ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Το παρόν χρηματοδοτήθηκε στο πλαίσιο του επιχειρησιακού προγράμματος ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ, Υποέργο «Αναμόρφωση Προπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του ΕΚΠΑ», με συγχρηματοδότηση 75% από το ΕΚΤ και 25% από εθνικούς πόρους.

Οδηγός για το λογισμικό MATHEMATICA

Πανεπιστήμιο Αθηνών - Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Αθανασίου Γεώργιος

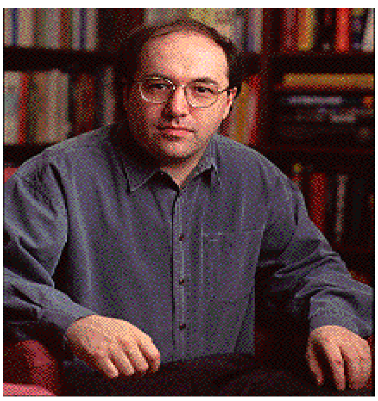
Αθήνα, 2007

<u>Πίνακας περιεχομένων</u>

1. Εισαγωγή

Η ταχύτατη εξέλιξη που συντελέστηκε τα τελευταία 60 έτη στην ανάπτυξη των υπολογιστικών συστημάτων, τόσο στο λογισμικό (software) όσο και στα ηλεκτρονικά μέρη (hardware), έδωσε στους ερευνητές δυνατότητες τις οποίες δύσκολα θα φαντάζονταν στα έτη που προηγήθησαν αυτής της μεγάλης «έκρηξης». Όσον αφορά το λογισμικό, η δυσκολία σήμερα δεν έγκειται στην έλλειψη λογισμικού αλλά μάλλον στην επιλογή του καλύτερου λογισμικού για την διεκπεραίωση μιας εργασίας. Όσο πιο εξειδικευμένη είναι η εργασία αυτή, τόσο πιο δύσκολη είναι η επιλογή του λογισμικού μεταξύ των πολλών που κυκλοφορούν στην αγορά και που διαθέτουν παρόμοιες δυνατότητες. Παρόλο που κανένα πρόγραμμα δεν κυριαρχεί στην αγορά, παρατηρείται μια προτίμηση εκ μέρους των οικονομολόγων για το Mathematica, το Matlab και το Mathcad σε σχέση με άλλες γλώσσες προγραμματισμού (όπως η FORTRAN, η VISUAL BASIC και η C++) λόγω της υψηλού επιπέδου δομής τους, η οποία επιτρέπει στον χρήστη να εκτελεί εκλεπτυσμένες εργασίες – αριθμητικές, συμβολικές και γραφικές – μέσω των πολλών ενσωματωμένων συναρτήσεων που διαθέτουν.

Όσον αφορά το Mathematica, δημιουργός του είναι ο Stephen Wolfram ο οποίος δημοσίευσε το πρώτο του επιστημονικό άρθρο στην ηλικία των 15 ετών και του απονεμήθηκε ο διδακτορικός τίτλος, στο πεδίο της θεωρητικής φυσικής, από το πανεπιστήμιο του Caltech, στην ηλικία των 20 ετών. Το Mathematica έκανε την πρώτη του εμφάνιση στην αγορά το έτος 1988 και είχε σημαντική επίδραση στον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι υπολογιστές στα διάφορα επιστημονικά πεδία.

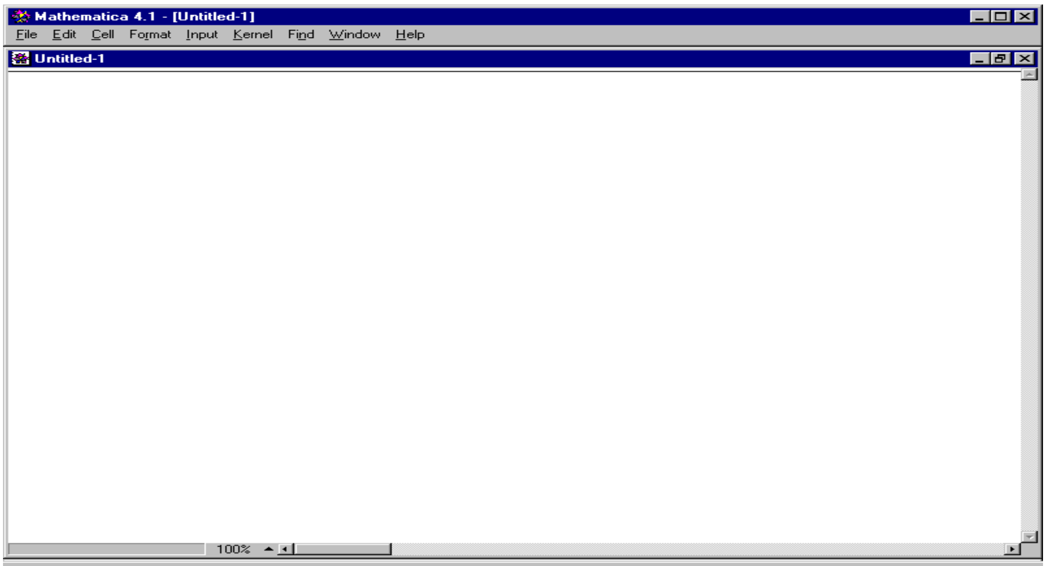


2. Βασικά στοιχεία

Για να βρεθούμε στο «παραθυρικό» περιβάλλον του Mathematica, είτε επιλέγουμε Έναρξη (Start) / Προγράμματα (Programs) / Mathematica, είτε δημιουργούμε ένα shortcut στην επιφάνεια εργασίας και επιλέγουμε το εικονίδιο που εμφανίζεται σε αυτήν.

Η πρώτη εικόνα που αντικρίζουμε, αφού ανοίξουμε το πρόγραμμα, είναι η ακόλουθη:

Πρόσοψη (Frond end)

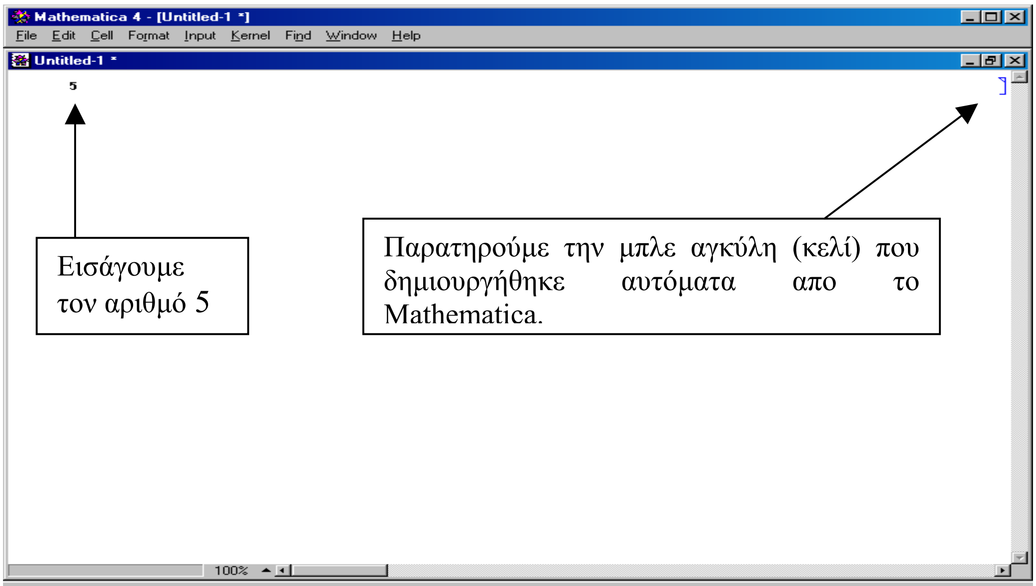


Εικόνα 1

Το Mathematica αποτελείται από δυο μέρη:

- Την **πρόσοψη (Frond end)**
- Τον **πυρήνα (Kernel)**

Η πρόσοψη δέχεται την εισροή, εμφανίζει την εκροή και γενικά οργανώνει την πληροφορία που αφορά τον υπολογισμό. Με άλλα λόγια είναι ο δίαυλος επικοινωνίας του χρήστη με το «μαύρο κουτί» που είναι επιφορτισμένο με την εκτέλεση των εντολών και το οποίο καλείται πυρήνας. Υπάρχουν τρεις τύποι πρόσοψης: Microsoft Windows, Macintosh και Unix. Και στους τρεις τύπους η πληροφορία διακινείται μέσω των λεγόμενων «βιβλίων εργασίας» (Notebooks). Στην εικόνα 1 παρατηρούμε ότι το Mathematica μας ανοίγει αυτόματα ένα βιβλίο εργασίας με την ονομασία Untitled-1. Αν θέλουμε να δώσουμε ένα όνομα σε αυτό το αρχείο και να το σώσουμε, επιλέγουμε File / Save As και στη συνέχεια εισάγουμε το όνομα του αρχείου και τον προορισμό του στον σκληρό δίσκο. Τα βιβλία εργασίας του Mathematica είναι αμφίδρομα (interactive) δομημένα αρχεία τα οποία αποτελούνται από μια ακολουθία κελιών. Κάθε κελί περιλαμβάνει μια παράσταση ενός συγκεκριμένου τύπου, όπως κείμενο ή γράφημα. Στην οθόνη του υπολογιστή η έκταση του κάθε κελιού προσδιορίζεται από μια αγκύλη χρώματος μπλε στην δεξιά πλευρά του παραθύρου. Για παράδειγμα, αν πληκτρολογήσουμε τον αριθμό 5 στην περιοχή του βιβλίου εργασίας, θα δούμε να δημιουργείται ένα μπλε κελί δεξιά του.

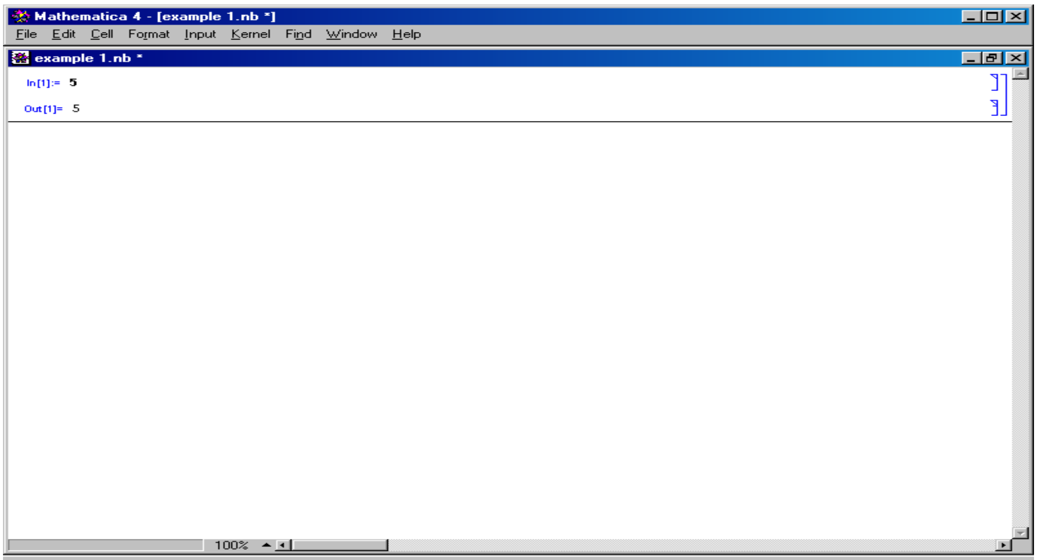


Εικόνα 2

Από τη στιγμή που έχουμε εισάγει μια παράσταση σε ένα κελί, μπορούμε να στείλουμε αυτήν την εισροή στον πυρήνα του Mathematica πιέζοντας το πλήκτρο **Enter** του αριθμητικού πληκτρολογίου. Μέσω ενός πρωτοκόλλου επικοινωνίας, το οποίο καλείται Mathlink, η πληροφορία θα οδηγηθεί στον πυρήνα προς επεξεργασία και ο πυρήνας με τη σειρά του θα επιστρέψει την εκροή / αποτέλεσμα στο βιβλίο εργασίας, με την δημιουργία ενός νέου κελιού μέσα στο οποίο θα βρίσκεται η εκροή / αποτέλεσμα.

Ο πυρήνας (kernel) είναι το τμήμα του προγράμματος το οποίο επεξεργάζεται την πληροφορία και εκτελεί τους υπολογισμούς. Το τμήμα αυτό αποτελείται από αλγόριθμους, άγνωστους στον χρήστη και για αυτό το λόγο μπορεί να χαρακτηριστεί ως το «μαύρο κουτί» του Mathematica.

Η οργάνωση της πληροφορίας στην πρόσοψη επιτυγχάνεται με τις εκφράσεις «In[αριθμός]:=» και «Out[αριθμός]=». Με τις εκφράσεις αυτές, οι οποίες δημιουργούνται αυτόματα από το Mathematica, επιτυγχάνεται η πλήρης «χαρτογράφηση» του βιβλίου εργασίας. Αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι επιτρέπει στον χρήστη να καλέσει κάποιο κελί οποτεδήποτε χρειαστεί την πληροφορία που βρίσκεται εντός του. Η εμφάνιση των εκφράσεων «In[αριθμός]:=» και «Out[αριθμός]=» επιτυγχάνεται με την ενεργοποίηση ενός κελιού. Η ενεργοποίηση αυτή πραγματοποιείται, όπως προείπαμε, με την επιλογή του πλήκτρου Enter στο αριθμητικό πληκτρολόγιο. Για παράδειγμα, εάν πληκτρολογήσουμε τον αριθμό 5 και στη συνέχεια πατήσουμε το πλήκτρο Enter τότε θα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:



Εικόνα 3

Στην εικόνα 3 μπορούμε να δούμε ότι το Mathematica ονόμασε την εισροή 5 In[1] και μας επέστρεψε ως εκροή τον αριθμό 5 δίνοντας της το όνομα Out[1]. Σε αυτή την απλή περίπτωση, εισαγάγαμε έναν αριθμό και το Mathematica μας επέστρεψε ως εκροή τον ίδιο αριθμό. Εάν θέλουμε να αλλάξουμε γραμμή κατά την διάρκεια του προγραμματισμού μας, χωρίς να ενεργοποιήσουμε το κελί στο οποίο εισάγουμε την πληροφορία, χρησιμοποιούμε το πλήκτρο Enter που βρίσκεται στο βασικό πληκτρολόγιο. Με αυτό το τρόπο μπορούμε να επιτύχουμε καλύτερη οπτική επαφή με την εισροή μας αλλά και μεγαλύτερη συνοχή στο πρόγραμμα μας. Συνοψίζοντας:

In[αριθμός]:= $\Rightarrow$ Πληροφορία που φεύγει από το βιβλίο εργασίας με προορισμό τον πυρήνα

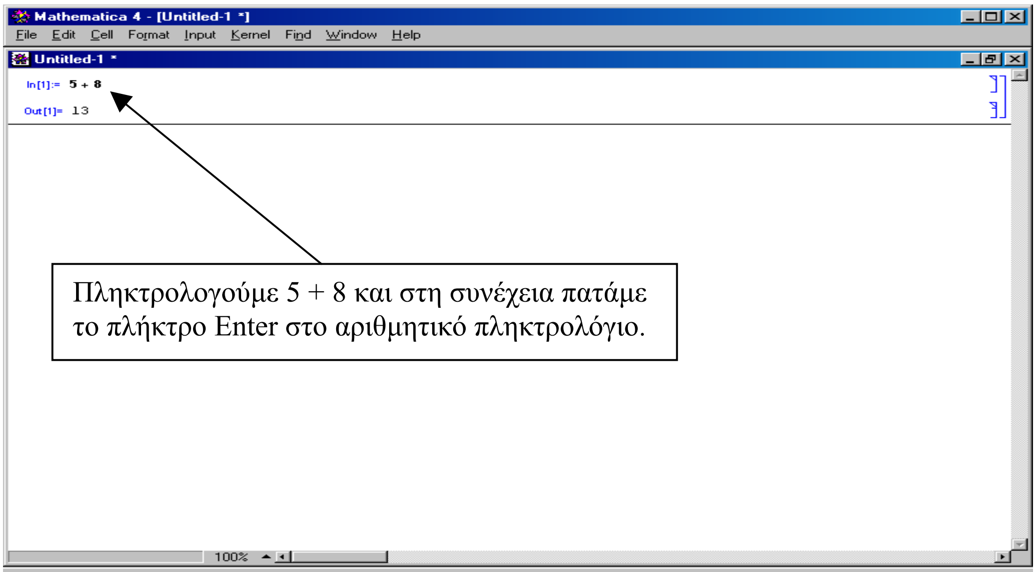
Out[αριθμός]= $\Rightarrow$ Πληροφορία που φεύγει από τον πυρήνα με προορισμό το βιβλίο εργασίας.

