Κεφάλαιο 2

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

1

Τα μαθηματικά της αριστοποίησης

- Πολλές οικονομικές θεωρίες ξεκινούν με την υπόθεση ότι ένα άτομο ή επιχείρηση επιδιώκουν να βρουν την άριστη τιμή μιας συνάρτησης
  - Οι καταναλωτές επιδιώκουν τη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας τους
  - Οι επιχειρήσεις επιδιώκουν μεγιστοποίηση των κερδών τους
- Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε γι' αυτά τα θέματα

2

Παράγωγοι

- Η παράγωγος της συνάρτησης $\pi = f(q)$ είναι το όριο του $\Delta\pi/\Delta q$ για κάθε μικρή μεταβολή στο q

$$\frac{d\pi}{dq} = \frac{df}{dq} = \lim_{h\to 0}\frac{f(q_1+h)-f(q_1)}{h}$$

- Η τιμή αυτού του λόγου εξαρτάται από την τιμή του q_1

3

Τιμή μιας παραγώγου σ' ένα σημείο

- Η τιμή της παραγώγου στο σημείο $q = q_1$ συμβολίζεται ως εξής

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q_1}$$

- Στο προηγούμενο παράδειγμα,

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q_1} > 0 \qquad \left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q_3} < 0 \qquad \left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q^*} = 0$$

4

Συνθήκες πρώτης τάξης για ένα μέγιστο

- Για μια συνάρτηση με μια μεταβλητή, η επίτευξη της μέγιστης τιμής της σ' ένα σημείο επιτυγχάνεται όταν η παράγωγος σ' αυτό το σημείο είναι μηδέν

$$\left.\frac{df}{dq}\right|_{q=q^*} = 0$$

5

Συνθήκες δεύτερης τάξης

- Αυτό σημαίνει ότι, για να είναι το q^* άριστο,

$$\frac{d\pi}{dq} > 0 \text{ for } q < q^* \qquad \text{και} \qquad \frac{d\pi}{dq} < 0 \text{ for } q > q^*$$

- Επομένως στο q^*, $d\pi/dq$ πρέπει να είναι φθίνον

6

Δεύτερες παράγωγοι

- Η παράγωγος μιας παραγώγου καλείται *δεύτερη παράγωγος*
- Η δεύτερη παράγωγος συμβολίζεται ως

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} \text{ or } \frac{d^2 f}{dq^2} \text{ or } f''(q)$$

7

Συνθήκες δεύτερης τάξης

- Η συνθήκη δεύτερης τάξης για ένα (τοπικό) μέγιστο είναι

$$\left.\frac{d^2\pi}{dq^2}\right|_{q=q^*} = f''(q)\big|_{q=q^*} < 0$$

8

Κανόνες για τον υπολογισμό των παραγώγων

$$1. \text{ Αν το } b \text{ είναι σταθερό, τότε } \frac{db}{dx} = 0$$

$$2. \text{ Αν το } b \text{ είναι σταθερό τότε } \frac{d[bf(x)]}{dx} = bf'(x)$$

$$3. \text{ Αν το } b \text{ είναι σταθερό, τότε } \frac{dx^b}{dx} = bx^{b-1}$$

$$4. \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

9

Κανόνες για τον υπολογισμό των παραγώγων

$$5. \frac{da^x}{dx} = a^x \ln a \quad \text{για κάθε σταθερά } a$$

- Μια ειδική περίπτωση αυτού του κανόνα είναι $de^x/dx = e^x$

10

Κανόνες για τον υπολογισμό των παραγώγων

- Έστω ότι $f(x)$ και $g(x)$ είναι δύο συναρτήσεις του x και ότι $f'(x)$ και $g'(x)$ υπάρχουν
- Τότε

$$6. \frac{d[f(x)+g(x)]}{dx} = f'(x) + g'(x)$$

$$7. \frac{d[f(x)\cdot g(x)]}{dx} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

11

Κανόνες για τον υπολογισμό των παραγώγων

$$8. \frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\text{δεδομένου ότι } \quad g(x) \neq 0$$

12

Κανόνες για τον υπολογισμό των παραγώγων

- Αν $y = f(x)$ και $x = g(z)$ και αν και οι δύο $f'(x)$ και $g'(x)$ υπάρχουν, τότε:

$$9.\quad \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz} = \frac{df}{dx}\cdot\frac{dg}{dz}$$

- Αυτό αποκαλείται αλυσωτός κανόνας. Ο αλυσωτός κανόνας μας δίνει τη δυνατότητα να εξετάζουμε το πως μια μεταβλητή (z) επηρεάζει μιαν άλλη μεταβλητή (y) μέσω της επίδρασης της σε μια ενδιάμεση μεταβλητή (x)

