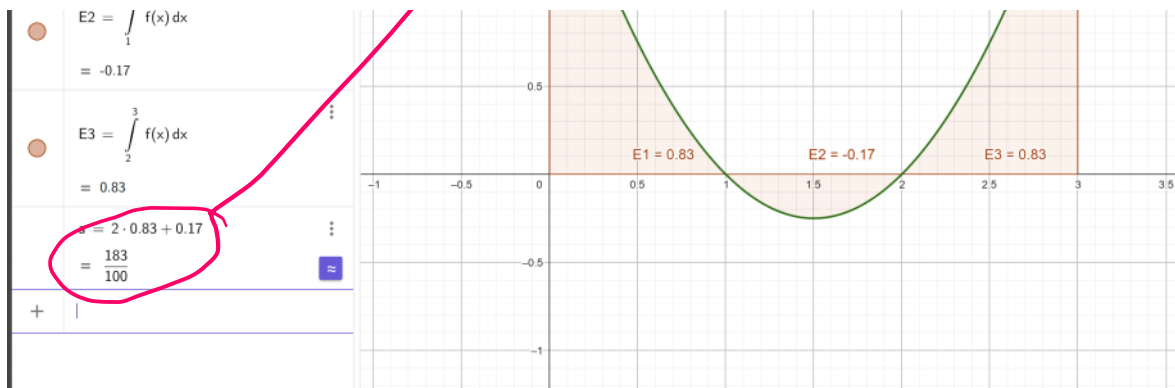
$$= \int_0^1 f(x) dx + \left| \int_1^2 f(x) dx \right| + \int_2^3 f(x) dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 - 3x + 2 dx + \left| \int_1^2 x^2 - 3x + 2 dx \right| + \int_2^3 x^2 - 3x + 2 dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 \right| + \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^3 =$$

$$= \dots = 1.83 \text{ π.φ.}$$



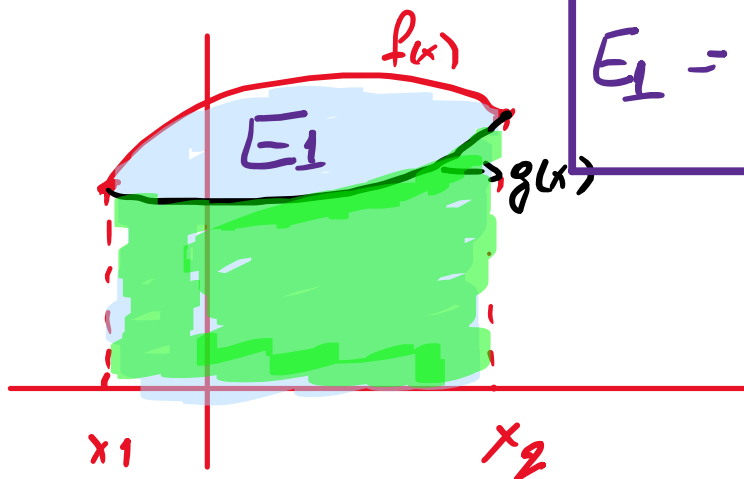


Να υπολογιστεί το εμβαδόν μεταξύ των C_f και C_g .

$f(x) = g(x) \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1, x_2, x_3$
 ...
 άκρα των αλλοτρήσεων

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) dx$$

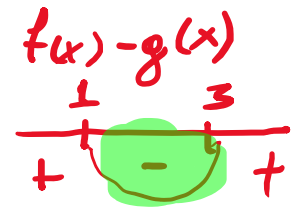


$$E_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx$$

π.χ. Να βρεθεί το εμβαδόν μεταξύ των γραμμών $f(x) = x^2 - 3x + 2$ και $g(x) = x - 1$.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \dots \boxed{x=1} \quad \text{ή} \quad \boxed{x=3}$$

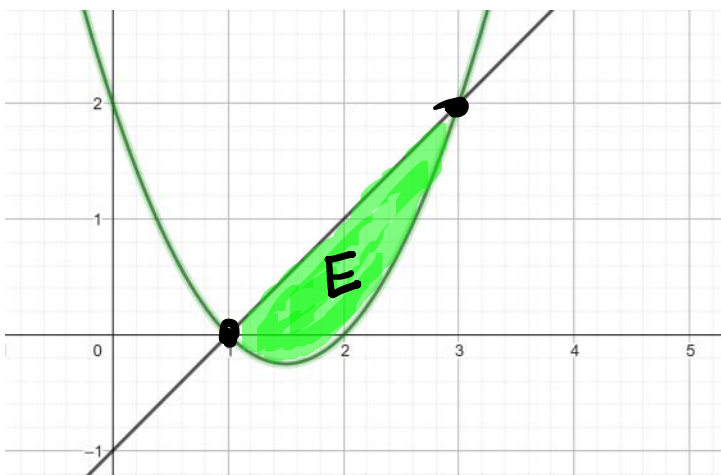


$$E = \left| \int_1^3 \underbrace{f(x) - g(x)}_{x^2 - 4x + 3} dx \right| =$$

$$\left| \int_1^3 x^2 - 4x + 3 \, dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \right| =$$