3. Εκτέλεση βασικών πράξεων της αριθμητικής

Το Mathematica εκτελεί τις 5 βασικές πράξεις της αριθμητικής με τη χρήση των χαρακτήρων που βρίσκονται μέσα στην παρένθεση:

1. Πρόσθεση (+)
2. Αφαίρεση(-)
3. Πολλαπλασιασμός (* ή SPACE)
4. Διαίρεση (/)
5. Δύναμη (^)

✓ Παράδειγμα 1: Υποθέτουμε ότι θέλουμε να βρούμε το άθροισμα των αριθμών 5 και 8.



Εικόνα 4

Ο χειριστής έχει τη δυνατότητα της εκτέλεσης πράξεων ανάμεσα σε εκροές. Η δυνατότητα αυτή αποκτά μεγάλη σημασία σε περιπτώσεις που οι εκροές είναι πολύπλοκες εκφράσεις.

In[1]:= 986565321514512151 51 (και πατάμε το πλήκτρο **Enter** στο αριθμητικό πληκτρολόγιο)

Out[1]= 98656532151451215151

In[2]:= 21654654365378566556 (και **Enter**)

Out[2]= 21654654365378566556

In[3]:= Out[1]+Out[2] (και **Enter**)

Out[3]= 120311186516829781707

Εναλλακτικά, εάν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε σε μια διαδικασία το τελευταίο, το προτελευταίο, και το n-προηγούμενο αποτέλεσμα, τότε χρησιμοποιούμε το σύμβολο %, %% και % … % n φορές αντίστοιχα.

In[4]:= 6 (και **Enter**)

Out[4]= 6

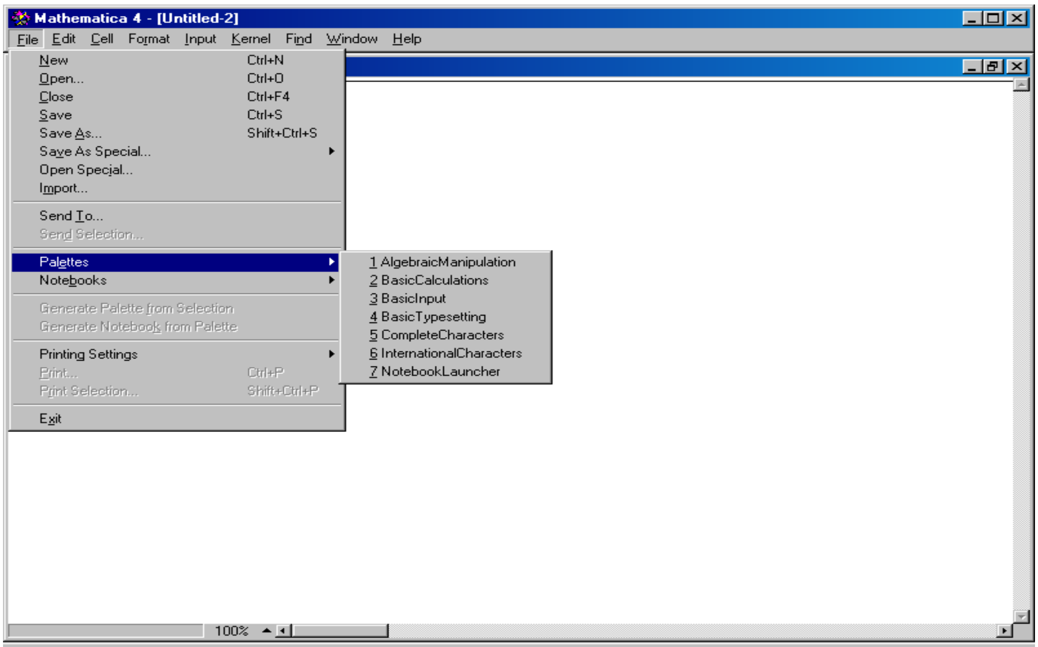
In[5]:= 8 (και **Enter**)

Out[5]= 8

In[6]:= % + %% (και **Enter**)

Out[6]= 14

Το Mathematica διαθέτει διάφορες παλέτες, οι οποίες διευκολύνουν το χρήστη στην εισαγωγή των μαθηματικών συμβόλων που απαιτούνται για τον υπολογισμό της έκφρασης που εισάγει. Η εμφάνιση της παλέτας γίνεται με την επιλογή File/Palettes και στη συνέχεια την επιλογή της παλέτας που μας ενδιαφέρει. Οι διαθέσιμες παλέτες είναι οι εξής: 1.Algebraic Manipulation, 2.Basic Calculations, 3.Basic Input 4.Basic Typesetting, 5.Complete Characters, 6.International Characters, και 7.Notebook Launcher. Η εφαρμογή της παλέτας μοιάζει αρκετά με την εφαρμογή του *Equation Editor*, του λογισμικού *Word*.



Εικόνα 5

Προσεγγιστικοί υπολογισμοί

Ένας απλός υπολογιστής τσέπης εκτελεί όλους τους υπολογισμούς με κάποια συγκεκριμένη ακρίβεια, π.χ. 10 δεκαδικών ψηφίων. Με το Mathematica, συνήθως, μπορούμε να πάρουμε ακριβή αποτελέσματα.

✓ Παράδειγμα 2: Υποθέτουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το πηλίκο 5/3.

Το Mathematica αντιμετωπίζει εκφράσεις όπως η 5/3 ως σύμβολα (εν προκειμένω, στο σύστημα των ρητών αριθμών) και δεν τις προσεγγίζει αριθμητικά. Με άλλα λόγια, διατηρεί τη συμβολική μορφή έτσι ώστε να έχουμε την μέγιστη δυνατή ακρίβεια στους υπολογισμούς μας. Για να λάβουμε την προσεγγιστική αριθμητική τιμή μιας έκφρασης χρησιμοποιούμε τις παρακάτω μεθόδους:

1. Έκφραση//**N** ή **N[**έκφραση**]**, όπου η προσέγγιση γίνεται αυτόματα από το Mathematica.
2. **SetPrecision[**έκφραση, αριθμός δεκαδικών ψηφίων**]**, όπου η προσέγγιση γίνεται με την ακρίβεια που επιθυμεί ο χρήστης.

In[7]:=5/3 (και **Enter)**

Out[7]= $\frac{5}{3}$

In[8]:=N[5/3] (και **Enter)**

Out[8]=1.66667

In[9]:=SetPrecision[5/3,10] (και **Enter)**

Out[9]=1.666666667

4. Εισαγωγή βασικών μαθηματικών σταθερών

Οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες μαθηματικές σταθερές εισάγονται στο Mathematica με τον ακόλουθο τρόπο:

Πίνακας 1

Μαθηματική σταθερά	**Mathematica**
π	Pi
e	E
$i = \sqrt{-1}$	I
∞	Infinity
$-\infty$	-Infinity
$\frac{\pi}{180}$	Degree

Όλοι οι ανωτέρω συμβολισμοί μπορούν να εισαχθούν στο Notebook είτε με απευθείας πληκτρολόγηση, είτε με τη χρήση της παλέτας 3 (Basic Input). Στην δεύτερη περίπτωση, ο χρήστης εισάγει τους χαρακτήρες που επιθυμεί επιλέγοντας τα αντίστοιχα κομβία που ανήκουν στη συγκεκριμένη παλέτα.

5. Βασικές συναρτήσεις

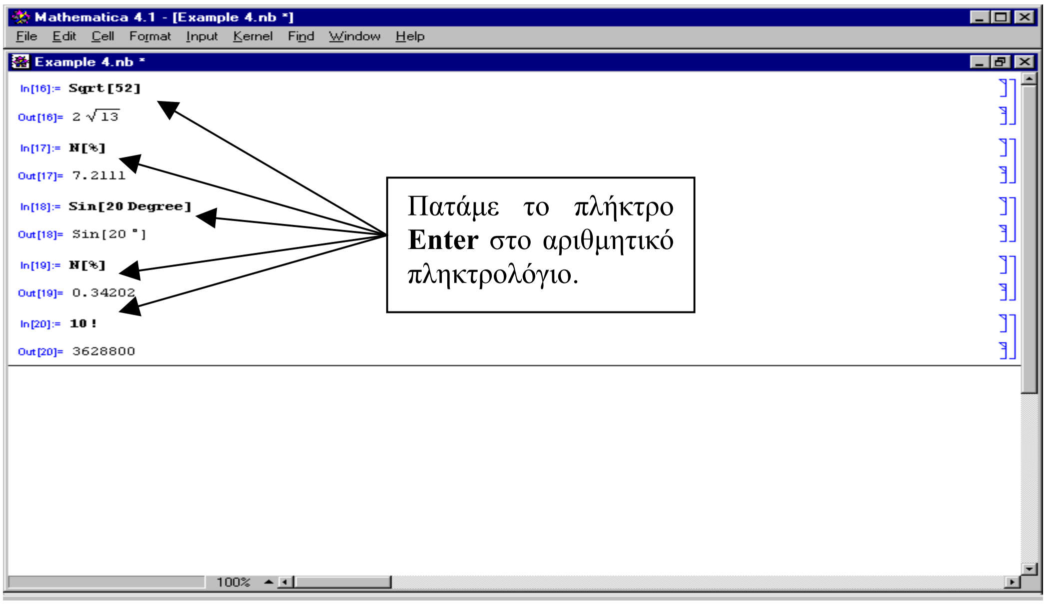
Το Mathematica προσφέρει μια πληθώρα έτοιμων (ενσωματωμένων) συναρτήσεων, εκ των οποίων θα γίνει αναφορά στις πλέον χρησιμοποιούμενες. Για το σκοπό αυτό δημιουργήσαμε ένα πίνακα όπου η πρώτη στήλη περιέχει την μαθηματική έκφραση, η δεύτερη στήλη περιέχει την αντίστοιχη εντολή στο Mathematica και η τρίτη στήλη περιέχει τον εναλλακτικό τρόπο εισαγωγής μιας συναρτήσεως με τη χρήση της παλέτας.

Πίνακας 2

Μαθηματική έκφραση	**Έκφραση στο Mathematica**	**Παλέτα** (κωδικός)
$\|x\|$	**Abs[x]**	**-**
$\sqrt{x}$	**Sqrt[x]**	$\sqrt{\ }$ **(3)**
e^x	**Exp[x]**	**Exp[ ](2)**
$\ln_e x$	**Log[x]**	**Log[ ] (2)**
$\ln_a x$	**Log[α, x]**	**Log[10,] (2)**
ημ(x)	**Sin[x]**	**Sin[ ] (2)**
συν(x)	**Cos[x]**	**Cos[ ] (2)**
εφ(x)	**Tan[x]**	**Tan[ ] (2)**
τοξημ(x)	**ArcSin[x]**	**ArcSin[ ] (2)**
τοξσυν(x)	**ArcCos[x]**	**ArcCos[ ] (2)**
τοξεφ(x)	**ArcTan[x]**	**ArcTan[ ] (2)**
n!	**Factorial[n] ή n!**	**-**
Τυχαίοι αριθμοί	**Random[]**	**-**

<u>Προσοχή!!!</u> Οι σταθερές και οι συναρτήσεις του Mathematica ξεκινούν πάντοτε με κεφαλαίο γράμμα.

✓ <u>Παράδειγμα 3</u>: Υπολογίσατε i) $\sqrt{52}$, ii) Sin[20^0], iii) 10!



<u>Εικόνα 6</u>

6. Αντικατάσταση συμβόλων από αριθμητικές τιμές

Αν θέλουμε να δώσουμε συγκεκριμένη αριθμητική τιμή, για παράδειγμα τη τιμή 10, σε ένα χαρακτήρα, έστω τον x, τότε πληκτρολογούμε *x = 10* και πατάμε το Enter στο αριθμητικό πληκτρολόγιο. Πιο συγκεκριμένα, ο τελεστής (=) καλείται «Set operator» και ορίζει ότι οποιοδήποτε σύμβολο, το οποίο βρίσκεται αριστερά από αυτόν, θα ισούται εφεξής με οποιοδήποτε αριθμό ή σύμβολο βρίσκεται δεξιά από αυτόν.

✓ Παράδειγμα 4:

In[10]:= x=12

Out[10]=12

In[11]:=x

Out[11]=12

In[12]:=x+5

Out[12]=17

Προσοχή!!! Οφείλουμε να είμαστε αρκετά προσεκτικοί ως προς τις ονομασίες που επιλέγουμε για τις μεταβλητές και τις συναρτήσεις μας. Δεν πρέπει να δίνουμε το ίδιο όνομα σε δυο (ή περισσότερες) αριθμητικές τιμές διότι το Mathematica θα εκλάβει ως «ορθή τιμή» την πιο πρόσφατη και θα αγνοήσει τις προηγούμενες. Για να ελέγξουμε εάν έχουμε ήδη δώσει αριθμητική τιμή σε κάποιο χαρακτήρα, σε κάποιο πρωθύστερο στάδιο του προγραμματισμού μας, είτε πληκτρολογούμε τον χαρακτήρα και πατάμε Enter, είτε πληκτρολογούμε **?**Χαρακτήρας και πατάμε Enter. Ο τελεστής (**?**) μας δίνει πληροφορίες για χαρακτήρες και συναρτήσεις.

✓ Παράδειγμα 5:

In[13]:= x=10 (+Enter)

Out[13]=10

In[14]:= ?x (+Enter)

Out[14]=Global `x

x=10

Επίσης, ένα άλλο πρόβλημα που μπορεί να προκύψει, είναι η αυτόματη αντικατάσταση της αριθμητικής τιμής στα σημεία του προγράμματος όπου επιθυμούμε συμβολικό υπολογισμό. Αν για παράδειγμα ο χειριστής επιθυμεί να υπολογίσει την παράγωγο της συνάρτησης f(x) = x^2 και σε κάποιο πρωθύστερο στάδιο έχει δηλώσει ότι x = 10, τότε το αποτέλεσμα θα είναι μηδέν αντί του ορθού 2x, διότι το Mathematica θα υπολογίσει την παράγωγο σταθεράς.

Για να «καθαρίσουμε» από τη μνήμη του Mathematica την αριθμητική τιμή που έχουμε δώσει σε κάποιο χαρακτήρα, σε κάποιο πρωθύστερο στάδιο του προγραμματισμού μας, χρησιμοποιούμε την εντολή **Clear[Χαρακτήρας]** ή τον τελεστή Unset (=**.**). Εάν οι αριθμητικές τιμές που θέλουμε να «καθαρίσουμε» είναι περισσότερες από μια τότε χρησιμοποιούμε την εντολή **Clear[Χαρακτήρας1, Χαρακτήρας2,…]**. Τέλος, με την εντολή **Clear["@"]** «καθαρίζουμε» την μνήμη του Mathematica από όλες τις αριθμητικές τιμές που έχουμε αντιστοιχίσει σε διάφορους χαρακτήρες.