13

Κανόνες για τον υπολογισμό των παραγώγων

- Μερικά παραδείγματα του αλυσωτού κανόνα

$$10.\quad \frac{de^{ax}}{dx} = \frac{de^{ax}}{d(ax)}\cdot\frac{d(ax)}{dx} = e^{ax}\cdot a = ae^{ax}$$

$$11.\quad \frac{d[\ln(ax)]}{dx} = \frac{d[\ln(ax)]}{d(ax)}\cdot\frac{d(ax)}{dx} = \ln(ax)\cdot a = a\ln(ax)$$

$$12.\quad \frac{d[\ln(x^2)]}{dx} = \frac{d[\ln(x^2)]}{d(x^2)}\cdot\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x}$$

14

Παράδειγμα μεγιστοποίησης του κέρδους

- Έστω ότι η σχέση μεταξύ κέρδους και προϊόντος είναι

$$\pi = 1{,}000q - 5q^2$$

- Οι συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο είναι

$$d\pi/dq = 1{,}000 - 10q = 0$$

$$q^* = 100$$

- Αφού η δεύτερη παράγωγος είναι πάντοτε -10, $q = 100$ είναι ένα ολικό μέγιστο

15

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

- Οι περισσότεροι στόχοι των οικονομικών φορέων εξαρτώνται από πολλές μεταβλητές
  - Υπάρχουν αντίστροφες σχέσεις
- Η εξάρτηση μιας μεταβλητής (y) από μια σειρά άλλων μεταβλητών ($x_1,x_2,\ldots,x_n$) συμβολίζεται ως

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

16

Μερικές παράγωγοι

- Η μερική παράγωγος του y σε σχέση με το x_1 απεικονίζεται ως

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \text{ or } \frac{\partial f}{\partial x_1} \text{ or } f_{x_1} \text{ or } f_1$$

Όταν υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο, όλα τα άλλα x κρατούνται σταθερά

17

Μερικές παράγωγοι

- Ένας πιο τυπικός ορισμός της μερικής παραγώγου είναι

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n) - f(x_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)}{h}$$

18

Υπολογισμός μερικών παραγώγων

$$1.\ \text{If } y = f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2,\ \text{τότε}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = 2ax_1 + bx_2 \quad \text{κ}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = bx_1 + 2cx_2$$

$$2.\ \text{If } y = f(x_1, x_2) = e^{ax_1 + bx_2},\ \text{τότε}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = ae^{ax_1 + bx_2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = be^{ax_1 + bx_2}$$

Υπολογισμός μερικών παραγώγων

$$3.\ \text{Αν } y = f(x_1, x_2) = a\ln x_1 + b\ln x_2,\ \text{τότε}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = \frac{a}{x_1} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = \frac{b}{x_2}$$

Μερικές παράγωγοι

- Οι μερικές παράγωγοι είναι η μαθηματική έκφραση της υπόθεσης του *ceteris paribus*
  - Δείχνουν πως οι μεταβολές σε μια μεταβλητή επηρεάζουν κάποιο αποτέλεσμα όταν η επίδραση των άλλων μεταβλητών διατηρείται σταθερή

Μερικές παράγωγοι

- Πρέπει να μας ενδιαφέρει πως μετρώνται οι μεταβλητές
  - Αν *q* είναι η ποσότητα ζητούμενης βενζίνης (σε λίτρα) και *p* είναι η τιμή σε ευρώ ανά λίτρο, τότε $\partial q/\partial p$ μετρά τη μεταβολή στη ζήτηση (σε λίτρα για ένα έτος) για μια μεταβολή της τιμής κατά ένα ευρώ το λίτρο

Ελαστικότητα

- Η ελαστικότητα μετρά την ποσοστιαία μεταβολή μιας μεταβολής που προέρχεται από την ποσοστιαία μεταβολή μιας άλλης μεταβλητής
  - Δεν εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης
- Η ελαστικότητα του *y* ως προς *x* είναι

$$e_{y,x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y} = \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{x}{y}$$

Ελαστικότητα και μορφή συνάρτησης

- Έστω ότι

$y = a + bx +$ άλλοι όροι

- Σ' αυτή την περίπτωση,

$$e_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{x}{y} = b\cdot\frac{x}{y} = b\cdot\frac{x}{a + bx + \cdots}$$

- $e_{y,x}$ δεν είναι σταθερή
  - Είναι σημαντικό να δούμε σε πιο σημείο πρέπει να υπολογιστεί η ελαστικότητα

Ελαστικότητα και μορφή συνάρτησης

- Έστω ότι

$$y = ax^b$$

- Σ'α υτή την περίπτωση,

$$e_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x}{y} = abx^{b-1} \cdot \frac{x}{ax^b} = b$$