$$= \left| \left(\cancel{9} - \cancel{18} + \cancel{9} \right) - \left(\frac{1}{3} - \cancel{2} + \cancel{3} \right) \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| =$$

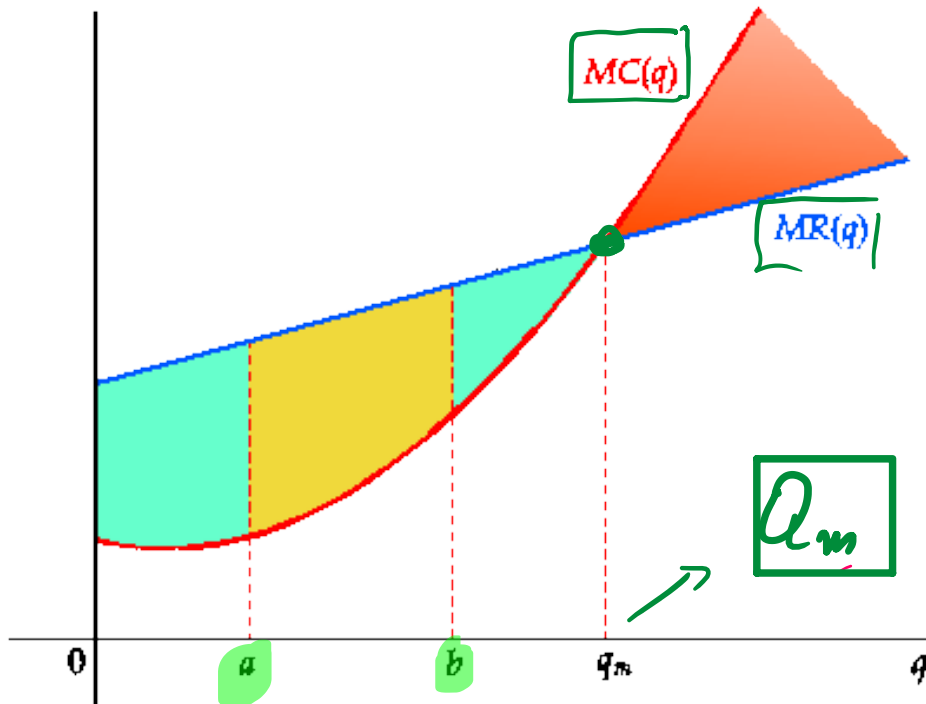
$$= \underline{\underline{\frac{4}{3} \text{ c.f.}}}$$



► **Άσκηση 9.** Οι συναρτήσεις των οριακών εσόδων $MR(q)$ και του οριακού κόστους $MC(q)$ του προϊόντος μιας επιχείρησης είναι σχεδιασμένες στο παρακάτω διάγραμμα. Η επιχείρηση επιθυμεί να γνωρίζει

κόστους $MC(q)$ του προϊόντος μιας επιχείρησης είναι σχετισμένες στο παρακάτω διάγραμμα. Η επιχείρηση επιθυμεί να γνωρίζει

- το συνολικό κέρδος της, αν η παραγωγή του προϊόντος μεταβληθεί από την ποσότητα $q = a$ στην ποσότητα $q = b$
- για ποια τιμή του q μεγιστοποιείται το κέρδος της.