7. Ορισμός συνάρτησης από τον χρήστη

Εκτός από τις ενσωματωμένες συναρτήσεις, το Mathematica επιτρέπει στο χειριστή του να ορίσει τις δικές του συναρτήσεις. Για να ορίσουμε μια συνάρτηση πρέπει καταρχάς να αποφασίσουμε για τους χαρακτήρες που θα παριστούν το όνομα της συναρτήσεως μας (στην ορολογία του Mathematica καλείται Head) καθώς και της μεταβλητής(ων) αυτής. Ο γενικός κανόνας ορισμού μιας συναρτήσεως, μιας μεταβλητής, είναι:

Χαρακτήρας1[Χαρακτήρας2_] := Συνάρτηση (σε όρους του Χαρακτήρα 2)

Ο χαρακτήρας (_) στην ορολογία των υπολογιστών καλείται «Underscore» ενώ στην ορολογία του Mathematica καλείται «Blank operator» και σημαίνει «οτιδήποτε». Στη περίπτωση μας, η συνδυασμένη χρήση του Χαρακτήρα2 και του Blank operator υποδηλώνει ότι ο χαρακτήρας2 μπορεί να είναι είτε αριθμός, είτε σύμβολο, είτε άλλη συνάρτηση. Άρα από τη στιγμή που ο χρήστης ορίσει τη συνάρτηση μπορεί να αντικαταστήσει την έκφραση (Χαρακτήρας2_) με ότι αυτός επιθυμεί και το πρόγραμμα να αντικαταστήσει, στη συνέχεια, αυτόματα την επιλογή του στην (Συνάρτηση).

Το σύμβολο (**:=**) στην ορολογία του Mathematica καλείται «SetDelayed operator». Ο τελεστής αυτός ορίζει ότι η αντιστοίχηση της Χαρακτήρας1[Χαρακτήρας2_] (αριστερή πλευρά) στην Συνάρτηση(δεξιά πλευρά) θα καθυστερήσει εώς ότου εμφανιστεί αργότερα στο πρόγραμμα ο Χαρακτήρας1. Όταν αυτός εμφανιστεί τότε, αυτόματα, η αριστερή πλευρά αντικαθίσταται από την δεξιά πλευρά. Εάν παραλείψουμε το σύμβολο (**:**) τότε θα λάβουμε τον τελεστή «Set» ο οποίος ορίζει την άμεση αντιστοίχηση της αριστερής πλευράς στην δεξιά.

✓ Παράδειγμα 6:

In[15]:= x=10 (και **Enter**)

Out[15]= 10

In[16]:= y:=5 (και **Enter** => Δεν παράγει Out)

In[17]:= y +5 (και **Enter**)

Out[17]= 10

✓ <u>Παράδειγμα 7</u>: Έστω ότι θέλουμε να εισάγουμε στο Mathematica τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Στη περίπτωση αυτή, ο Χαρακτήρας1 είναι το γράμμα f και ο Χαρακτήρας2 είναι το γράμμα x. Εάν θέλουμε να εισάγουμε γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου τότε επιλέγουμε File/Palettes/3BasicInput. Για την εισαγωγή της συναρτήσεως έχουμε δυο επιλογές:

A. Χρησιμοποιούμε το πληκτρολόγιο και εισάγουμε:
f[x_]:=x^2-3*x+4 ή f[x_]:=x^2-3 x+4.
(Το σύμβολο * και το SPACE δηλώνουν πολλαπλασιασμό).

B. Χρησιμοποιούμε την παλέτα 3BasicInput και πιο συγκεκριμένα το σύμβολο που αντιστοιχεί στη δύναμη.

Για την εισαγωγή μιας συναρτήσεως πολλών μεταβλητών η εντολή είναι:

Χαρακτήρας1[Χαρακτήρας2 , Χαρακτήρας3 ,…] := Συνάρτηση

✓ <u>Παράδειγμα 8</u>: Υποθέτουμε ότι θέλουμε να εισάγουμε στο Mathematica τη συνάρτηση $f(K,L) = 10K^{0.3}L^{0.7}$. Η εντολή είναι:

In[18]:= f[k_,l_]:=10*(k^0.3)*(l^0.7)

Αφού έχουμε εισάγει την συνάρτηση και έχουμε στείλει την πληροφορία για τον ορισμό της στο kernel (πατώντας το πλήκτρο **Enter**), μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα k, l με συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Για παράδειγμα, αν k=3 και l=8 τότε

In[19]:= f[3,8] (και Enter)

Out[19]= 65.7501

<u>Προσοχή!!!</u> Ο χρήστης, σε κάθε στάδιο του προγραμματισμού του, πρέπει να είναι βέβαιος ότι ο χαρακτήρας (ή οι χαρακτήρες) που πρόκειται να χρησιμοποιήσει για τον ορισμό μιας συνάρτησης, δεν έχει χρησιμοποιηθεί σε κάποιο πρωθύστερο στάδιο.

Διακλαδωτές συναρτήσεις

Για να ορίσουμε διακλαδωτές συναρτήσεις στο Mathematica χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **Which**.

Which[Συνθήκη1, Τύπος1, Συνθήκη2, Τύπος 2, …]

✓ Παράδειγμα 9: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής θέλει να εισάγει την συνάρτηση:

$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ Cos(x) & x\geq 0 \end{cases}$. Η εντολή είναι:

In[20]:= Clear[x] (και Enter => Δεν παράγει Out)

In[21]:= f[x_]:=Which[x<0, x^2+1, x>=0, Cos[x]] (και Enter => Δεν παράγει Out)

In[22]:= f[-1] (+Enter)

Out[22]= 2

8. Αλγεβρικοί χειρισμοί

Το Mathematica προσφέρει έτοιμες εντολές για την διευκόλυνση του χειριστή στη διαχείριση πολύπλοκων μαθηματικών εκφράσεων. Μερικές από αυτές είναι:

- **Expand[Έκφραση]**: Η εντολή αυτή αναπτύσσει τα γινόμενα και τις δυνάμεις (θετικές και ακέραιες) της μαθηματικής εκφράσεως εντός των αγκυλών.

✓ Παράδειγμα 10:

In[23]:= Clear[e] (και **Enter**)

In[24]:= e = ((x-1)^2 *(x+2))/((x+1)*(x-3)^2) (και **Enter**)

Out[24]= $\frac{(-1+x)^2(2+x)}{(-3+x)^2(1+x)}$

In[25]:= Expand[e] (και **Enter**)

Out[25]= $\frac{2}{(-3+x)^2(1+x)}-\frac{3x}{(-3+x)^2(1+x)}+\frac{x^3}{(-3+x)^2(1+x)}$

Παρατηρούμε ότι στον παρονομαστή δεν έχει αναπτυχθεί πλήρως η έκφραση. Για την περαιτέρω ανάπτυξη της έκφρασης, ο χειριστής πρέπει να χρησιμοποιήσει την εντολή **ExpandAll**.

In[26]:=ExpandAll[e] (και **Enter**)

Out[26]= $\frac{2}{9+3x-5x^2+x^3}-\frac{3x}{9+3x-5x^2+x^3}+\frac{x^3}{9+3x-5x^2+x^3}$

- **Together[Έκφραση]**: Η εντολή αυτή δημιουργεί μια παράσταση με κοινό παρονομαστή.

✓ Παράδειγμα 11:

In[27]:=Together[%] (όπου το % είναι ισοδύναμο με το Out[26]) (+**Enter**)

Out[27]= $\frac{2-3x+x^3}{9+3x-5x^2+x^3}$

- **Apart[Έκφραση]**: Η εντολή αυτή χωρίζει την παράσταση σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

✓ Παράδειγμα 12:

In[28]:=Apart[%] (όπου το % είναι ισοδύναμο με το Out[27]) (και **Enter**)

Out[28]= $1+\frac{5}{(-3+x)^2}+\frac{19}{4(-3+x)}+\frac{1}{4(1+x)}$

➢ **Factor[Έκφραση]**: Η εντολή αυτή παραγοντοποιεί εκφράσεις.

✓ Παράδειγμα 13:

In[29]:=Factor[%] (όπου το % είναι ισοδύναμο με το Out[28]) (και **Enter**)

Out[29]= $\frac{(-1+x)^2(2+x)}{(-3+x)^2(1+x)}$

➢ **Simplify[Έκφραση]**: Η εντολή αυτή πραγματοποιεί μια σειρά αλγεβρικών μετασχηματισμών της εκφράσεως και επιστρέφει την απλούστερη μορφή από αυτές που βρίσκει.

✓ Παράδειγμα 14:

In[30]:= Simplify[$-108+108x+45x^2-40x^3-10x^4+4x^5+x^6$] (+**Enter**)

Out[30]= $(-2+x^2)(-1+x)(3+x)^3$

Επίσης, υπάρχει η εντολή **FullSimplify** η οποία πραγματοποιεί μια ευρύτερη σειρά αλγεβρικών μετασχηματισμών.

➢ **Collect[Έκφραση, Χαρακτήρας]**: Η εντολή αυτή συγκεντρώνει τους όρους της έκφρασης που περιέχουν τον Χαρακτήρα και στη συνέχεια τον βγάζει κοινό παράγοντα.

✓ Παράδειγμα 15:

In[31]:= Collect[x+4y+5xy, x] (και **Enter**)

Out[31]= 4y+x(1+5y)

➢ **Part[Έκφραση, Αριθμός]** ή **Έκφραση[[Αριθμός]]**: Η εντολή μας επιτρέπει να επιλέξουμε έναν όρο από μια έκφραση.

✓ Παράδειγμα 16:

In[32]:= Part[x+4y+5xy, 1] (και **Enter**)

Out[32]= x

9. Διαφορικός λογισμός

Όρια πραγματικών συναρτήσεων

Για να υπολογίσουμε με τη βοήθεια του Mathematica το όριο μιας πραγματικής συναρτήσεως f(x): R→R, του x τείνοντος στο x_0 εισάγουμε την εντολή:

Limit[Έκφραση, x→x_0]

Το σύμβολο (→) μπορεί να εισαχθεί με δυο τρόπους:

A. Πληκτρολογώντας μια παύλα (-) και στη συνέχεια μια αριστερή ανισότητα(>)

B. Πατώντας το αντίστοιχο κομβίον στην παλέτα 3 (Basic Input)

✓ Παράδειγμα 17: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής επιθυμεί τον υπολογισμό του ορίου

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+4}.$$

In[33]:=Limit[(2*x^2-5*x+3)/(x^2+4), x->Infinity] (και **Enter**)

Out[33]=2

Για να υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης χρησιμοποιούμε τις εντολές:

Limit[Συνάρτηση, x→x_0, Direction→1] : όταν προσεγγίζουμε το x_0 από κάτω.

Limit[Συνάρτηση, x→x_0, Direction→-1] : όταν προσεγγίζουμε το x_0 από πάνω.

In[34]:=Limit[1/x, x→0, Direction→1] (και **Enter**)

Out[34]= -Infinity

Παράγωγοι

Για να υπολογίσουμε με τη βοήθεια του Mathematica τη παράγωγο πρώτης τάξης μιας συνάρτησης f ως προς μια μεταβλητή x εισάγουμε την εντολή:

D[Συνάρτηση, Μεταβλητή]

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παλέτα 3 (Basic Input) και πιο συγκεκριμένα το σύμβολο ∂.

Για να υπολογίσουμε τη παράγωγο ανώτερης τάξης μιας συνάρτησης f ως προς μια μεταβλητή x εισάγουμε την εντολή:

D[Συνάρτηση, {Μεταβλητή, Τάξη}]

Για να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο μιας συνάρτησης f ως προς ορισμένες εκ των μεταβλητών της, εισάγουμε την εντολή:

D[f[x1,x2,…], x1, x2, …]

✓ Παράδειγμα 18: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής επιθυμεί τον υπολογισμό της παραγώγου πρώτης τάξης της συνάρτησης $f(x)=x^2+5x$. Υπάρχουν δυο τρόποι να υπολογιστεί η παράγωγος.

Α. Ο χειριστής μπορεί πρώτα να ορίσει τη συνάρτηση και στη συνέχεια να υπολογίσει τη παράγωγο.

In[35]:=Clear[f,x]

In[36]:=f[x_]:=x^2+5*x

In[37]:= D[f[x],x] ή f ‘[x]

Out[37]=2x+5

Β. Ο χειριστής μπορεί να εισάγει απευθείας τη συνάρτηση στην εντολή D

In[38]:= D[x^2+5*x, x]

Out[38]=2x+5

✓ Παράδειγμα 19: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής επιθυμεί τον υπολογισμό της μερικής παραγώγου f_{xy} της συνάρτησης $f(x,y)=x^2y+xy^2$.

In[39]:= D[x^2y+xy^2, x, y] (τη δύναμη την εισάγουμε με τη χρήση της παλέτας 3)

Out[39]=2x+2y

Διαφορικό

Για να υπολογίσουμε το ολικό διαφορικό df, μιας συνάρτησης f, εισάγουμε την εντολή **Dt[Συνάρτηση]**.

✓ Παράδειγμα 20: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής θέλει να υπολογίσει το ολικό διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y,z)=xy^2+z^3$.

In[40]:= Dt[xy^2+z^3]

Out[40]=y^{2}Dt[x]+2xyDt[y]+3z^{2}Dt[z]

Ολοκλήρωση συναρτήσεων

Ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης f πραγματοποιείται με την εισαγωγή της εντολής:

Integrate[Συνάρτηση, Μεταβλητή]

Εναλλακτικά, εισάγουμε το σύμβολο $\int$ από την παλέτα 3.

Ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης f πραγματοποιείται με την εισαγωγή της εντολής:

Integrate[Συνάρτηση, {Μεταβλητή, κάτω άκρο, άνω άκρο}]

Εναλλακτικά, εισάγουμε το σύμβολο $\int_{*}^{*}$ από την παλέτα 3.

Ο υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος μιας συνάρτησης f πραγματοποιείται με την εισαγωγή της εντολής:

Integrate[Συνάρτηση, {Μεταβλητή1, κάτω άκρο1, άνω άκρο1}, {Μεταβλητή2, κάτω άκρο2, άνω άκρο2}]

Εναλλακτικά, εισάγουμε το σύμβολο $\int_{*}^{*}\int_{*}^{*}$ από την παλέτα 3.

✓ Παράδειγμα 21: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής θέλει να υπολογίσει το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\int_{-1}^{2}\int_{x}^{x^2} xy^2dydx$.

In[41]:= Integrate[x*y^2,{y,x,x^2},{x,-1,2}]

Out[41]= 337/40

In[42]:=N[%]

Out[42]= 8.425

Εάν η εντολή Integrate αποτύχει στο να επιλύσει αναλυτικά ένα ορισμένο ολοκλήρωμα, τότε μπορούμε να ζητήσουμε από το Mathematica να το υπολογίσει προσεγγιστικά (με αριθμητικές μεθόδους) με τις ακόλουθες εντολές:

NIntegrate[Συνάρτηση, {Μεταβλητή, κάτω άκρο, άνω άκρο}]

NIntegrate[Συνάρτηση, {Μεταβλητή1, κάτω άκρο1, άνω άκρο1},{Μεταβλητή2, κάτω άκρο2, άνω άκρο2}]]

10. Επίλυση εξίσωσης-συστήματος εξισώσεων

Η επίλυση μιας εξίσωσης στο Mathematica πραγματοποιείται με την εισαγωγή της ακόλουθης εντολής:

Solve[Αριστερή πλευρά της εξίσωσης = = Δεξιά πλευρά της εξίσωσης, μεταβλητή]

Δεν είναι απαραίτητο η δεξιά πλευρά της εξίσωσης να είναι μηδέν.