25

Ελαστικότητα και μορφή συνάρτησης

- Έστω ότι

$$\ln y = \ln a + b \ln x$$

- Στην περίπτωση αυτή,

$$e_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x}{y} = b \cdot \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x}$$

- Οι ελαστικότητες μπορούν να υπολογιστούν μέσω λογαριθμικής διαφόρισης

26

Δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι

- Η μερική παράγωγος μιας μερικής παραγώγου λέγεται δεύτερη μερική παράγωγος

$$\frac{\partial(\partial f / \partial x_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} = f_{ij}$$

27

Το θεώρημα του Young

- Κάτω από γενικές συνθήκες, η σειρά με την οποία γίνεται η μερική παραγώγιση για δεύτερες παραγώγους δεν έχει σημασία

$$f_{ij} = f_{ji}$$

28

Χρήση μερικών παραγώγων

- Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι παίζουν σημαντικό ρόλο στην οικονομική θεωρία
- Η δεύτερη μερική παράγωγος f_{ii}
  - Δείχνει πως η οριακή επίδραση του x_i επί της $y(\partial y/\partial x_i)$ αλλάζει καθώς η τιμή του x_i αυξάνει
  - Μια τιμή της $f_{ii} < 0$ δείχνει φθίνουσα οριακή επίδραση

29

Ολικό διαφορικό

- Έστω ότι $y = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
- Αν όλα τα x μεταβάλλονται κατά μια μικρή ποσότητα, η ολική επίδραση στο y είναι

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots + f_n dx_n$$

30

Συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο (ή ελάχιστο)

- Μια αναγκαία συνθήκη για μέγιστο (ή ελάχιστο) της συνάρτησης $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ είναι ότι $dy = 0$ για κάθε συνδυασμό μικρών μεταβολών στα x
- Ο μόνος τρόπος για να ισχύει αυτό είναι όταν

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$$

- Το σημείο στο οποίο ισχύει αυτή η σχέση Λέγεται *κρίσιμο σημείο*

Η εύρεση του μεγίστου

- Έστω ότι y είναι συνάρτηση των x_1 και x_2

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10$$

$$y = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5$$

- Οι συνθήκες πρώτης τάξης συνεπάγονται

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -2x_1 + 2 = 0 \qquad \text{ή} \qquad x_1^* = 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -2x_2 + 4 = 0 \qquad\qquad x_2^* = 2$$

Όριο παραγωγικών δυνατοτήτων

- Ας πάρουμε τη συνάρτηση: $2x^2 + y^2 = 225$ η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 225 = 0$$

- Αφού $f_x = 4x$ και $f_y = 2y$, το κόστος ευκαιρίας μεταξύ x και y είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = \frac{-4x}{2y} = \frac{-2x}{y}$$

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

- Συχνά δεν είναι δυνατό να λύσουμε πεπλεγμένες συναρτήσεις της μορφής $g(x,y)=0$ και να τις κάνουμε συναρτήσεις της μορφής $y = f(x)$
  - Οι μαθηματικοί έχουν συναγάγει τις αναγκαίες συνθήκες για την επίλυση τους
  - Σε πολλές οικονομικές εφαρμογές οι συνθήκες αυτές είναι οι ίδιες με εκείνες της δεύτερης τάξης για ένα μέγιστο (ή ελάχιστο)

Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης

- Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης αναφέρεται στο πως η άριστη τιμή μιας συγκεκριμένης συνάρτησης μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται μια παράμετρος της συνάρτησης
- Ας το δούμε με ένα παράδειγμα

Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης

- Έστω ότι το y είναι συνάρτηση του x

$$y = -x^2 + ax$$

- Για διάφορες τιμές του a, η συνάρτηση αυτή αντιπροσωπεύει μια οικογένεια ανεστραμμένων παραβολών
- Αν το a πάρει μια τιμή, τότε το y γίνεται συνάρτηση μόνο του x και μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του x που μεγιστοποιεί το y

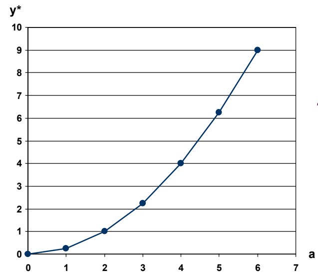
Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης

Άριστες τιμές του *x* και *y* για εναλλακτικές τιμές του *a*

Τιμή του *a*	Τιμή του *x**	Τιμή του *y**
0	0	0
1	1/2	1/4
2	1	1
3	3/2	9/4
4	2	4
5	5/2	25/4
6	3	9