i) Συνολικό κέρδος από $Q=a$ έως $Q=b$

$$\Delta \pi(Q) \Big|_a^b = \pi(b) - \pi(a) =$$

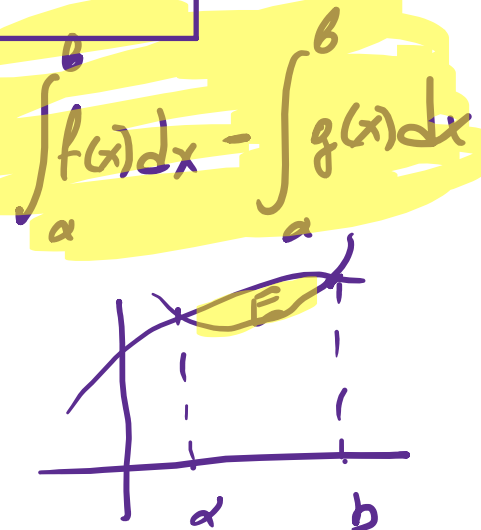
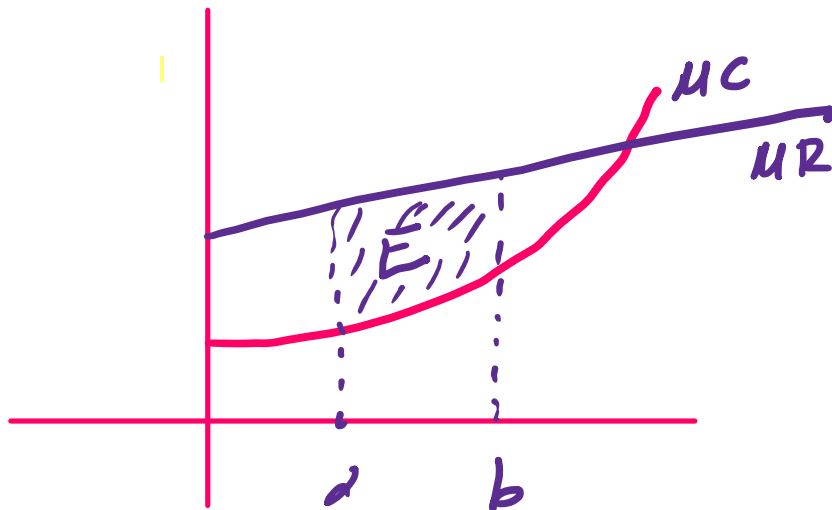
μεταβολή του
κέρδους από
 a έως b .

$$= [TR(b) - TC(b)] - [TR(a) - TC(a)]$$

$$= [TR(b) - TR(a)] - [TC(b) - TC(a)]$$

$$\int_a^b MR(q) dq - \int_a^b MC(q) dq$$

$$\int_a^b MR(Q) dQ - \int_a^b MC(Q) dQ$$



Συνολικό κέρδος από $Q=a$ έως $Q=b$
 ισοϋψι με $\int_a^b MR(Q) dQ - \int_a^b MC(Q) dQ$

ii) Μεγιστοποίηση του κέρδους:

$$\pi'(Q) = 0 \Rightarrow [TR(Q) - TC(Q)]' = 0$$

$$TR'(Q) = TC'(Q) \Rightarrow MR(Q) = MC(Q)$$

εμφάνιση τομής
των MR, MC .

Από το γράφημα παρατηρούμε ότι για $Q=Q_{max}$
 ισχύει $MR(Q_{max}) = MC(Q_{max})$

1. γιατί $MR(Q_m) = MC(Q_m)$ για $Q = Q_m$
 κριτήριο
 συνέπιο.

Αντί το αντίθετο για $Q > Q_m \Rightarrow$

$$MC(Q) > MR(Q) \Rightarrow TC'(Q) > TR'(Q)$$

$$TC'(Q) - TR'(Q) > 0 \Rightarrow -\pi'(Q) > 0$$

$$\boxed{\pi'(Q) < 0} \rightarrow \pi \downarrow$$

Ομοίως για $Q < Q_m \Rightarrow MC(Q) < MR(Q)$

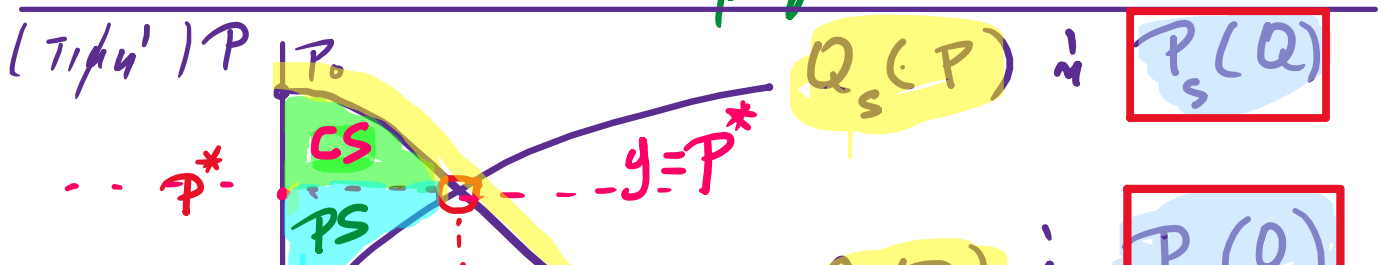
$$\Rightarrow TC'(Q) < TR'(Q) \Rightarrow TC'(Q) - TR'(Q) < 0$$