Προσοχή!!! Το ένα ίσον δηλώνει αντικατάσταση ενώ τα δυο ίσον δηλώνουν ισότητα.

✓ Παράδειγμα 21: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής επιθυμεί να επιλύσει την εξίσωση $x^2 + 2x - 7 = 0$.

In[43]:=Solve[x^2+2*x = = 7, x] (και **Enter**)

Out[43]= $\{\{ x \to -1 - 2\sqrt{2} \},\{ x \to -1 + 2\sqrt{2} \}\}$

In[44]:=N[%] (και **Enter**)

Out[44]= $\{\{ x \to -3.82843 \},\{ x \to 1.82843 \}\}$

Τα σύμβολα { και } στην ορολογία του Mathematica καλούνται λίστες (lists) και συντελούν στη δημιουργία συνόλων από εκφράσεις. Στο παράδειγμα 21 η απάντηση που έδωσε το Mathematica αποτελεί το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης που του ζητήθηκε να επιλύσει.

Μπορούμε να εκτελέσουμε διάφορες πράξεις με τις λίστες:

- Πρόσθεση
- Πολλαπλασιασμός
- Τετραγωνική ρίζα
- Εσωτερικό γινόμενο
- Ένωση

✓ Παράδειγμα 22: Έστω ότι a={1,2} και b={3,4}.

In[45]:=a*b (και **Enter**)

Out[45]= {3,8}

In[46]:= a .b (εσωτερικό γινόμενο) (και **Enter**)

Out[46]= 11

In[47]:= Join[a,b] (και **Enter**)

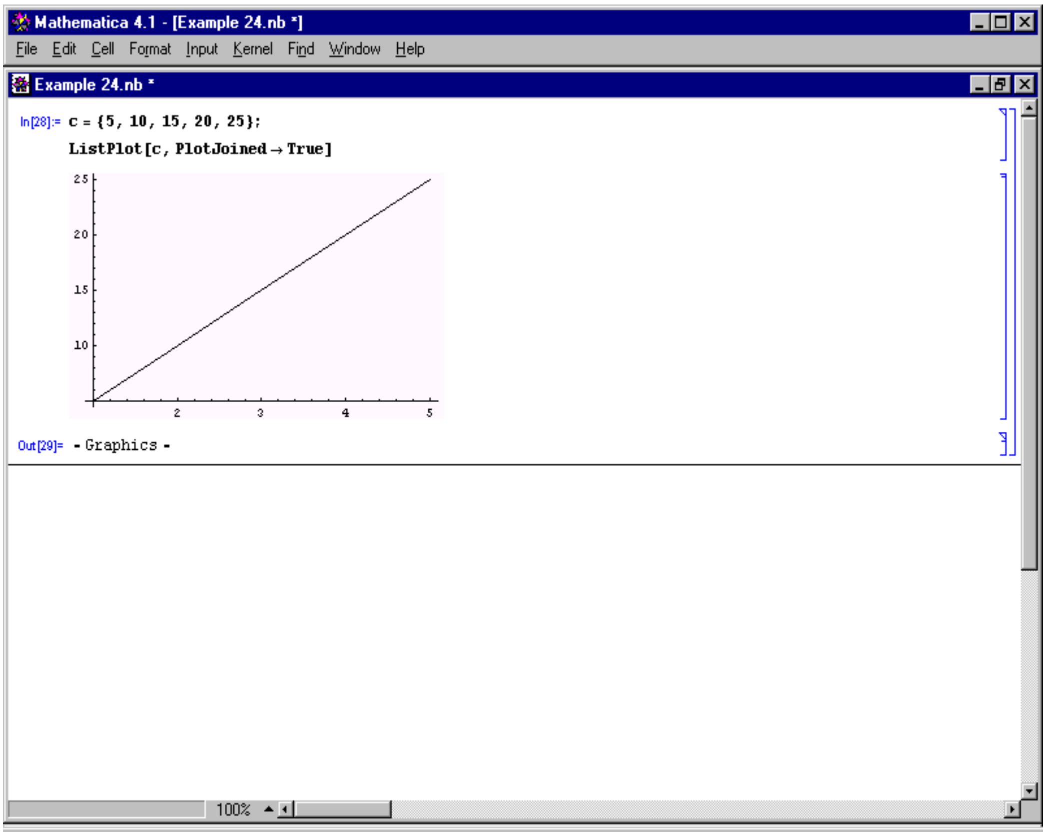
Out[47]= {1,2,3,4}

Τέλος, μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας λίστας με την εντολή **ListPlot[Όνομα λίστας]**.

✓ <u>Παράδειγμα 23</u>: Έστω η λίστα c={5, 10, 15, 20, 25}. Η εντολή ListPlot εμφανίζει σε ένα γράφημα τα σημεία (1,5), (2,10), (3,15), (4,20), (5,25). Εάν θέλουμε να ενώσουμε τα σημεία αυτά με μια γραμμή θα πρέπει να τροποποιήσουμε την εντολή ως εξής:

ListPlot[c , PlotJoined->True]

Το αποτέλεσμα θα είναι:



<u>Εικόνα 7</u>

Έστω ότι ο χειριστής επιθυμεί να επαληθεύσει τις λύσεις της δοθείσας εξίσωσης. Για το σκοπό αυτό πρέπει να αντικαταστήσει την μεταβλητή x με τις τιμές $-1-2\sqrt{2}$ και $-1+2\sqrt{2}$ για να ελέγξει αν όντως επαληθεύουν την δοθείσα εξίσωση. Η αντικατάσταση μεταβλητών από αριθμητικές τιμές στο Mathematica πραγματοποιείται με δυο τρόπους:

Α. Εάν έχουμε εισάγει τη συνάρτηση, τότε απλά αντικαθιστούμε το σύμβολο που έχουμε ορίσει ως μεταβλητή, με την επιθυμητή αριθμητική τιμή.

Β. Εισάγουμε την έκφραση **/. {μεταβλητή→τιμή}** στο τέλος της παράστασης εντός της οποίας επιθυμούμε να γίνει η αντικατάσταση.

✓ Παράδειγμα 24:

In[48]:=Clear[f,x] (και **Enter**)

In[49]:= f[x]:=x+1(και **Enter**)

In[50]:= f[5] (και **Enter**)

Out[50]= 6

In[51]:= y+1/.y->5(και **Enter**)

Out[51]= 6

In[52]:= z+w/.{z->5,w->4} (Συνάρτηση πολλών μεταβλητών) (και **Enter**)

Out[52]= 9

Επίλυση συστημάτων εξισώσεων

Για την επίλυση συστημάτων εισάγουμε την ακόλουθη εντολή:

Solve[{Εξίσωση1,Εξίσωση2,…},{Μεταβλητή1,Μεταβλητή2,…}]

✓ Παράδειγμα 25: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής επιθυμεί να επιλύσει το συστήμα

$$\begin{cases} 3\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 1 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}.$$

In[53]:= Clear[x] (και **Enter**)

In[54]:= Solve[{3*x+2*y= =1,6*x+4*y= =2},{x,y}](και **Enter**)

Out[54]= Solve:: svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$\{\{\mathrm{x} \to \frac{1}{3} - \frac{2y}{3}\}\}$

Επίλυση εξίσωσης-συστήματος εξισώσεων με αριθμητικές μεθόδους

Το Mathematica αδυνατεί να επιλύσει αναλυτικά αρκετές εξισώσεις και συστήματα εξισώσεων. Σε αυτές τις περιπτώσεις το Mathematica παρέχει στο χειριστή αριθμητικές μεθόδους, όπως η Newton-Rapson, για την επίλυση τους.

✓ Παράδειγμα 26: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής θέλει να επιλύσει την $3x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 1 = 0$.

Αρχικά επιχειρούμε να τη λύσουμε με την εντολή Solve.

In[55]:=Clear[x] (και **Enter**)

In[56]:=Solve[3*x^5+3*x^4-2*x^3+4*x^2-1= =0,x] (και **Enter**)

Out[56]= Solve::"eqf" $3x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 1$ is not a well-formed equation"

Αυτό σημαίνει ότι το Mathematica αδυνατεί να επιλύσει την εξίσωση αναλυτικά. Προσθέτοντας το γράμμα N (λατινικοί χαρακτήρες) μπροστά από την εντολή Solve παίρνουμε την αριθμητική προσέγγιση της (των) λύσης (λύσεων).

In[57]:=NSolve[3*x^5+3*x^4-2*x^3+4*x^2-1= =0,x] (και **Enter**)

Out[57]={{x→-1.76893},{x→-0.438492},{x→0.356919-0.862115i},{x→0.356919-0.862115i},{x→0.493595}}

Στη περίπτωση που αποτύχει και η Nsolve, εισάγουμε την ακόλουθη εντολή:

FindRoot[Εξίσωση,{Μεταβλητή, Αρχική τιμή}]

In[58]:=Clear[x] (και **Enter**)

In[59]:=f[x_]:=x^2-Sin[x]-3 (και **Enter**)

In[60]:=Solve[f[x]= =0,x] (και **Enter**)

Out[60]= Solve::tdep:

The equations appear to involve the variables to
be solved for in an essentially non-algebraic way.

In[61]:=Nsolve[f[x]= =0,x] (και **Enter**)

Out[61]= Solve::tdep:

The equations appear to involve the variables to
be solved for in an essentially non-algebraic way.

In[62]:=FindRoot[f[x]= =0,{x,-2}] (και **Enter**)

Out[62]= x→-1.41831

Η ακρίβεια των υπολογισμών μπορεί να καθοριστεί από τον χειριστή με την εισαγωγή της επιλογής WorkingPrecision στην εντολή FindRoot:

FindRoot[Εξίσωση,{Μεταβλητή, Αρχ. τιμή},WorkingPrecision→Αριθμός]

Η εύρεση της αρχικής τιμής προκύπτει από το γράφημα της f.

11. Γραφικές παραστάσεις

<u>Δυο διαστάσεις</u>

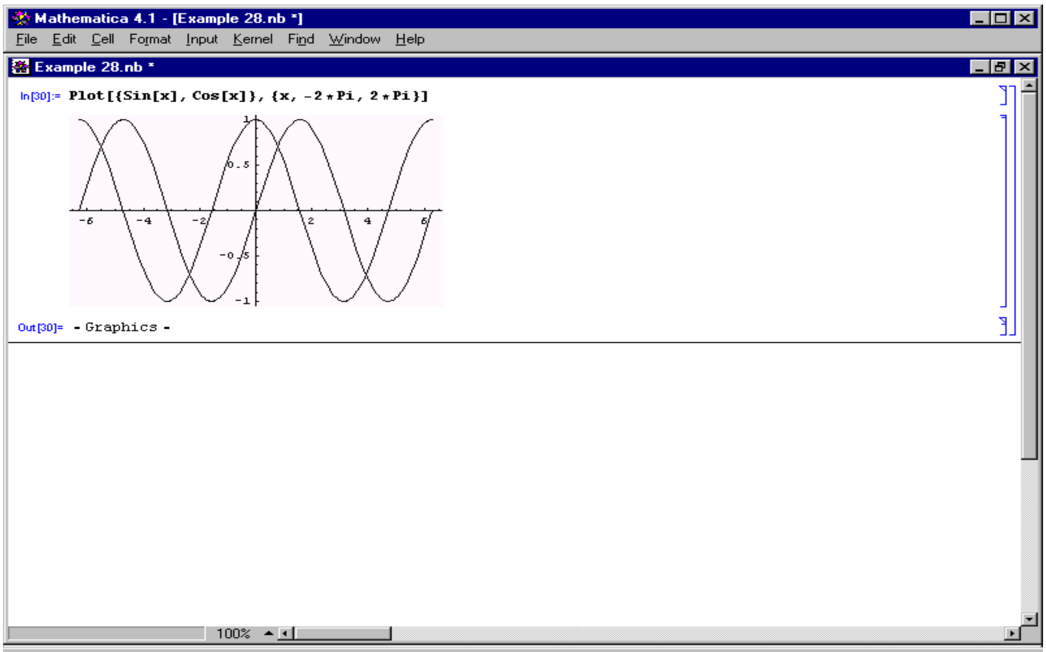
Η βασική εντολή για τη δημιουργία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f(x), στο διάστημα [a,b], είναι:

Plot[Συνάρτηση, {μεταβλητή, κάτω άκρο, άνω άκρο}]

Για τη σχεδίαση πολλών γραφικών παραστάσεων σε ένα γράφημα, η παραπάνω εντολή τροποποιείται ως εξής:

Plot[{Συνάρτηση1,Συνάρτηση2,…}, {μεταβλητή, κάτω άκρο, άνω άκρο}]

✓ <u>Παράδειγμα 27</u>: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής θέλει να σχεδιάσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=Sin(x), για το διάστημα [-2π, 2π], και στη συνέχεια να σχεδιάσει, στο ίδιο γράφημα, τη γραφική παράσταση της g(x)=Cos(x), για το ίδιο διάστημα.



<u>Εικόνα 8</u>

Η εντολή Plot μπορεί να δεχθεί επιπλέον επιλογές πέραν αυτών που αφορούν στην συνάρτηση και στο διάστημα. Τις επιλογές αυτές μπορούμε να τις δούμε αν εισάγουμε την εντολή Options[Plot] και πατήσουμε Enter.