37

Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης



Καθώς το *a* αυξάνει, Η μέγιστη τιμή του *y* (*y) αυξάνεται**

Η σχέση μεταξύ *a* και *y* τετραγωνική

38

Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης

- Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για το πως το *y** αλλάζει καθώς αλλάζει το *a*
- Υπάρχουν δύο τρόποι να το κάνουμε
  - Να υπολογίσουμε άμεσα την κλίση του *y*
  - Κρατούμε το *x* σταθερό στην άριστη τιμή του και υπολογίζουμε άμεσα το $\partial y/\partial a$

39

Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης

- Για να υπολογίσουμε την κλίση μιας συνάρτησης, πρέπει να τη λύσουμε για την άριστη τιμή του *x* για κάθε τιμή του *a*

$$dy/dx = -2x + a = 0$$

$$x^* = a/2$$

- Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$y^* = -(x^*)^2 + a(x^*) = -(a/2)^2 + a(a/2)$$

$$y^* = -a^2/4 + a^2/2 = a^2/4$$

40

Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης

- Άρα,

$$dy^*/da = 2a/4 = a/2 = x^*$$

- Αλλά, μπορούμε να κάνουμε το ίδιο πολύ πιο σύντομα με τη χρήση του θεωρήματος της περιβάλλουσας καμπύλης
  - Για μικρές αλλαγές στο *a*, το dy^*/da μπορεί να υπολογιστεί κρατώντας το *x* στο *x** και υπολογίζοντας άμεσα το $\partial y/\partial a$ από το *y*

41

Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης

$$\partial y/\partial a = x$$

- Θέτοντας το $x = x^*$

$$\partial y/\partial a = x^* = a/2$$

- Αυτό είναι το ίδιο αποτέλεσμα που βρήκαμε νωρίτερα

42

Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης

- Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης μας λέει ότι η μεταβολή στην άριστη τιμή μιας συνάρτησης σε σχέση με μια παράμετρο της συνάρτησης μπορεί να βρεθεί με τη μερική παραγώγιση της, με δεδομένο ότι όλα τα x (ή ορισμένα x) έχουν την άριστη τιμή τους

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial y}{\partial a}\{x = x^*(a)\}$$

43

Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης

- Το θεώρημα μπορεί να επεκταθεί και για την περίπτωση όπου το y είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών

$$y = f(x_1,\ldots x_n,a)$$

- Η εύρεση μιας άριστης τιμής του y θα σήμαινε την επίλυση n πρώτης τάξης εξισώσεων

$$\partial y/\partial x_i = 0 \quad (i = 1,\ldots,n)$$

44

Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης

- Οι άριστες τιμές των x μπορούν να γραφούν ως συνάρτηση του a

$$x_1^* = x_1^*(a)$$
$$x_2^* = x_2^*(a)$$
$$\vdots$$
$$x_n^* = x_n^*(a)$$

45

Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης

- Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην αρχική συνάρτηση έχουμε την άριστη τομή του y (y^*)

$$y^* = f[x_1^*(a), x_2^*(a),\ldots,x_n^*(a),a]$$

- Διαφορίζοντας έχουμε

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{da} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{da} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{da} + \frac{\partial f}{\partial a}$$

46

Το θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης

- Λόγω των συνθηκών πρώτης τάξης, όλοι οι όροι εκτός από το $\partial f/\partial a$ είναι ίσοι με μηδέν, αν τα x έχουν τις άριστες τιμές τους
- Άρα,

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial f}{\partial a}\{x = x^*(a)\}$$

47

Μεγιστοποίηση υπό περιορισμούς

- Τι θα συμβεί αν όλες οι τιμές των x δεν είναι εφικτές;
  - Οι τιμές του x ίσως πρέπει να είναι όλες θετικές
  - Οι επιλογές του καταναλωτή περιορίζονται από την αγοραστική του δύναμη
- Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων μεγιστοποίησης υπό περιορισμό είναι η μέθοδος του πολλαπλασιαστή του Lagrange

48

Η μέθοδος του πολλαπλασιαστή του Lagrange

- Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τις τιμές των $x_1, x_2, \ldots, x_n$ που μεγιστοποιούν τη συνάρτηση

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

υπό τον περιορισμό που επιτρέπει μόνο ορισμένες τιμές στα x

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

49

Η μέθοδος του πολλαπλασιαστή του Lagrange

- Η μέθοδος του πολλαπλασιαστή του Lagrange ξεκινά με τη δημιουργία της εξίσωσης

$$\mathbf{L} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

όπου το λ είναι μια επιπλέον μεταβλητή που λέγεται <u>πολλαπλασιαστής του Lagrange</u>

- Όταν ισχύει ο περιορισμός, $\mathbf{L} = f$ επειδή $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