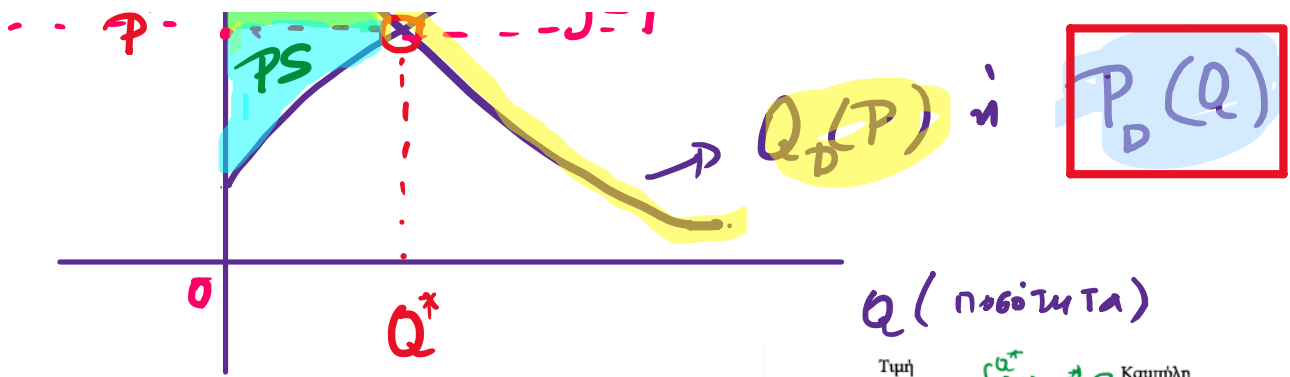
$$\Rightarrow -\pi'(Q) < 0 \Rightarrow \pi'(Q) > 0$$

$$\rightarrow \pi \uparrow$$

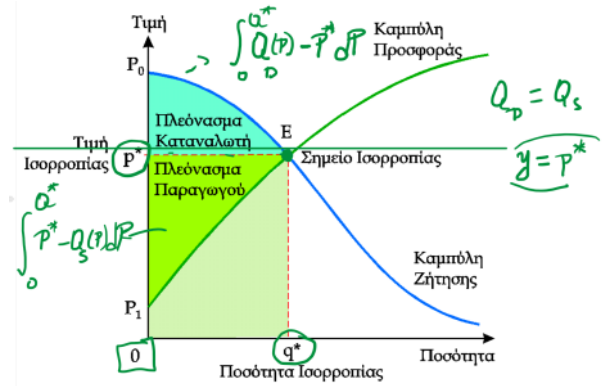
	Q_m		
π'	+	0	-
π	$\nearrow$		$\searrow$

μέγιστο.





Πλεόνασμα καταναλωτή =
 $CS = \int_0^{Q^*} P_D(Q) - P^* dQ =$
 ↓
 consumer surplus



$$= \int_0^{Q^*} P_D(Q) dQ - \int_0^{Q^*} P^* dQ = \int_0^{Q^*} P_D(Q) dQ - P^* [Q]_0^{Q^*}$$