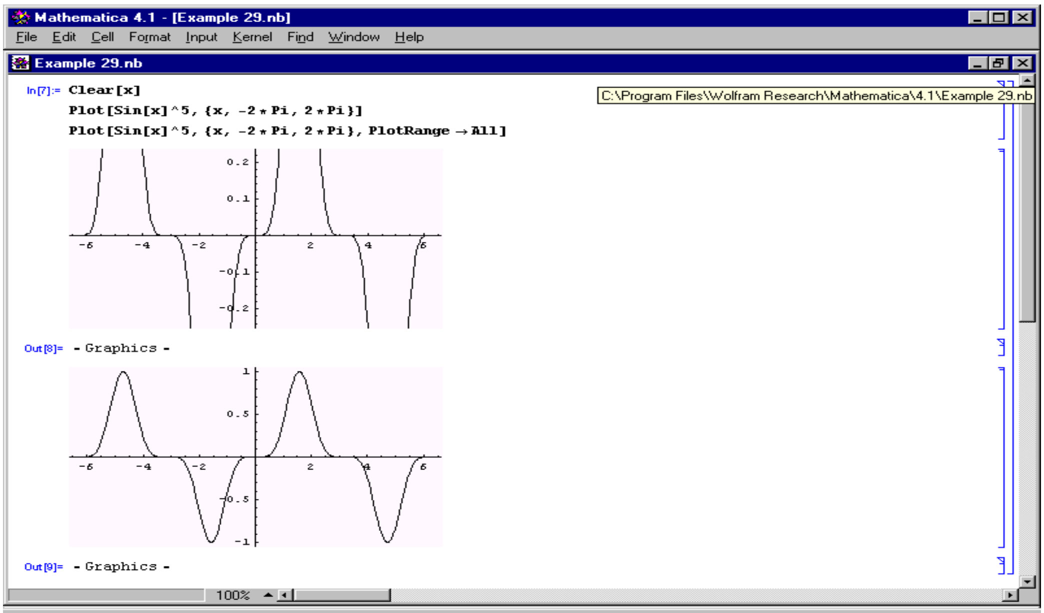
In[63]:=Options[Plot] (και **Enter**)

Out[63]= {AspectRatio→(1/GoldenRatio), Axes→Automatic, AxesLabel→None, AxesOrigin→Automatic, AxesStyle→Automatic, Background→Automatic, ColorOutput→Automatic, Compiled→True, DefaultColor→Automatic, Epilog→{}, Frame→False, FrameLabel→None, FrameStyle→Automatic, FrameTicks→Automatic, GridLines→None, ImageSize→Automatic, MaxBend→10., PlotDivision→30., PlotLabel→None, PlotPoints→25, PlotRange→Automatic, PlotRegion→Automatic, PlotStyle→Automatic, Prolog→{}, RotateLabel→True, Ticks→Automatic, DefaultFont→$DefaultFont, DisplayFunction→$DisplayFunction, FormatType$→FormatType, TextStyle→$TextStyle}

Πιο αναλυτικά:

- Η επιλογή **PlotRange** ρυθμίζει το διάστημα κίνησης της συνάρτησης στο κάθετο άξονα και παίρνει τρεις τιμές:
  - Automatic (default value)
  - All
  - {-a, a}

✓ Παράδειγμα 28: Η γραφική παράσταση της $f(x)=Sin^5(x)$ στο διάστημα [-2π,2π] είναι:

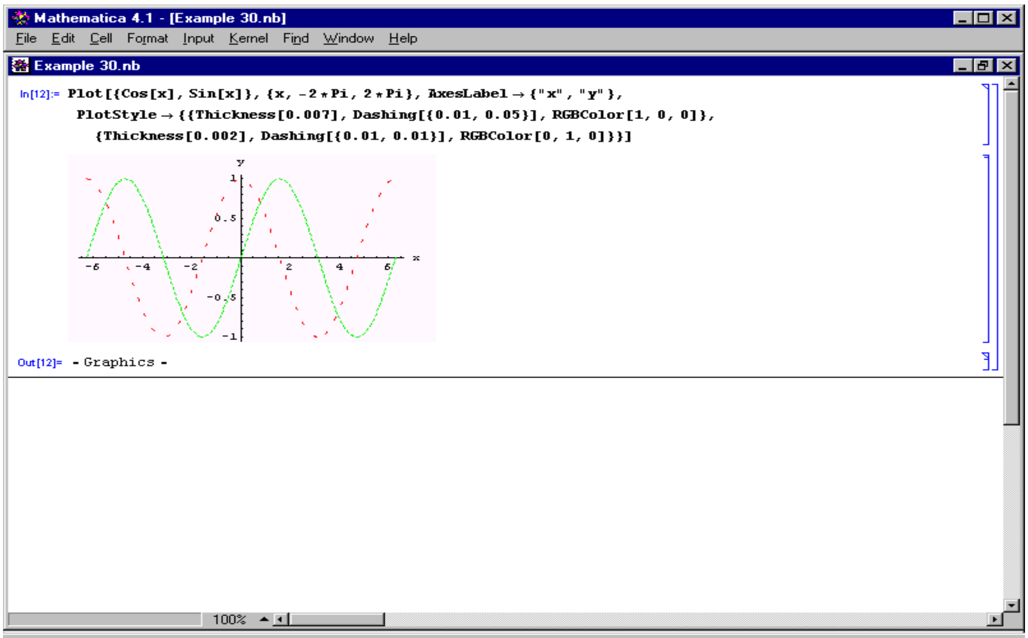


Εικόνα 9

Παρατηρούμε ότι ενώ κάποια κομμάτια της γραφικής παράστασης δεν εμφανίζονται στο πρώτο γράφημα, η επιλογή PlotRange→All επέτρεψε την εμφάνιση τους στο δεύτερο γράφημα.

- Η επιλογή **AspectRatio** ρυθμίζει το πηλίκο $^{Υψος}/_{Πλάτος}$ (αναλογία των αξόνων) του γραφήματος και παίρνει τρεις τιμές:
  - 1/Golden Ratio (Default για γραφήματα στον δισδιάστατο χώρο)
  - Automatic (Default για γραφήματα στον τρισδιάστατο χώρο)
  - a
- Η επιλογή **PlotLabel**→**" "** εισάγει σχόλια που αφορούν όλο το γράφημα.
- Η επιλογή **AxesLabel**→**{"οριζόντιος άξονας", "κατακόρυφος άξονας"}** εισάγει ονομασίες στους άξονες.
- Η επιλογή **PlotStyle**→**{Dashing[{a,b}], Thickness[c]}** δίνει τη δυνατότητα στο χειριστή να ελέγξει το μήκος του στίγματος (0<a<1), το μήκος της απόστασης μεταξύ των στιγμάτων (0<b<1) καθώς και το πάχος του στίγματος (0<c<1).
- Η επιλογή **RGBColor[a,b,c]** εισάγει χρώμα στη γραφική παράσταση. Το a ($0 \le a \le 1$) αντιστοιχεί στην ποσότητα κόκκινου χρώματος που θέλουμε να εισάγουμε, το b ($0 \le b \le 1$) αντιστοιχεί στην ποσότητα πράσινου χρώματος που θέλουμε να εισάγουμε και το c ($0 \le c \le 1$) αντιστοιχεί στην ποσότητα μπλε χρώματος που θέλουμε να εισάγουμε.

✓ Παράδειγμα 29:



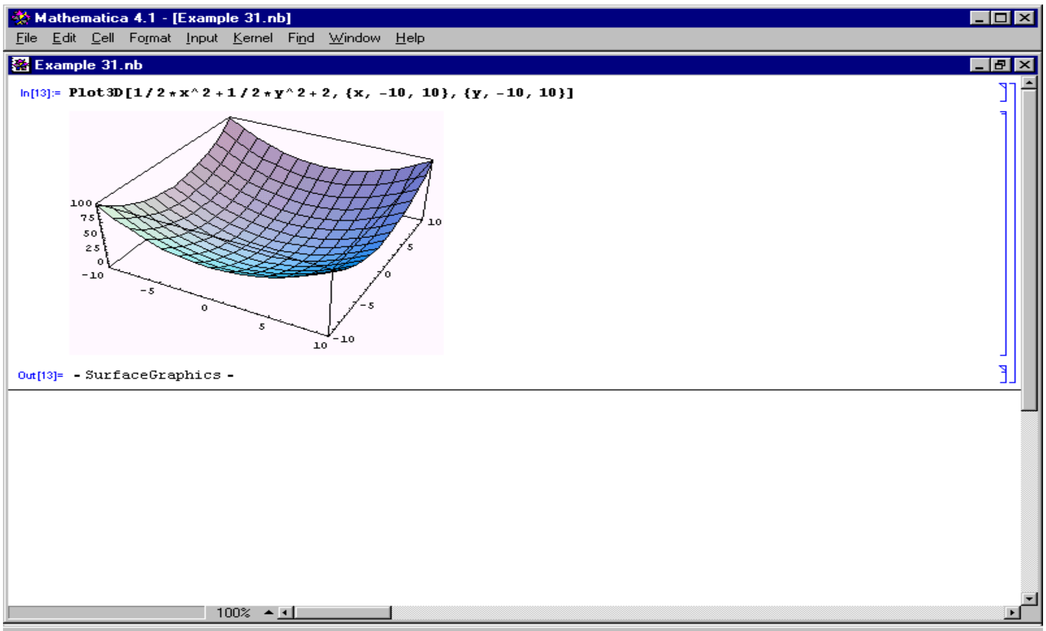
Εικόνα 10

Τρισδιάστατες γραφικές παραστάσεις

Η βασική εντολή για τη δημιουργία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f(x,y), στο διάστημα [a,b], είναι:

Plot3D[Συνάρτηση, {μεταβλητή1, κάτω άκρο1, άνω άκρο1}, {μεταβλητή2, κάτω άκρο2, άνω άκρο2}]

✓ Παράδειγμα 30: Υποθέτουμε τη συνάρτηση $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+2$. Η γραφική της παράσταση είναι:



Εικόνα 11

Όπως στη περίπτωση των δισδιάστατων γραφημάτων, τα τρισδιάστατα γραφήματα έχουν επιπλέον επιλογές. Για να δούμε τις επιλογές αυτές, εισάγουμε την εντολή Options[Plot3D] και πατάμε **Enter**.

- Η επιλογή **ViewPoint→{x, y, z}** ρυθμίζει την οπτική γωνία υπό την οποία βλέπουμε το γράφημα. Αν ο χειριστής επιθυμεί να αλλάξει την προκαθορισμένη επιλογή τότε πρέπει να ακολουθήσει τα εξής βήματα:

1. Εισαγωγή της υπό εξέταση συνάρτησης στην εντολή Plot3D και στη συνέχεια τοποθέτηση ενός κόμματος μετά το πεδίο ορισμού.

   In[64]:=Plot3D[x^2+y^2,{x,-10,10},{y,-10,10},]

2. Επιλογή Input/3D View Point Selector και στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, επιλογή των νέων συντεταγμένων.
3. Επικόλληση (Paste) των νέων συντεταγμένων. Οι νέες συντεταγμένες θα εμφανιστούν αυτόματα μέσα στην Plot3D.

- Η επιλογή **PlotPoints→αριθμός** ρυθμίζει τον αριθμό των σημείων της γραφικής παράστασης.
- Η επιλογή **Mesh**→δίνει τη δυνατότητα στον χειριστή να δει το γράφημα με πλακίδια (**True**) ή χωρίς αυτά (**False**).
- Η επιλογή **BoxRatios→{x, y, z}** ελέγχει την αναλογία των αξόνων του κιβωτίου, εντός του οποίου εμφανίζεται το γράφημα.

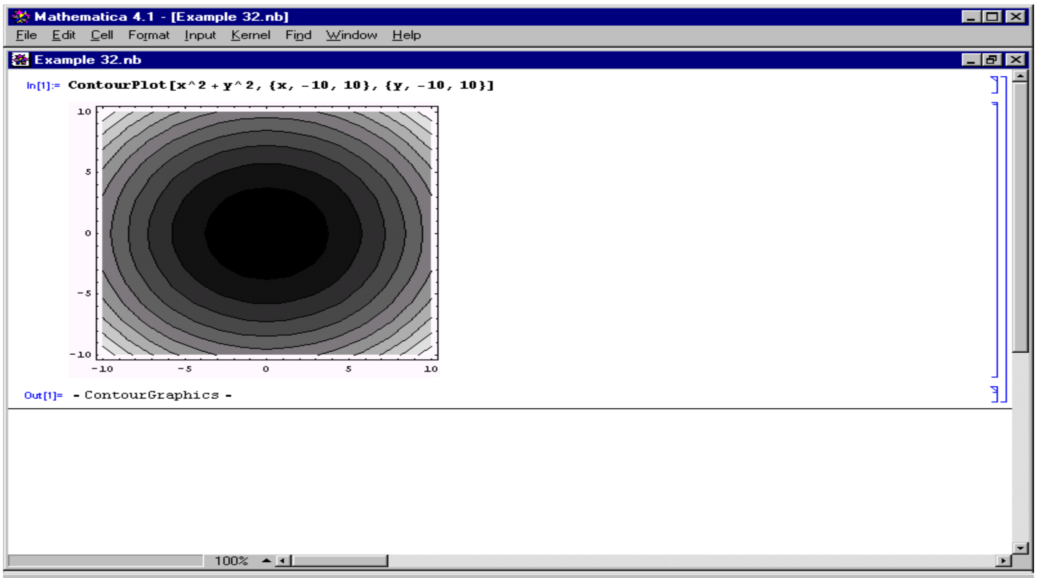
Ισουψείς καμπύλες

Η βασική εντολή για τη σχεδίαση του «τοπογραφικού χάρτη» μιας συνάρτησης δυο μεταβλητών είναι:

ContourPlot[Συνάρτηση,{Μεταβλητή1,κάτω άκρο1, άνω άκρο1}, {Μεταβλητή2,κάτω άκρο2, άνω άκρο2}]

Οι επιλογές της εντολής ContourPlot μπορούν να ιδωθούν με την εισαγωγή της εντολής **Options[ContourPlot]**.

✓ Παράδειγμα 31:



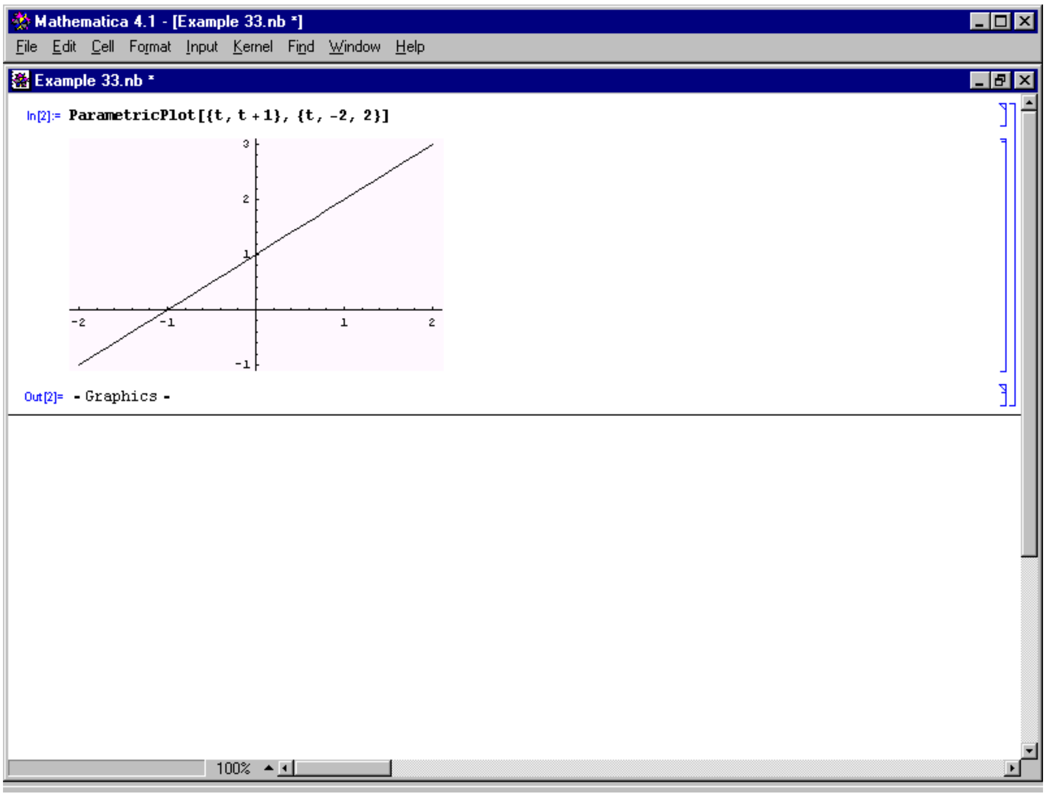
Εικόνα 12

Γραφική παράσταση παραμετρικών εξισώσεων

Έστω ότι ο χειριστής επιθυμεί να σχεδιάσει το γράφημα που παράγεται από τα σημεία (x, y) των εξισώσεων x=f(t) και y=g(t). Η παράμετρος t υπεισέρχεται στον υπολογισμό των x και y, αλλά ο χειριστής ενδιαφέρεται μόνο για την σχέση ανάμεσα στα x και y, καθώς η παράμετρος t μεταβάλλεται. Η εντολή είναι:

ParametricPlot[{x,y},{t,a,b}]

✓ <u>Παράδειγμα 32</u>: Έστω ότι x = t, y = t+1 t∈[-2,2]



<u>Εικόνα 13</u>

12. Δυναμοσειρές

Η προσέγγιση μιας συνάρτησης, μιας μεταβλητής, από ένα πολυώνυμο πραγματοποιείται με την εισαγωγή της εντολής:

Series[Συνάρτηση,{Μεταβλητή, κέντρο, όροι}]

- Αν το κέντρο είναι διάφορο του μηδενός τότε η σειρά καλείται Taylor
- Αν το κέντρο είναι μηδέν τότε η σειρά καλείται Maclaurin.