50

Η μέθοδος του πολλαπλασιαστή του Lagrange

- Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι

$$\partial \mathbf{L}/\partial x_1 = f_1 + \lambda g_1 = 0$$

$$\partial \mathbf{L}/\partial x_2 = f_2 + \lambda g_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\partial \mathbf{L}/\partial x_n = f_n + \lambda g_n = 0$$

$$\partial \mathbf{L}/\partial \lambda = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

51

Η μέθοδος του πολλαπλασιαστή του Lagrange

- Οι συνθήκες πρώτης τάξης μπορεί να λυθούν για $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και λ
- Η λύση έχει δύο ιδιότητες:
  - τα x υπακούουν στον περιορισμό
  - αυτά τα x θα κάνουν την τιμή του $\mathbf{L}$ (και άρα του f) όσο το δυνατό μεγαλύτερη

52

Η μέθοδος του πολλαπλασιαστή του Lagrange

- Ο πολλαπλασιαστής του Lagrange (λ) μια σημαντική οικονομική ερμηνεία
- Οι συνθήκες πρώτης τάξης συνεπάγονται

$$f_1/\text{-}g_1 = f_2/\text{-}g_2 = \ldots = f_n/\text{-}g_n = \lambda$$

  - Οι αριθμητές μετρούν το οριακό όφελος που μια επιπλέον μονάδα του x_i αποφέρει στη συνάρτηση f
  - Οι παρονομαστές αντανακλούν το επιπλέον βάρος στον περιορισμό από τη χρήση επιπλέον x_i

53

Η μέθοδος του πολλαπλασιαστή του Lagrange

- Στις άριστες επιλογές των x, ο λόγος του οριακού οφέλους από την αύξηση του x_i προς το οριακό κόστος της αύξησης του x_i πρέπει να είναι ο ίδιος για όλα τα x
- λ είναι ο κοινός λόγος κόστους-οφέλους για όλα τα x

$$\lambda = \frac{\text{οριακό όφελος του } x_i}{\text{οριακό κόστος του } x_i}$$

54

Η μέθοδος του πολλαπλασιαστή του Lagrange

- Αν χαλαρώσουμε λίγο τον περιορισμό, δεν ενδιαφέρει ποιο *x* αλλάζει
- Ο πολλαπλασιαστής του Lagrange δίνει ένα μέτρο του πως η χαλάρωση του περιορισμού επηρεάζει την τιμή του *y*
- λ δίνει τη "σκιώδη τιμή" του περιορισμού

55

Η μέθοδος του πολλαπλασιαστή του Lagrange

- Μια ψηλή τιμή του λ δείχνει ότι το *y* μπορεί να αυξηθεί σημαντικά με τη χαλάρωση του περιορισμού
  - Κάθε *x* έχει ένα ψηλό λόγο κόστους-οφέλους
- Μια χαμηλή τιμή του λ δείχνει ότι δεν υπάρχουν πολλά οφέλη από τη χαλάρωση του περιορισμού
- $\lambda=0$ σημαίνει ότι ο περιορισμός δεν ισχύει

56

Δυαδικότητα

- Κάθε πρόβλημα μεγιστοποίησης υπό περιορισμό συνδέεται με ένα δυαδικό πρόβλημα *ελαχιστοποίησης* υπό περιορισμό, που δίνει προσοχή στους περιορισμούς του αρχικού προβλήματος

57

Δυαδικότητα

- Τα άτομα μεγιστοποιούν τη χρησιμότητα υπό έναν εισοδηματικό περιορισμό
  - Δυαδικό πρόβλημα: τα άτομα ελαχιστοποιούν τη δαπάνη που απαιτείται για να επιτύχουν ένα συγκεκριμένο επίπεδο χρησιμότητας
- Οι επιχειρήσεις ελαχιστοποιούν το κόστος των εισροών για να παραγάγουν ένα συγκεκριμένο επίπεδο προϊόντος
  - Δυαδικό πρόβλημα : οι επιχειρήσεις μεγιστοποιούν το προϊόν για ένα δεδομένο κόστος των συντελεστών παραγωγής

58

Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Έστω ότι ένας αγρότης έχει μια ποσότητα πλεκτού (P) και επιθυμεί να περιφράξει το μεγαλύτερο δυνατό σχήμα ορθογωνίου
- Έστω x το μήκος της μιας πλευράς
- Έστω y το μήκος της άλλης πλευράς
- πρόβλημα: επιλέξτε το x και το y έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν ($A = x\cdot y$) υπό τον περιορισμό ότι η περίμετρος είναι σταθερή στο $P = 2x + 2y$