$$\Rightarrow CS = \int_0^{Q^*} P_D(Q) dQ - P^* \cdot Q^*$$

Πλεόνασμα παραγωγού: $PS = \int_0^{Q^*} P^* - P_S(Q) dQ =$

$$= \int_0^{Q^*} P^* dQ - \int_0^{Q^*} P_S(Q) dQ \Rightarrow$$

$$PS = P^* \cdot Q^* - \int_0^{Q^*} P_S(Q) dQ$$

► **Παράδειγμα 7.1.** Να υπολογισθεί το πλεόνασμα καταναλωτή αν

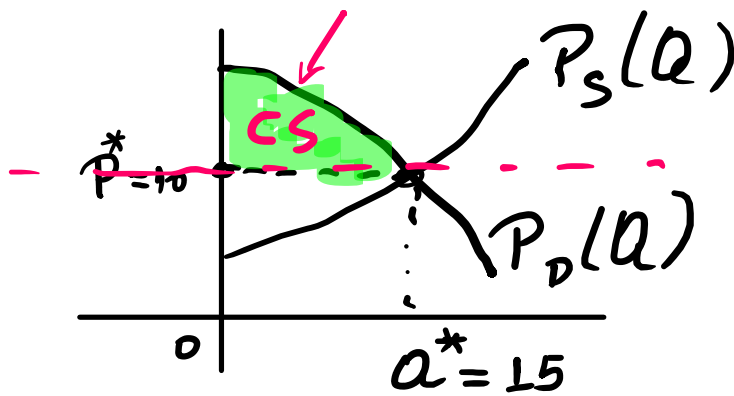
i. $P_d(q) = 40 - 2q$ και στο σημείο ισορροπίας η τιμή πώλησης του αγαθού είναι $p^* = 10$ νομισματικές μονάδες.

ii. $P_d(q) = \frac{100}{q+2}$ και στο σημείο ισορροπίας η τιμή πώλησης του αγαθού είναι $p^* = 20$ νομισματικές μονάδες.

iii. η συνάρτηση ζήτησης είναι $D(p) = \frac{50}{p^2}$ και στο σημείο ισορροπίας η τιμή πώλησης του αγαθού είναι $p^* = 10$ νομισματικές μονάδες.

i) $P_D(Q) = 40 - 2Q$, $P^* = 10$

Υπολογίζω το Q^* , $10 = 40 - 2Q^* \Rightarrow$
 $2Q^* = 30 \Rightarrow \boxed{Q^* = 15}$



$$CS = \int_0^{15} (P_D(Q) - 10) dQ$$

$$= \int_0^{15} 40 - 2Q - 10 dQ = \int_0^{15} 30 - 2Q dQ =$$

$$= [30Q - Q^2]_0^{15} = 450 - 225 = \underline{\underline{225 \text{ v.f.}}}$$

ii) $P_D(Q) = \frac{100}{Q+2}$, $P^* = 20$

$$r^3$$

$$* \dots$$

$$\frac{100}{Q+2} = 20 \Rightarrow Q = 3$$

$$CS = \int_0^3 P(Q) - P^* dQ =$$

$$20 = \frac{100}{Q^*+2} \Rightarrow Q^*+2=5 \Rightarrow Q^*=3$$

$$= \int_0^3 \frac{100}{Q+2} - 20 dQ = \int_0^3 \frac{100}{Q+2} - \int_0^3 20 dQ =$$

$$= 100 \cdot [\ln|Q+2|]_0^3 - 60$$

$$= 100 (\ln 5 - \ln 2) - 60$$

$$= \boxed{100 \ln \frac{5}{2} - 60}$$

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x| + c$$

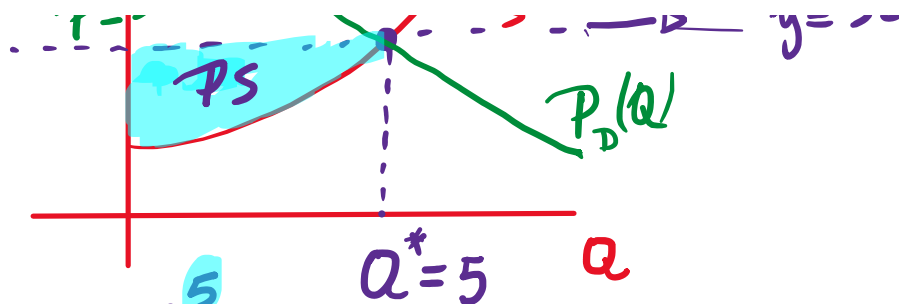
► **Παράδειγμα 7.2.** Να υπολογισθεί το πλεόνασμα παραγωγού αν $P_s(q) = q^2 + 5q$ και αν στο σημείο ισορροπίας της αγοράς, η τιμή πώλησης του αγαθού είναι $p^* = 50$ νομισματικές μονάδες.

$$P^* = 50 \rightarrow 50 = Q^2 + 5Q^* \Rightarrow$$

$$Q^{*2} + 5Q^* - 50 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{Q_1^* = 5} \quad \text{ή} \quad \boxed{Q_2^* = -10} \text{ αηγο.}$$