✓ <u>Παράδειγμα 33</u>: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής επιθυμεί να προσεγγίσει την συνάρτηση f(x)=Sin(x) γύρω από την αρχή.

In[65]:=Clear[f,x] (και **Enter**)

In[66]:= Series[Sin[x],{x,0,8}] (και **Enter**)

Out[66]= $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5070}+O[x]^9$

Ο όρος $O[x]^9$ αντιστοιχεί στο υπόλοιπο του Lagrange και υποδηλώνει ότι υπάρχουν όροι ενάτης τάξεως και άνω στο ανάπτυγμα. Η απόκρυψη του σφάλματος πραγματοποιείται με την εντολή **Normal[έκφραση].**

In[67]:=Normal[%](και **Enter**)

Out[67]= $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5070}$

Η διαγραμματική παρουσίαση της προηγηθείσας ανάλυσης είναι η ακόλουθη:

In[68]:=fig1=Plot[Sin[x],{x,-2*Pi,2*Pi},PlotStyle→RGBColor[1,0,0]](+**Enter**)

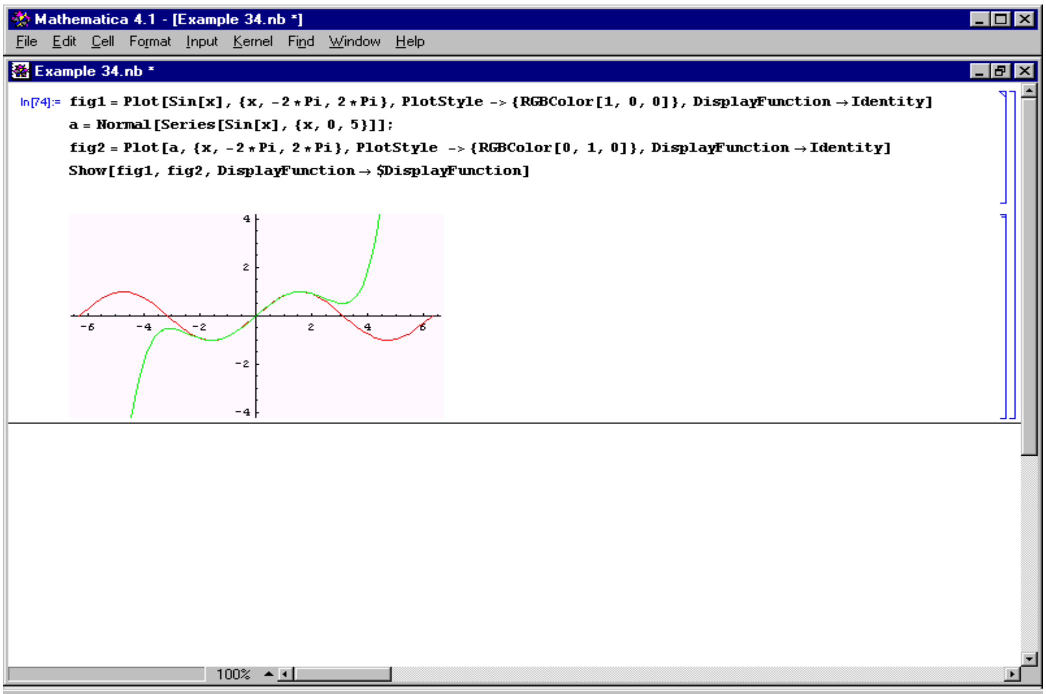
In[69]:=Normal[Series[Sin[x],{x,0,3}]]**;** (και **Enter**)

In[70]:=fig2=Plot[%,],{x,-2*Pi,2*Pi},PlotStyle→RGBColor[0,1,0]] (+**Enter**)

In[71]:=Show[fig1,fig2] (και **Enter**)

<u>Σημείωση:</u> Το ελληνικό ερωτηματικό (**;**) στο τέλος μιας έκφρασης ισοδυναμεί με την μη εμφάνιση της εκροής (Out[]) στην οθόνη. Εάν δεν συντρέχει λόγος για να δούμε το αποτέλεσμα κάποιας εισροής, τότε είναι καλό για την οικονομία του χώρου να χρησιμοποιούμε το σύμβολο αυτό. Στο παράδειγμα 33, η χρήση του ερωτηματικού απέτρεψε την εκτύπωση του πολυωνύμου (In[69]). Στη περίπτωση των εντολών Plot και Plot3D το ερωτηματικό καθίσταται ανενεργό

και για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε την εντολή **DisplayFunction**. Η επιλογή DisplayFunction→Identity δεν επιτρέπει την εκτύπωση του γραφήματος στην οθόνη. Εάν ο χειριστής επιθυμεί, αργότερα, την εκτύπωση του αποτελέσματος θα πρέπει να επιλέξει DisplayFunction→$DisplayFunction.



Εικόνα 14

Τέλος, η προσέγγιση μιας διμεταβλητής συνάρτησης από ένα πολυώνυμο πραγματοποιείται με την εισαγωγή της εντολής:

Series[Συνάρτηση,{Μεταβλητή1,κέντρο1,όροι1}, {Μεταβλητή2,κέντρο2,όροι2}]

✓ Παράδειγμα 34: Να γραφεί η $f(x,y)=x^2y+4y-3$ ως συνάρτηση των x-1 και y+2.

In[72]:=Normal[Series[(x^2)*y+4*y-3,{x,1,3},{y,-2,3}]] (και **Enter**)

Out[72]= $-13-4(-1+x)-2(-1+x)^2+(5+2(-1+x)+(-1+x)^2)(2+y)$

13. Γραμμική άλγεβρα

Για να εισάγουμε ένα διάνυσμα ή μια μήτρα στο Mathematica έχουμε δυο επιλογές:

A. Το 1xn διάνυσμα (a b c …) εισάγεται ως εξής: {a,b,c,…}

Το nx1 διάνυσμα εισάγεται ως εξής: {{a},{b},{c},…}

Η nxn μήτρα $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ εισάγεται ως εξής: {{a_{11},…, a_{1n}},{a_{21},…},…}

B. Πατάμε το δεξί κομβίον του ποντικιού στο σημείο όπου θέλουμε να εισάγουμε το διάνυσμα-μήτρα. Από τον κατάλογο που θα εμφανιστεί επιλέγουμε Create Table/Matrix/Palette. Στη συνέχεια στο παράθυρο που θα εμφανιστεί επιλέγουμε τη δημιουργία μήτρας (Make Matrix) καθώς και τον αριθμό των γραμμών (Number of rows) και των στηλών (Number of columns). Τέλος, επιλέγουμε OK και βλέπουμε το αποτέλεσμα εκτυπωμένο στην οθόνη. Το μόνο που απομένει είναι να εισάγουμε τα δεδομένα στα κενά τετραγωνάκια που θα εμφανιστούν.

Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων / μητρών

- Πρόσθεση: εισάγουμε τα διανύσματα / μήτρες και χρησιμοποιούμε το σύμβολο (+).
- Αφαίρεση: εισάγουμε τα διανύσματα / μήτρες και χρησιμοποιούμε το σύμβολο (**-**).
- Πολλαπλασιασμός: εισάγουμε τα διανύσματα / μήτρες και χρησιμοποιούμε το σύμβολο (**.**).
- Δύναμη μήτρας: Εισάγουμε τη μήτρα και χρησιμοποιούμε την εντολή **MatrixPower[μήτρα,δύναμη]**.

- Η εισαγωγή της μοναδιαίας μήτρας πραγματοποιείται με την εντολή **IdentityMatrix[αριθμός]**.
- Η εισαγωγή της διαγωνίου μήτρας πραγματοποιείται με την εντολή **DiagonalMatrix[{a_{11}, a_{22}, a_{33},…}]**.
- Η εύρεση της αναστρόφου μήτρας πραγματοποιείται με την εντολή **Transpose[μήτρα]**.

- Η εύρεση της αντιστρόφου μήτρας πραγματοποιείται με την εντολή **Inverse[μήτρα]**.
- Η εύρεση της ορίζουσας μιας μήτρας πραγματοποιείται με την εντολή **Det[μήτρα]**.
- Η εύρεση του ίχνους μιας μήτρας πραγματοποιείται με την εντολή **Tr[μήτρα]**.

✓ Παράδειγμα 35: Έστω η μήτρα $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

In[73]:=q=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; (και **Enter**)

In[74]:=Transpose[q] (και **Enter**)

Out[74]= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

In[75]:=Inverse[q] (και **Enter**)

Out[75]= $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

In[76]:=Det[q] (και **Enter**)

Out[76]= -2

14. Γραμμικός προγραμματισμός

Έστω ότι θέλουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα:

Ελαχιστοποίηση/μεγιστοποίηση της $f(x)$

υπο τους περιορισμούς $g(x) \leq 0$ και $h(x) = 0$

όπου η f(x) είναι η αντικειμενική συνάρτηση και g(x), h(x) είναι οι (γραμμικοί) περιορισμοί του προβλήματος. Ένα τέτοιο πρόβλημα καλείται πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Για να επιλύσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα, με τη βοήθεια του Mathematica, εισάγουμε την εντολή:

ConstrainedMax[αντικειμενική συνάρτηση,{περιορισμοί},{μεταβλητές}] εάν πρόκειται για μεγιστοποίηση και **ConstrainedMin[αντικειμενική συνάρτηση,{περιορισμοί},{μεταβλητές}]** εάν πρόκειται για ελαχιστοποίηση

✓ <u>Παράδειγμα 36</u>:

Ελαχιστοποίηση της $f(x, y, z) = x - 4y + 3z$

υπο τους περιορισμούς $x + y + z - 12 \leq 0$, $2x + y + z \leq 24, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

In[77]:=Clear[f,g1,g2,x,y,z]

In[78]:=f[x_,y_,z_]:=x-4*y+3*z

In[79]:=g1[x_,y_,z_]:=x+y-z-12

In[80]:=g2[x_,y_,z_]:=2*x+y+z

In[81]:=ConstrainedMin[f[x,y,z],{g1[x,y,z]<=0,g2[x,y,z]<=24},{x,y,z}]

Out[81]={-54, {x→0, y→18, z→6}}

Άρα το ολικό ελάχιστο στο σημείο (0,18,6) είναι –54.

Λόγω της γραμμικότητος των εξισώσεων και των ανισοτήτων , το πρόβλημα της αριστοποίησης μπορεί να γραφεί υπό μορφή μητρών ως:

Ελαχιστοποίηση/μεγιστοποίηση της $f(x) = \vec{c}^{\,T} \vec{x} = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$

υπο τους περιορισμούς $g(x) = \vec{b} - A\vec{x} \leq 0$ και $x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n$

Για την επίλυση αυτής της μορφής υπάρχει στο Mathematica η εντολή **LinearProgramming[c,A,b]**, η οποία βρίσκει το <u>διάνυσμα</u> x το οποίο ελαχιστοποιεί την ποσότητα $\vec{c}^{\,T} \vec{x}$ υπό τους περιορισμούς $A\vec{x} \geq \vec{b}$ και $\vec{x} \geq 0$.

Για τη περίπτωση της μεγιστοποίησης, αντικαθιστούμε το $\vec{c}$ με $-\vec{c}$ στην αντικειμενική συνάρτηση.

15. Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα

Η εύρεση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου μιας μήτρας πραγματοποιείται με την εισαγωγή της εντολής:

CharacteristicPolynomial[Μήτρα, λ]

Η εύρεση των ιδιοτιμών μιας μήτρας πραγματοποιείται με την εισαγωγή της εντολής:

Eigenvalues[Μήτρα]

Η εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων μιας μήτρας πραγματοποιείται με την εισαγωγή της εντολής:

Eigenvectors[Μήτρα]

Η ταυτόχρονη εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων μιας μήτρας πραγματοποιείται με την εισαγωγή της εντολής:

Eigensystem[Μήτρα]

✓ Παράδειγμα 37: Έστω η μήτρα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A είναι:

In[82]:= A={{1,2},{4,3}}; (και **Enter**)

In[83]:= CharacteristicPolynomial[A,λ] (και **Enter**)

Out[83]= $-5-4\lambda+\lambda^2$

Οι ιδιοτιμές της A είναι:

In[84]:= Eigenvalues[A] (και **Enter**)

Out[84]={-1,5}

Τα ιδιοδιανύσματα της A είναι:

In[85]:= idio=Eigenvectors[A] (και **Enter**)

Out[85]={{-1,1},{1,2}}

Αν ο χειριστής θέλει να χρησιμοποιήσει το ένα από τα δυο ιδιοδιανύσματα, τότε πρέπει να το εξάγει από τη λίστα με τη χρήση της εντολής **Part**.

In[86]:= Part [idio,1] (και **Enter**)

Out[86]= {-1,1}

Για την κανονικοποιήση ενός διανύσματος ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1.Ενεργοποιούμε τη βιβλιοθήκη Linear Algebra. Πιο συγκεκριμένα, πληκτρολογούμε **<<LinearAlgebra`** και πατάμε Enter.

2. Εισάγουμε την εντολή **Normalize[Διάνυσμα]**

In[87]:=<<LinearAlgebra` (και **Enter**)

In[88]:=Normalize[{1,2}] (και **Enter**)

Out[88]= $\{\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\}$

Το Mathematica έχει αποθηκευμένες βιβλιοθήκες για διάφορους τομείς των μαθηματικών και της στατιστικής. Αυτές είναι:

Algebra, Calculus, DiscreteMath, Geometry, Graphics, LinearAlgebra, Miscellaneous, NumberTheory, NumericalMath, Statistics, Utilities.

Κάθε μια από τις βιβλιοθήκες αυτές, περιέχει εντολές προς επιτέλεση εξειδικευμένων εργασιών. Για να χρησιμοποιήσει κάποια εντολή πρέπει πρώτα να ενεργοποιήσει την βιβλιοθήκη στην οποία ανήκει. Στη περίπτωση της κανονικοποίησης διανύσματος, πρέπει πρώτα να ενεργοποιηθεί η βιβλιοθήκη LinearAlgebra προτού χρησιμοποιηθεί η εντολή Normalize. Για να δούμε τις επιλογές που μας παρέχει κάθε βιβλιοθήκη επιλέγουμε Help/Help Browser. Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί επιλέγουμε Add-ons και στη συνέχεια Standard Packages.

16. Επίλυση διαφορικών εξισώσεων-Συστημάτων διαφορικών εξισώσεων

Η επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης επιτυγχάνεται με την εισαγωγή της εντολής:

DSolve[διαφορική εξίσωση, εξαρτημένη μεταβλητή, ανεξάρτητη μεταβλητή]

Η επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων επιτυγχάνεται με την εισαγωγή της εντολής:

DSolve[{εξίσωση1,εξίσωση2,…}, {εξαρτημένη μεταβλητή1, εξαρτημένη μεταβλητή2,…}, ανεξάρτητη μεταβλητή]

Η εκροή της εντολής αυτής είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης, η οποία εμπεριέχει ένα παράγοντα **C**[αριθμός σταθερών] που αντιπροσωπεύει τη σταθερά της ολοκλήρωσης.