59

Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Η εξίσωση του Lagrange

$$\mathbf{L} = x\cdot y + \lambda(P - 2x - 2y)$$

- Οι συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο είναι

$$\partial \mathbf{L}/\partial x = y - 2\lambda = 0$$

$$\partial \mathbf{L}/\partial y = x - 2\lambda = 0$$

$$\partial \mathbf{L}/\partial \lambda = P - 2x - 2y = 0$$

60

Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Αφού $y/2 = x/2 = \lambda$, το x πρέπει να είναι ίσο με το y
  - Το χωράφι πρέπει να είναι τετράγωνο
  - x και y πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε ο λόγος οριακού οφέλους προς το οριακό κόστους για όλα να είναι ο ίδιος
- Αφού $x = y$ και $y = 2\lambda$, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον περιορισμό για να δείξουμε ότι

$$x = y = P/4$$

$$\lambda = P/8$$

61

Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Ερμηνεία του πολλαπλασιαστή του Lagrange
  - Αν ο αγρότης ήθελε να ξέρει πόσο επιπλέον χωράφι θα μπορούσε να περιφραχτεί με την προσθήκη ενός επιπλέον μέτρου πλεκτού, το λ μας λέει ότι μπορούμε να το βρούμε αν διαιρέσουμε την τωρινή περίμετρο (P) με 8
  - Άρα ο πολλαπλασιαστής του Lagrange μας δίνει πληροφορίες για την υπονοούμενη τιμή του περιορισμού

62

Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Δυαδικό πρόβλημα: επίλεξε το x και το y για να ελαχιστοποιήσεις το ποσό του πλεκτού που χρειάζεται για να γίνει η περίφραξη

ελαχιστοποίησε $P = 2x + 2y$

υπό τον περιορισμό $A = x \cdot y$

- Η εξίσωση του Lagrange:

$$\mathbf{L}^D = 2x + 2y + \lambda^D(A - x \cdot y)$$

63

Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\partial \mathbf{L}^D/\partial x = 2 - \lambda^D \cdot y = 0$$

$$\partial \mathbf{L}^D/\partial y = 2 - \lambda^D \cdot x = 0$$

$$\partial \mathbf{L}^D/\partial \lambda^D = A - x \cdot y = 0$$

- Λύνοντας βρίσκουμε

$$x = y = A^{1/2}$$

- Ο πολλαπλασιαστής του Lagrange (λ^D) = $2A^{-1/2}$

64

Θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης & Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Έστω ότι θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση

$$y = f(x_1,\ldots,x_n;a)$$

υπό τον περιορισμό

$$g(x_1,\ldots,x_n;a) = 0$$

- Ένας τρόπος επίλυσης είναι με τη μέθοδο του Lagrange και να βρούμε τις συνθήκες πρώτης τάξης

65

Θεώρημα της περιβάλλουσας καμπύλης & Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Εναλλακτικά, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$dy^*/da = \partial \mathbf{L}/\partial a(x_1^*,\ldots,x_n^*;a)$$

- Η μεταβολή στη μέγιστη τιμή του y που προκύπτει όταν το a αλλάζει μπορεί να βρεθεί με μερική διαφόριση του **L** and και να βρούμε την τιμή της μερικής παραγώγου σ' αυτό το σημείο

66

Περιορισμοί ανισοτήτων

- Σε μερικά οικονομικά προβλήματα οι περιορισμοί δεν ισχύουν επακριβώς
- Π.χ , έστ προς μεγιστοποίηση η $y = f(x_1,x_2)$ υπό τον περιορισμό

$$g(x_1,x_2) \geq 0,$$
$$x_1 \geq 0, \text{ και}$$
$$x_2 \geq 0$$

67

Περιορισμοί ανισοτήτων

- Ένας τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι να εισαγάγουμε τρεις νέες μεταβλητές One way (a, b, και c) που μετατρέπουν τις ανισότητες ισότητες
- Για να είμαστε σίγουροι ότι οι ανισότητες συνεχίζουν να ισχύουν, θα πάρουμε τα τετράγωνα αυτών των νέων μεταβλητών για να είμαστε βέβαιοι ότι οι τιμές τους είναι θετικές

68

Περιορισμοί ανισοτήτων

$$g(x_1,x_2) - a^2 = 0;$$
$$x_1 - b^2 = 0; \text{ και}$$
$$x_2 - c^2 = 0$$

- Κάθε λύση που υπακούει αυτούς τους τρεις περιορισμούς ισότητας θα υπακούουν επίσης και στους περιορισμούς ανισοτήτων

69

Περιορισμοί ανισοτήτων

- Η εξίσωση του Lagrange

$$\mathbf{L} = f(x_1,x_2) + \lambda_1[g(x_1,x_2) - a^2] + \lambda_2[x_1 - b^2] + \lambda_3[x_2 - c^2]$$