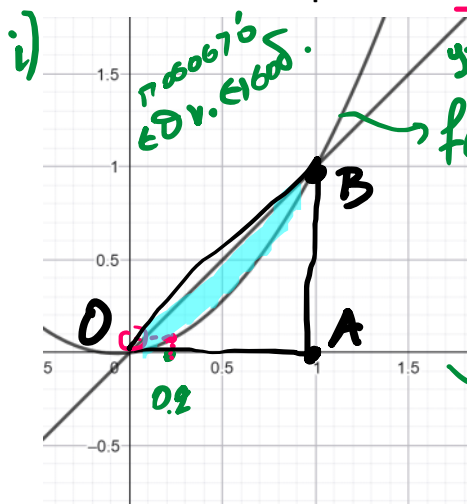
$$PS = \int_0^5 50 - P_D(Q) dQ = 250 - \int_0^5 Q^2 + 5Q dQ =$$

$$= 250 - \left[\frac{Q^3}{3} + 5 \frac{Q^2}{2} \right]_0^5 = \dots = 145.83 \text{ v.f.}$$

► **Παράδειγμα 8.1.** Η κατανομή του εισοδήματος μιας χώρας δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{8}(7x^2 + x)$$

- να κατασκευασθεί η καμπύλη Lorenz
- να βρεθεί ποιο ποσοστό του εθνικού εισοδήματος λαμβάνει το πιο χαμηλά αμειβόμενα 20% του πληθυσμού της χώρας
- να υπολογισθεί ο συντελεστής ανισοκατανομής Gini.



$$f(x) = \frac{1}{8}(7x^2 + x)$$

ii)

$$f(0.2) = \frac{1}{8}(7 \cdot 0.2^2 + 0.2) =$$

$$= 0.06 \text{ ή } \underline{\underline{6\%}}$$

iii)

E_1

E_2

$$\int_0^1 x - f(x) dx$$

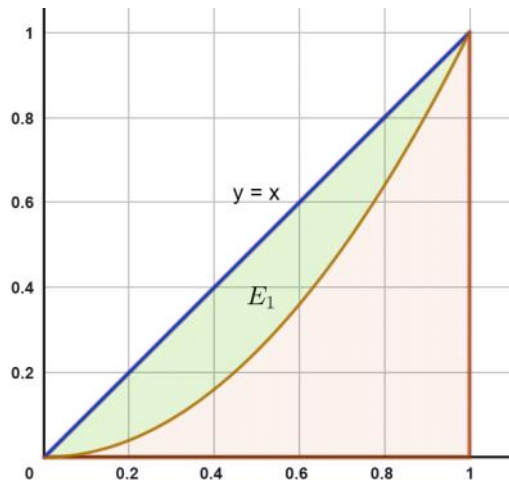
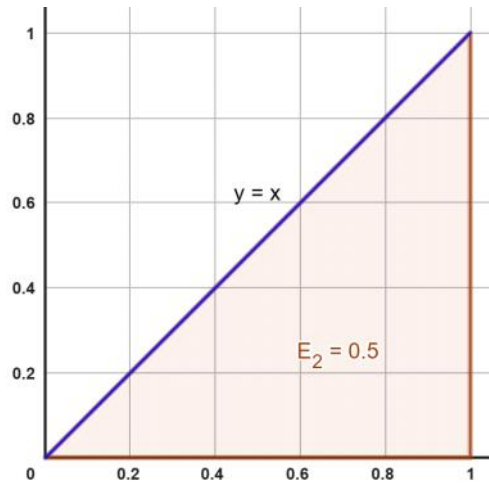
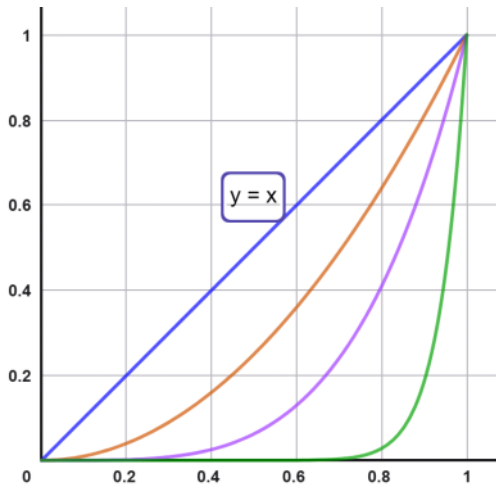
$$= 2 \int_0^1 x - f(x) dx$$

$\rightarrow 1/2$

E_2 $\xrightarrow{\text{εμβαδόν τριγώνου OAB}}$ $1/2$

$= 2 \int_0^1 x - \left(\frac{1}{8} (7x^2 + x) \right) dx = \dots =$

$= \frac{7}{24}$



$$0 \leq \frac{E_1}{E_2} \leq 1$$