✓ Παράδειγμα 38: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής επιθυμεί την επίλυση της $y''(x)+2y'(x)+y(x)=0$

In[89]:=Clear[y,x] (και **Enter**)

In[90]:=DSolve[$y''(x)+2y'(x)+y(x)==0$,y[x],x] (και **Enter**)

Out[90]= $\{\{y(x)\to e^{-x}C[1]+e^{-x}C[2]\}\}$

Εάν μας δίνονται αρχικές συνθήκες τότε η εντολή DSolve τροποποιείται ως εξής:

DSolve[{διαφορική εξίσωση, αρχικές συνθήκες}, εξαρτημένη μεταβλητή, ανεξάρτητη μεταβλητή]

In[91]:= Clear[x,y] (και **Enter**)

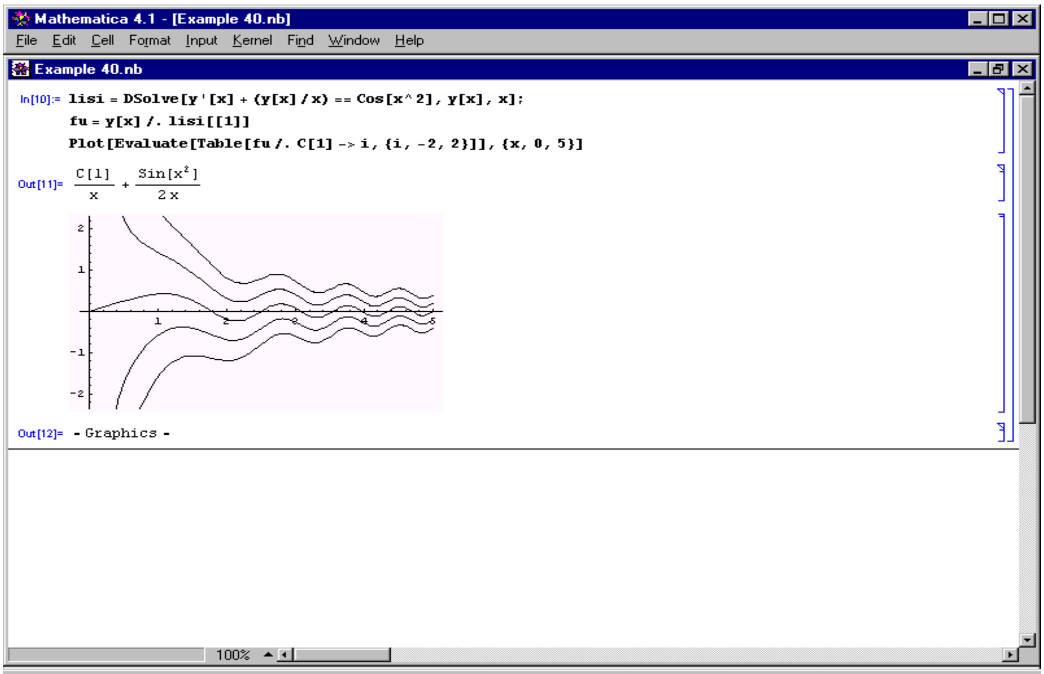
In[92]:= DSolve[$\{y'(x)+y(x)==0, y[0]==2\}, y[x], x]$ (και **Enter**)

Out[92]= $\{\{y(x)\to 2e^{-x}\}\}$

Ολοκληρωτικές καμπύλες

Για κάθε τιμή που παίρνει η σταθερά C (δηλαδή για κάθε αρχική συνθήκη από την οποία υπολογίζουμε τη τιμή της σταθεράς αυτής), λαμβάνουμε και μια διαφορετική ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης που θέλουμε να επιλύσουμε. Συνεπώς, μπορούμε να λάβουμε μια οικογένεια καμπυλών, μια για κάθε ειδική λύση, οι οποίες καλούνται ολοκληρωτικές καμπύλες.

✓ Παράδειγμα 39: Να βρεθεί η γενική λύση της $y'(x)+\frac{y(x)}{x}=Cos[x^2]$ και να γίνει η γραφική παράσταση των λύσεων όταν η σταθερά λαμβάνει τις τιμές –2, -1, 0, 1, 2.



Εικόνα 15

Η εντολή **Evaluate** δίνει προτεραιότητα στην εκτέλεση της εντολής που βρίσκεται εντός της. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η εντολή αυτή δίνει προτεραιότητα στη δημιουργία των δεδομένων τα οποία αποτελούν απαραίτητη εισροή για την εντολή Plot.

Δημιουργία δεδομένων

Για τη δημιουργία δεδομένων είναι διαθέσιμες οι ακόλουθες εντολές:

Table[Συνάρτηση, {μεταβλητή, ελάχιστη τιμή, μέγιστη τιμή}]

Table[Συνάρτηση, {μεταβλητή, ελάχιστη τιμή, μέγιστη τιμή,βήμα}]

Table[Συνάρτηση, {μεταβλητή1, ελάχιστη τιμή1, μέγιστη τιμή1}, {μεταβλητή2, ελάχιστη τιμή2, μέγιστη τιμή2},…]

✓ Παράδειγμα 40:

In[93]:=Table[i,{i,1,6}] (και **Enter**)

Out[93]={1,2,3,4,5,6}

In[94]:=Table[c*x /. c→j,{j,1,3}] (και **Enter**)

Out[94]= x +2x +3x

In[95]:=Table[z,{z,1,3,0.5}] (και **Enter**)

Out[95]={1,1.5,2,2.5,3}

Επίλυση με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων

Εάν η προσπάθεια για επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης ή ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων αποτύχει τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση τους. Η εντολή για την εξίσωση είναι:

NDSolve[{Εξίσωση, αρχική συνθήκη= =τιμή},εξαρτημένη μεταβλητή, {ανεξάρτητη μεταβλητή, ελάχιστη τιμή, μέγιστη τιμή}]

ενώ για το σύστημα είναι:

NDSolve[{Εξίσωση1, αρχική συνθήκη1= =τιμή1,…}, {εξαρτημένη μεταβλητή1,…}, {ανεξάρτητη μεταβλητή, ελάχιστη τιμή, μέγιστη τιμή}]

✓ Παράδειγμα 41: Υποθέτουμε ότι ο χειριστής επιθυμεί την επίλυση της $y'(x) = Cos(xy(x))$ με y(0)=1 και x∈[0,10].

In[96]:=Clear[x,y] (και **Enter**)

In[97]:=DSolve[$\{y'[x] == Cos[xy[x]], y[0.5] = 1\}, y[x], x]$ (και **Enter**)

Out[97]= DSolve[$\{y'[x] == Cos[xy[x]], y[0.5] = 1\}, y[x], x]$

In[98]:=solution=NDSolve[$\{y'[x] == Cos[xy[x]], y[0.5] = 1\}, y[x], x]$ (+ **Enter**)

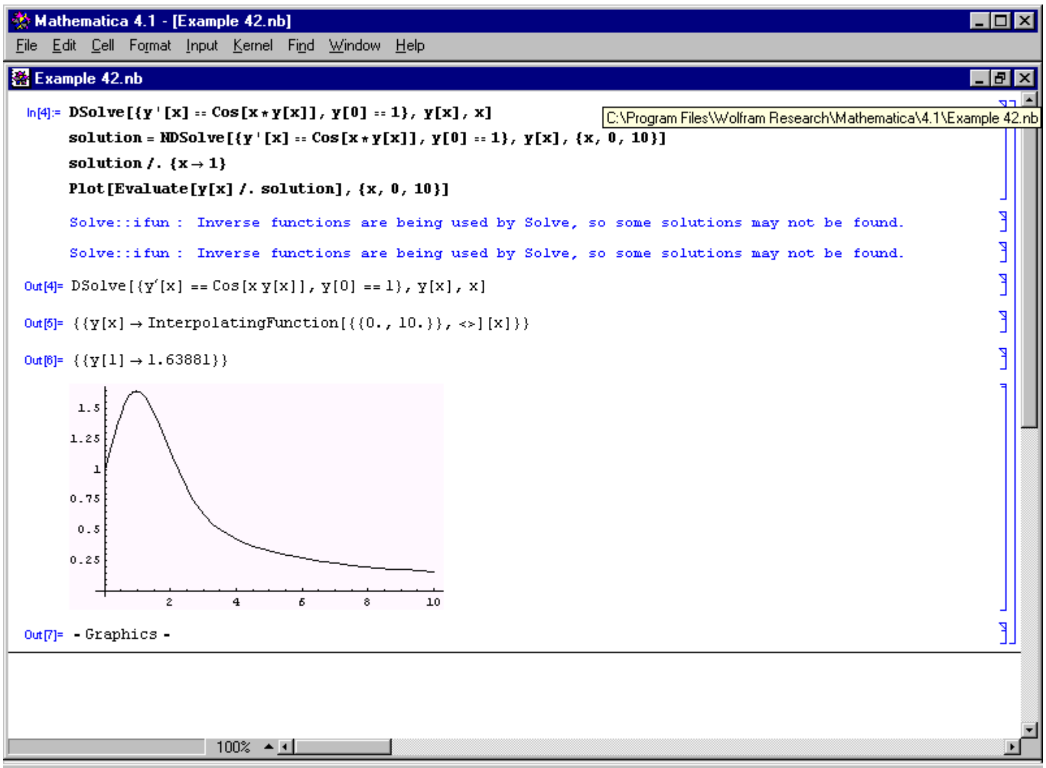
Out[98]= $\{\{y[x] \to InterpolatingFunction[\{\{0.10\}\}, <>][x]\}\}$

Η **InterpolatingFunction** αντιπροσωπεύει μια προσεγγιστική συνάρτηση της οποίας οι τιμές προκύπτουν με παρεμβολή. Για να βρούμε τη τιμή της συνάρτησης y[x] για μια συγκεκριμένη τιμή του x εισάγουμε:

In[99]:=solution/.{x→1} (και **Enter**)

Out[99]= y[1]→1.63881

Με την εντολή Plot[Evaluate[y[x]/.solution],{x,0,10}] γίνεται η γραφική παράσταση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης.



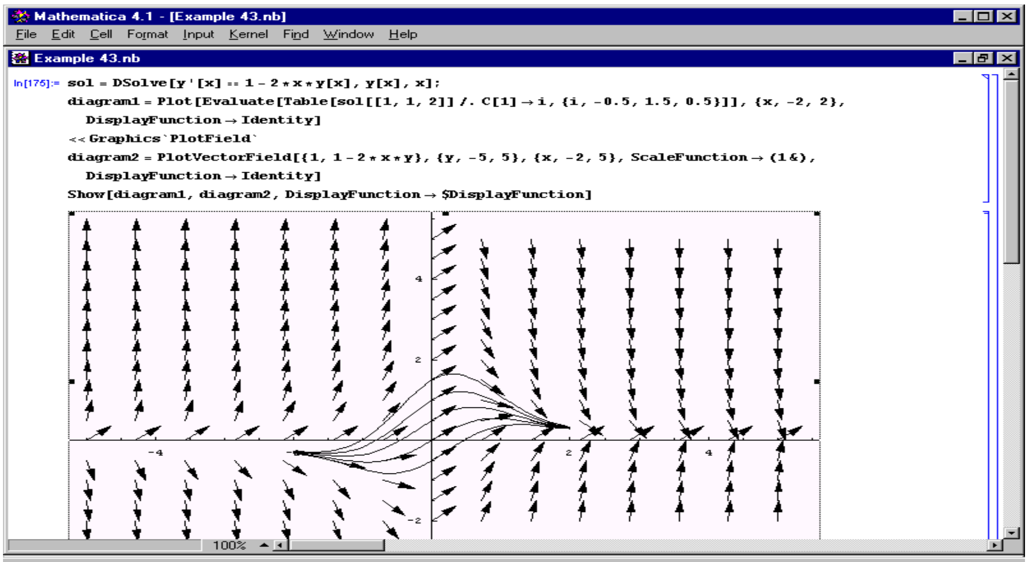
Εικόνα 16

Πεδίο διευθύνσεων και διάγραμμα φάσης

Το πεδίο διευθύνσεων είναι ένα γράφημα στο οποίο εμφανίζονται μικρά βελάκια, τα οποία παριστούν τις τιμές που λαμβάνει η $y'(x) = f(y(x), x)$ για διάφορες τιμές της x. Η σχεδίαση του πεδίου διευθύνσεων απαιτεί την ενεργοποίηση της εντολής **PlotVectorField**, η οποία ανήκει στη βιβλιοθήκη **Graphics`PlotField`**.

Το διάγραμμα φάσης της λύσεως ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων, είναι ένα γράφημα το οποίο αποτυπώνει τη σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές του, χωρίς να εμφανίζεται (άμεσα) η επίδραση του χρόνου.

✓ <u>Παράδειγμα 42</u>: Έστω η $y'(x) = 1 - 2\,x\,y(x)$. Να σχεδιαστεί ένα διάγραμμα της λύσης της εξίσωσης αυτής, για C = -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 και x∈[-2,2], καθώς και το πεδίο διευθύνσεων της.



<u>Εικόνα 17</u>

Η εντολή **ScaleFunction** ρυθμίζει το μήκος των διανυσμάτων.

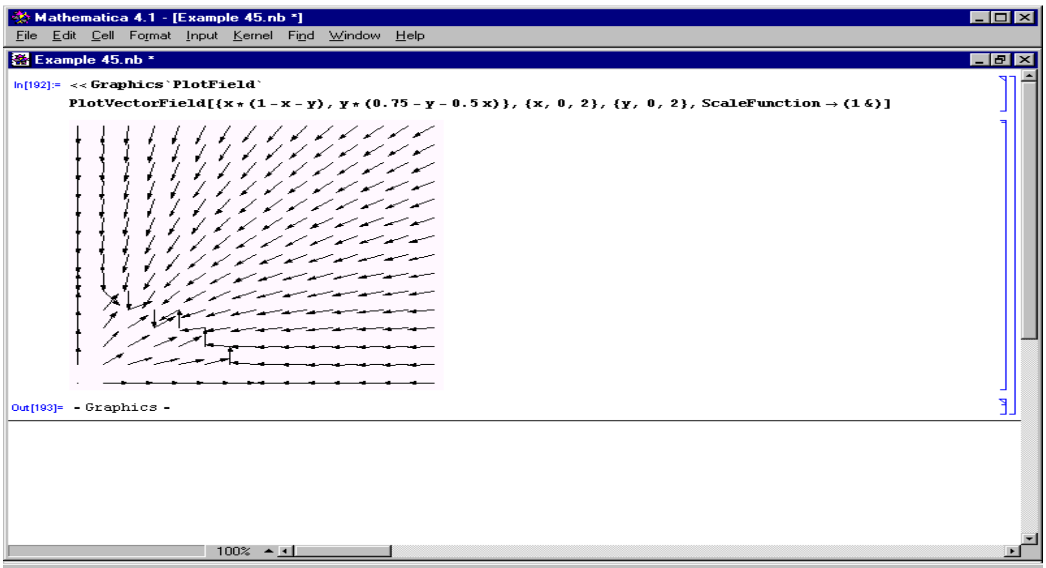
✓ <u>Παράδειγμα 43</u>: Να σχεδιαστεί το πεδίο διευθύνσεων του συστήματος

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(1 - x(t) - y(t)) \\ y'(t) = y(t)(0.75 - y(t) - 0.5x(t)) \end{cases} \text{ για } x \in [0,2] \text{ και } y \in [0,2].$$

Τα κρίσιμα σημεία είναι:

In[100]:=Solve[{x*(1-x-y)= =0, y*(0.75-y-0.5x)}= =0,{x,y}](και **Enter**)