- Συνθήκες πρώτης τάξης

70

Περιορισμοί ανισοτήτων

$$\partial\mathbf{L}/\partial x_1 = f_1 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 = 0$$
$$\partial\mathbf{L}/\partial x_2 = f_1 + \lambda_1 g_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\partial\mathbf{L}/\partial a = -2a\lambda_1 = 0$$
$$\partial\mathbf{L}/\partial b = -2b\lambda_2 = 0$$
$$\partial\mathbf{L}/\partial c = -2c\lambda_3 = 0$$
$$\partial\mathbf{L}/\partial \lambda_1 = g(x_1,x_2) - a^2 = 0$$
$$\partial\mathbf{L}/\partial \lambda_2 = x_1 - b^2 = 0$$
$$\partial\mathbf{L}/\partial \lambda_3 = x_2 - c^2 = 0$$

71

Περιορισμοί ανισοτήτων

- Σύμφωνα με την τρίτη συνθήκη, είτε $a=0$ είτε $\lambda_1 = 0$
  - Αν $a = 0$, ο περιορισμός $g(x_1,x_2)$ ισχύει
  - Αν $\lambda_1 = 0$, τότε ο περιορισμός είναι ανενεργός

72

Περιορισμοί ανισοτήτων

- Αυτά τα αποτελέσματα είναι γνωστά ως συνθήκες Kuhn-Tucker
  - Οι συνθήκες αυτές δείχνουν ότι οι λύσεις σε προβλήματα αριστοποίησης με περιορισμούς που είναι ανισότητες διαφέρουν από προβλήματα με περιορισμούς ισότητας κατά πολύ απλό τρόπο
  - Άρα εργαζόμενοι με περιορισμούς ισότητας δεν θα κάνουμε λάθος

Συνθήκες δεύτερης τάξης – Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

- Έστω ότι $y = f(x)$
- Μια αναγκαία συνθήκη για μέγιστο είναι

$$dy/dx = f'(x) = 0$$

- Για να έχουμε μέγιστο, το y πρέπει να είναι φθίνον για μεταβολές γύρω από το σημείο αυτό

Συνθήκες δεύτερης τάξης – Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

- Το ολικό διαφορικό μετρά τη μεταβολή στο y

$$dy = f'(x)\,dx$$

- Για να έχουμε μέγιστο, το dy πρέπει να φθίνει για μικρές αυξήσεις του x
- Για να δούμε τη μεταβολή στο dy, πρέπει να πάρουμε τη δεύτερη παράγωγο του y

Συνθήκες δεύτερης τάξης – Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

$$d^2y = \frac{d[f'(x)dx]}{dx}\cdot dx = f''(x)dx\cdot dx = f''(x)dx^2$$

- Αφού το $d^2y < 0$ συνεπάγεται $f''(x)dx^2 < 0$
- Το dx^2 είναι θετικό, $f''(x) < 0$
- Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f πρέπει να είναι κοίλη στο κρίσιμο σημείο

Συνθήκες δεύτερης τάξης – Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

- Έστω ότι $y = f(x_1, x_2)$
- Οι συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο είναι

$$\partial y/\partial x_1 = f_1 = 0$$

$$\partial y/\partial x_2 = f_2 = 0$$

- Για να είναι το σημείο μέγιστο, το y πρέπει να φθίνει για μεταβολές γύρω από το σημείο.

Συνθήκες δεύτερης τάξης – Συναρτήσεις δύο μεταβλητων

- Η κλίση στη κατεύθυνση x_1 , η (f_1) πρέπει να μειώνεται στο κρίσιμο σημείο
- Η κλίση στη κατεύθυνση x_2, η (f_2) πρέπει να μειώνεται στο κρίσιμο σημείο
- Για να είμαστε όμως βέβαιοι ότι το dy μειώνεται για όλες τις μεταβολές γύρω από το κρίσιμο σημείο,πρέπει να δούμε ποις συνθήκες θα επιβληθούν στη σταυροειδή παράγωγο, ($f_{12} = f_{21}$)

Συνθήκες δεύτερης τάξης – Συναρτήσεις δύο μεταβλητων

- Το ολικό διαφορικό του *y* είναι

$$dy = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2$$

- Το διαφορικό της πιο πάνω συνάρτησης είναι

$$d^2y = (f_{11}dx_1 + f_{12}dx_2)dx_1 + (f_{21}dx_1 + f_{22}dx_2)dx_2$$

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + f_{12}dx_2dx_1 + f_{21}dx_1\, dx_2 + f_{22}dx_2^2$$

