Πλήρεις ή Τέλειες Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω συνάρτηση $f(x,y)$. Το διαφορικό της είναι:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Αντίστροφο πρόβλημα: Όταν μάς δίδουν μία έκφραση της μορφής:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

αυτή είναι διαφορικό κάποιας συνάρτησης $f(x,y)$ και ποιας;

Θεώρημα: Μία ποσότητα

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

που ονομάζεται διαφορική μορφή, είναι τέλειο διαφορικό μιάς συναρτήσεως $f(x,y)$ εάν και μόνο εάν

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

Λύση Δ.Ε. με διαφορικά.

Έστω η Δ.Ε.

$$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0} \quad (1)$$

[1] Βρίσκουμε $\Phi(x,y)$:

$$d\Phi(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \quad (2)$$

[2] Από (1), (2) $\Rightarrow$ $d\Phi = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi(x,y) = C}$$

Αυτή είναι η λύση σε πεπλεγμένη μορφή.

Άσκηση: Να λυθεί η Δ.Ε:

$$(3x^2+4xy)+(2x^2+3y^2)y'=0 \qquad (E)$$

Λύση: Γράφουμε την (E) στην μορφή

$$(3x^2+4xy)\,dx+(2x^2+3y^2)\,dy=0$$

Ζητάμε συνάρτηση $\Phi(x,y)$, που να έχει την παραπάνω έκφραση για διαφορικό.

Αφού $$\frac{\partial(3x^2+4xy)}{\partial y}=4x=\frac{\partial(2x^2+3y^2)}{\partial x}$$

η $\Phi(x,y)$ υπάρχει. Ακόμα:

$$\left.\begin{array}{l} d\Phi = \partial\Phi/\partial x \; dx + \partial\Phi/\partial y \; dy \\ \qquad\quad \parallel \qquad\qquad\qquad \parallel \\ \qquad (3x^2+4xy)\,dx + (2x^2+3y^2)\,dy \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=3x^2+4xy \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=2x^2+3y^2 \qquad (2)$$

από 1 $\Longrightarrow$ $\Phi = \int (3x^2 + 4xy)\,dx$ $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad \Phi = \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}y + G(y) \Longrightarrow$$

$$\Phi = x^3 + 2x^2 y + G(y)$$

Αντικαθιστώντας στην 2 έχουμε

$$\frac{\partial \left(x^3 + 2x^2 y + G(y)\right)}{\partial y} = 2x^2 + 3y^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2x^2 + G'(y) = 2x^2 + 3y^2 \Longrightarrow \boxed{G'(y) = 3y^2}$$

$$\Longrightarrow G(y) = \int 3y^2\,dy = y^3 + C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Phi(x,y) = x^3 + 2yx^2 + y^3 + C}$$

και η λύση της Ε δίδεται από την σχέση $\Phi(x,y) = \lambda$ ή

$$x^3 + 2y(x)\,x^2 + y^3(x) + k = 0$$

Άσκηση: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$2x(1-ye^{x^2})dx - e^{x^2}dy = 0 \quad (E)$$

Λύση:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2xe^{x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2xe^{x^2}$$

άρα υπάρχει λύση. Ζητάμε $\Phi(x,y)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x(1-ye^{x^2}) \Rightarrow \Phi = x^2 - ye^{x^2} + c(y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -e^{x^2} \Rightarrow -e^{x^2} + c'(y) = -e^{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = x^2 - ye^{x^2} + c$$ και άρα

η λύση της (E) δίδεται από την σχέση

$$d\Phi = 0 \Rightarrow x^2 - ye^{x^2} + c = \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 - y(x)e^{x^2} + k = 0}$$

Άσκηση: Έστω $U(x_1, x_2)$ μία συνάρτηση χρησιμότητος. Εάν οι οριακές χρησιμότητ(ες) δίδονται από τις σχέσεις:

$$U_{x_1} = 5x_1x_2 + x_2^2 \quad , \quad U_{x_2} = \frac{5}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 .$$

βρείτε την $U(x_1, x_2)$.

Λύση: Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 5x_1x_2 + x_2^2 \Rightarrow U = \int (5x_1x_2 + x_2^2)\,dx_1$$

$$\Rightarrow U = \frac{5}{2}x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + F(x_2)$$

Αντικαθιστώντας στην $\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{5}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\frac{5}{2}x_1^2} + \underline{2x_1x_2} + F'(x_2) = \underline{\frac{5}{2}x_1^2} + \underline{2x_1x_2} + 3x_2^2$$

$$\Rightarrow F'(x_2) = 3x_2^2 \Rightarrow F(x_2) = x_2^3 + c_1$$

$$\Rightarrow \boxed{U(x_1, x_2) = \frac{5}{2}x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 + c_1}$$

<u>Άσκηση</u>: Βρείτε $\Phi(x,y,z)$ έτσι ώστε:

$$d\Phi = (2x+yz+1)dx + (2y+xz+5)dy + (2z+xy+3)dz$$

<u>Λύση</u>:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (2x+yz+2) \Rightarrow \Phi = \int (2x+yz+1)dx =$$

$$= x^2 + yzx + x + G(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2y+xz+5 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+yzx+x+G(y,z)\right) = 2y+xz+5$$

$$\Rightarrow zx + \frac{\partial}{\partial y}\left(G(y,z)\right) = 2y+xz+5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(y,z) = \int (2y+5)dy = y^2+5y+G(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi = x^2+yzx+x+y^2+5y+G(z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 2z+xy+3 \Leftrightarrow 0+yx+0+0+0+G'(z) = 2z+xy+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G'(z) = 2z+3 \Rightarrow G(z) = \int (2z+3)dz = z^2+3z+C$$

$$\boxed{\Phi = x^2+yzx+x+y^2+5y+z^2+3z+C}$$