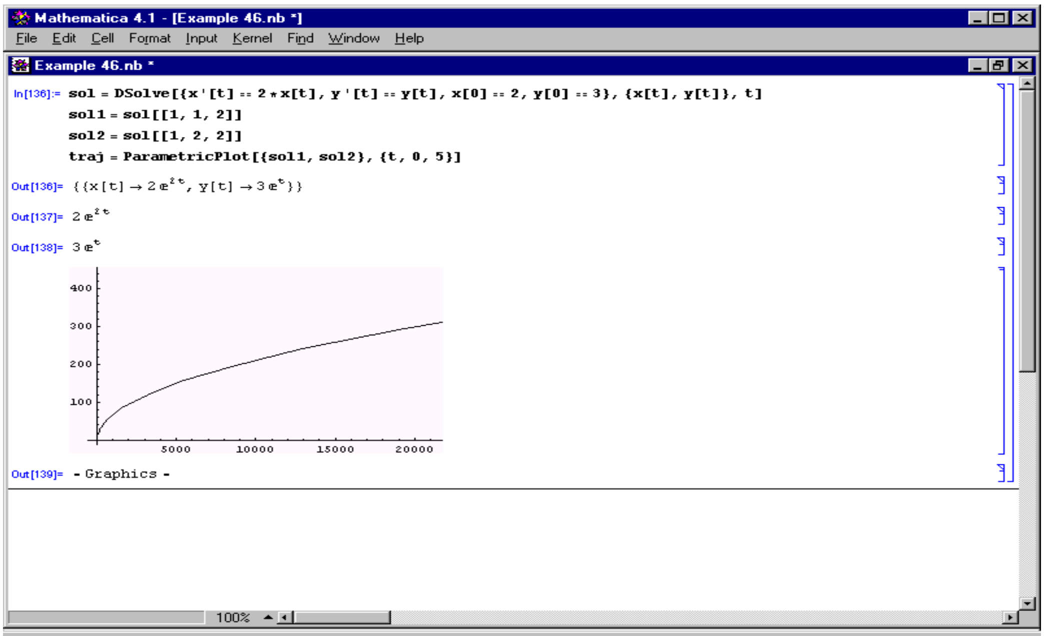
Out[100]={{x→0,y→0},{x→0, y→0.75},{x→0.5, y→0.5},{x→1, y→0}}



<u>Εικόνα 18</u>

✓ <u>Παράδειγμα 44</u>: Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσεως του συστήματος

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = y(t) \end{cases} \text{ για } t \in [0,5].$$



<u>Εικόνα 19</u>

17. Εξισώσεις διαφορών-συστήματα εξισώσεων διαφορών

Η επίλυση μιας εξίσωσης διαφορών ή ενός συστήματος εξισώσεων διαφορών απαιτεί την ενεργοποίηση της εντολής Rsolve, η οποία ανήκει στη βιβλιοθήκη DiscreteMath. Πιο συγκεκριμένα, για την εξίσωση εισάγουμε:

DiscreteMath`Rsolve`
RSolve[{εξίσωση,αρχική συνθήκη},εξαρτημένη μεταβλητή, ανεξάρτητη μεταβλητή}

και για το σύστημα:

DiscreteMath`Rsolve`
RSolve[{εξίσωση1,εξίσωση2,…,αρχική συνθήκη1,αρχική συνθήκη 2,…},{εξαρτημένη μεταβλητή1, εξαρτημένη μεταβλητή2,…} ανεξάρτητη μεταβλητή}

✓ Παράδειγμα 45: Να λυθεί η $y(t+1)-2y(t)=0$, με $y(0)=1$.

In[101]:=<<DiscreteMath`RSolve` (και **Enter**)

In[102]:= RSolve[y[t+1]= =2y[t],y[t],t] (και **Enter**)

Out[102]= {{y[t]→2^t C[1]}}

In[103]:= RSolve[{y[t+1]= =2y[t],y[0]= =1},y[t],t] (και **Enter**)

Out[103]= {{y[t]→2^t}}

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της λύσης εισάγουμε

In[104]:= data=Table[{t, 2^t},{t,0,10}]; (και **Enter**)

In[105]= ListPlot[data, PlotJoined→True] (και **Enter**)

✓ Παράδειγμα 46: Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} y(t+1)=y(t)+x(t) \\ x(t+1)=2y(t)+x(t) \end{cases}$ με $y(0)=5$ και $x(0)=1$.

In[106]:=<<DiscreteMath`RSolve` (και **Enter**)

In[107]:=solution=RSolve[{y[t+1]==y[t]+x[t],x[t+1]==2*y[t]+x[t],y[0]==5,x[0] = =1},{y[t],x[t]},t] (και **Enter**)

Out[107]={{ $y[t] \to \frac{1}{4}(-(1-\sqrt{2})^t(-10+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})^t(10+\sqrt{2})),$
$x[t] \to \frac{1}{2}((1-5\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^t+(1+5\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^t\}\}$

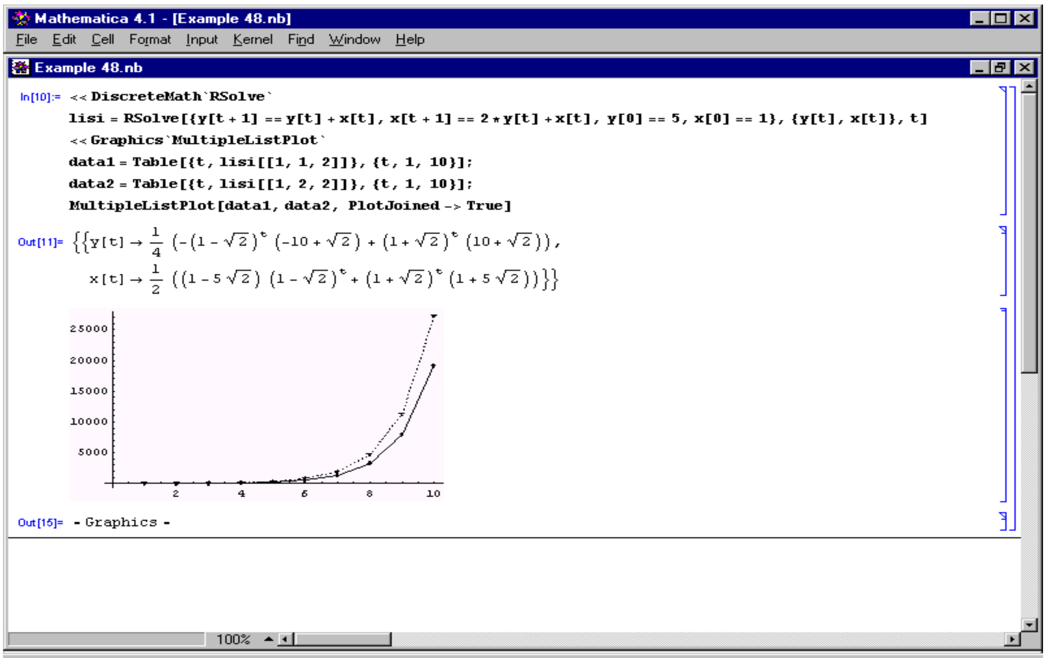
Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση των λύσεων εισάγουμε:

In[108]:=<<Graphics`MultipleListPlot` (και **Enter**)

In[109]:=data1=Table[{t,solution[[1,1,2]]},{t,1,10}]; (και **Enter**)

In[110]:=data2=Table[[{t,solution[[1,2,2]]},{t,1,10}]; (και **Enter**)

In[111]:=MultipleListPlot[data1,data2, PlotJoined→True] (και **Enter**)



Εικόνα 20

18. Λογικοί τελεστές – Προγραμματισμός

Οι βασικοί λογικοί τελεστές που χρησιμοποιούνται στον προγραμματισμό είναι οι ακόλουθοι:

(**&&**): και

(= =): ίσο

(**!=**): διάφορο

(**!**): όχι

(||): ή

(**True**): αληθής τιμή

(**False**): ψευδής τιμή

Επίσης, το Mathematica προσφέρει στον χειριστή μια πλειάδα λογικών συναρτήσεων οι οποίες διευκολύνουν τη προγραμματιστική διαδικασία. Οι πιο σημαντικές από αυτές είναι οι ακόλουθες:

If[συνθήκη, Α,Ψ,Δ]: Η συνάρτηση αυτή εξετάζει εάν η συνθήκη είναι αληθής ή ψευδής. Εάν είναι αληθής της αποδίδει τη τιμή Α, εάν είναι ψευδής της αποδίδει τη τιμή Ψ και εάν δεν είναι ούτε αληθής ούτε ψευδής, της αποδίδει τη τιμή Δ.

✓ <u>Παράδειγμα 46</u>

In[111]:=If[7>8,x,y] (και **Enter**)

Out[111]=y

In[112]:=If[x= =y,a,b,c] (και **Enter**)

Out[112]= c (Δεν έχουμε ορίσει τιμές για τις μεταβλητές και συνεπώς το πρόγραμμα δεν μπορεί να αποφανθεί για το εάν η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής)

Print[έκφραση]: εκτυπώνει τις εκφράσεις που βρίσκονται εντός των αγκυλών. Εάν θέλουμε να εκτυπώσουμε κείμενο τότε χρησιμοποιούμε τα εισαγωγικά " ".

✓ <u>Παράδειγμα 47</u>

In[113]:=Print["test"] (και **Enter**)

Out[113]=test

Module[{x,y,…},έκφραση]: ορίζει ότι η χρήση των συμβόλων x, y,… είναι τοπική.

✓ Παράδειγμα 48

In[114]:= t=17 (και **Enter**)

Out[114]=17

In[115]=Module[{t},t=10,t] (και **Enter**)

Out[115]=10

In[116]:=t (και **Enter**)

Out[116]=17

Παρατηρούμε οτι η τιμή της t παραμένει 17 ακόμη και μετά την ενεργοποίηση της νέας τιμής της (10) εντός της Module. Η τιμή 10 είναι τοπική και ισχύει μόνο εντός της εντολής Module.

Which[Συνθήκη1, Τιμή1, Συνθήκη2, Τιμή2,...]: αποδίδει μια τιμή στη συνθήκη η οποία ικανοποιείται πρώτη

✓ Παράδειγμα 49

In[117]:= h[x_] := Which[x < 0, x^2, x > 5, x^3] (και **Enter**)

In[118]= h[-5] (και **Enter**)

Out[118]= 25

In[119]:= h[2] (και **Enter**)

Out[119]= 0

Do[έκφραση, {μεταβλητή, αρχική τιμή, τελική τιμή, βήμα}]: επαναλαμβάνει (looping) μια διαδικασία n φορές, όπου n η τελική τιμή. Αν παραλείψουμε το βήμα ή την αρχική τιμή, τότε το Mathematica τους προσδίδει αυτόματα τη τιμή 1. Αν έχουμε πολλές εκφράσεις εντός της Do, τότε χρησιμοποιούμε τον τελεστή (**;**) για να τις διαχωρίσουμε.

✓ Παράδειγμα 50

In[120]:=Do[Print[i],{i,3}] (και **Enter**)

1

2

3

In[121]:= s=0; (και **Enter**)

In[122]:= Do[s=s+i,{i,1,100}] (και **Enter**)

In[123]:= Print[s] (και **Enter**)

Out[123]= 5050 (δηλαδή το άθροισμα των 100 πρώτων ακέραιων αριθμών)

For [Αρχική τιμή , Συνθήκη , Έκφραση ; Βήμα] : Η εντολή αυτή ξεκινά από μια αρχική τιμή και εκτελεί διαδοχικές αντικαταστάσεις στην έκφραση μέχρις ότου η συνθήκη πάψει να ισχύει.

✓ Παράδειγμα 51

In[124]:= For[i=1,i<5,Print[i];i++] (και **Enter**)

1

2

3

4

Τα δυο συν (++), τοποθετημένα μπροστά από μια μεταβλητή, ισοδυναμούν με μοναδιαία αύξηση της τιμής της (στο παράδειγμα 53, της μεταβλητής i). Θα μπορούσαμε αντί της έκφρασης i++ να εισάγουμε την έκφραση i=i+1.

While[Συνθήκη, Έκφραση] : Η εντολή αυτή ελέγχει αρχικά εάν ισχύει η συνθήκη και στη συνέχεια (εάν όντως ισχύει) εκτελεί την εντολή που περιέχεται στην έκφραση.

✓ Παράδειγμα 52

In[125]:=mm=10; (και **Enter**)

In[126]:=While[(mm=mm-1)>5,Print[mm]] (και **Enter**)

9

8

7

6

Break[ ]: Προκαλεί τον τερματισμό μιας επαναλαμβανόμενης διαδικασίας (looping). Πιο συγκεκριμένα προκαλεί την έξοδο από την Do, την For ή την While.

✓ <u>Παράδειγμα 53</u>

In[128]:=Do[t;Print[t];If[t>=5,Break[]],{t,1,20}] (και **Enter**)

1

2

3

4

5

Εάν, για οιονδήποτε λόγο θέλουμε να τερματίσουμε μια επαναληπτική διαδικασία, χωρίς αυτή να έχει ολοκληρωθεί, τότε επιλέγουμε **Kernel / Interrupt Evaluation.** Επίσης, μπορούμε να τερματίσουμε (τοπικά) την λειτουργία του Kernel επιλέγοντας **Kernel/QuitKernel/Local**. Η τοπική παύση της λειτουργίας του Kernel θα «καθαρίσει» τη μνήμη του Mathematica από όλες τις εισροές. Η αλλαγή βιβλίου εργασίας δεν μας εξασφαλίζει ότι οι ορισμοί και οι τιμές που έχουμε «ενεργοποιήσει» θα πάψουν να ισχύουν. Απαιτείται τοπική παύση της λειτουργίας του Kernel, ειδάλλως οι υπολογισμοί μας θα εμφανίσουν σοβαρά σφάλματα.

✓ <u>Παράδειγμα 54</u>: Υποθέτουμε ότι θέλουμε να φτιάξουμε ένα πρόγραμμα το οποίο θα βρίσκει τα ακρότατα μιας (οποιαδήποτε) συνάρτησης.

In[129]:=f[x_]:= 15*(x^2)-14*x+10; (+**Enter** στο βασικό πληκτρολόγιο)

solution=Solve[D[f[x],x]= =0,x]//N; (+**Enter** στο βασικό πληκτρολόγιο)

```
Do[
        zz=Part[solution,i];
        step=D[f[x],{x,2}]/.zz;
            If[step>0,Print[zz];Print["Min"]];
            If[step<0,Print[zz];Print["Max"]];
            If[step= =0,Print[zz];Print["Infletion Point"]],
       {i,1,Length[solution]}]
```
(+**Enter** στο αριθμητικό πληκτρολόγιο)

Out[129]=0.466667

Min

Όταν πατάμε το Enter στο βασικό πληκτρολόγιο αλλάζουμε γραμμή ενώ όταν πατάμε το Enter στο αριθμητικό πληκτρολόγιο ενεργοποιούμε την εντολή μας. Η εντολή **Length** μετρά το πλήθος των στοιχείων μιας λίστας και επιστρέφει, ως εκροή, το πλήθος τους. Στο παράδειγμα μας, η λίστα, την οποία ονομάσαμε solution, περιέχει ένα μόνο στοιχείο αφού υπάρχει μόνο ένα κρίσιμο σημείο για τη συγκεκριμένη συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία που περιέχεται στην εντολή Do θα εκτελεστεί μια φορά. Τέλος, το ερωτηματικό εντός της εντολής If ορίζει ότι εάν η συνθήκη είναι αληθής τότε θα εκτελεστούν δυο εντολές εκτύπωσης. Με τη χρήση ερωτηματικών θα μπορούσαμε να εισάγουμε περισσότερες από δυο εντολές στην If.

19.Βιβλιογραφία

1. **Cliff Huang and Philip Crooke**, “Mathematics and Mathematica for Economists”, 1997, Blackwell Publishers.
2. **Stephen Wolfram**, “The MATHEMATICA Book”, 4^{th} version, 2000, Cambridge University Press.