- Σύμφωνα με θεώρημα του Young, $f_{12} = f_{21}$ και

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2$$

Συνθήκες δεύτερης τάξης – Συναρτήσεις δύο μεταβλητων

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2$$

- Για να είναι η εξίσωση αυτή αδιαμφισβήτητα αρνητική για κάθε μεταβολή των x, τα f_{11} και f_{22} πρέπει να είναι αρνητικά
- Αν $dx_2 = 0$, τότε $d^2y = f_{11}\, dx_1^2$
  - for $d^2y < 0$, $f_{11} < 0$
- Αν $dx_1 = 0$, τότε $d^2y = f_{22}\, dx_2^2$
  - για $d^2y < 0$, $f_{22} < 0$

Συνθήκες δεύτερης τάξης – Συναρτήσεις δύο μεταβλητων

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2$$

- Αν ούτε το dx_1 ούτε το dx_2 είναι μηδέν, τότε το d^2y θα είναι αδιαμφισβήτητα αρνητικό μόνο αν

$$f_{11}\, f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

  - Οι δεύτερες παράγωγοι (f_{11} και f_{22}) πρέπει να είναι επαρκώς αρνητικές ώστε να αντισταθμίζουν κάθε πιθανά περίεργα αποτελέσματα από τις σταυροειδείς παραγώγους ($f_{12} = f_{21}$)

Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Έστω ότι επιλέγουμε το x_1 και το x_2 για να μεγιστοποιηθεί η εξίσωση

$$y = f(x_1, x_2)$$

- Υπό το γραμμικό περιορισμό

$$c - b_1x_1 - b_2x_2 = 0$$

- Η εξίσωση του Lagrange είναι

$$\mathbf{L} = f(x_1, x_2) + \lambda(c - b_1x_1 - b_2x_2)$$

Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι

$$f_1 - \lambda b_1 = 0$$

$$f_2 - \lambda b_2 = 0$$

$$c - b_1x_1 - b_2x_2 = 0$$

- Για να έχουμε μέγιστο, πρέπει να πάρουμε το δεύτερο ολικό διαφορικό

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2$$

Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Μόνο οι τιμές των x_1 και x_2 που ικανοποιούν τον περιορισμό μπορεί να θεωρηθούν αξιόπιστες εναλλακτικές τιμές για το κρίσιμο σημείο
- Έτσι, πρέπει να υπολογίσουμε το ολικό διαφορικό του περιορισμού

$$-b_1\, dx_1 - b_2\, dx_2 = 0$$

$$dx_2 = -(b_1/b_2)dx_1$$

- Αυτές είναι οι επιτρεπτές σχετικές μεταβολές των x_1 και x_2

Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Επειδή οι συνθήκες πρώτης τάξης συνεπάγονται ότι $f_1/f_2 = b_1/b_2$, μπορούμε με αντικατάσταση να βρούμε
$$dx_2 = -(f_1/f_2)\, dx_1$$
- Αφού
$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2$$
μπορούμε να αντικαταστήσουμε το dx_2 για να βρούμε
$$d^2y = f_{11}dx_1^2 - 2f_{12}(f_1/f_2)dx_1^2 + f_{22}(f_1^2/f_2^2)dx_1^2$$

85

Μεγιστοποίηση υπό περιορισμό

- Με συνδιασμούς και αναδιατάξεις βρίσκουμε
$$d^2y = f_{11}\, f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2\, [dx_1^2/\, f_2^2]$$
- Άρα, για $d^2y < 0$, τότε πρέπει να ισχύει
$$f_{11}\, f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2 < 0$$
- Η εξίσωση αυτή χαρακτηρίζει ένα σύνολο <u>οιονεί κοίλων συναρτήσεων</u>
  - Δύο οποιαδήποτε σημεία μέσα στο σύνολο μπορούν να συνδεθούν με μια γραμμή, η οποία είναι ολόκληρη εντός του συνόλου

86

Κοίλες και οιονεί-κοίλες συναρτήσεις

- Οι διαφορές μεταξύ κοίλων και οιονεί-κοίλων συναρτήσεων μπορούν να διευκρινιστούν με υη συνάρτηση
$$y = f(x_1,x_2) = (x_1 \cdot x_2)^k$$
όπου τα x παίρνουν μόνο θετικές τιμές και το k μπορεί να πάρει διάφορες θετικές τιμές

87

Κοίλες και οιονεί-κοίλες συναρτήσεις

- Ανεξάρτητα από τις τιμές του k, η συνάρτηση αυτή είναι οιονεί-κοίλη
- Το αν η συνάρτηση είναι κοίλη εξαρτάται από τις τιμές του k
  - Αν $k < 0.5$, η συνάρτηση είναι κοίλη
  - Αν $k > 0.5$, η συνάρτηση είναι κυρτή

88

Ομογενείς συναρτήσεις

- Μια συνάρτηση $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ λέγεται ότι είναι <u>ομογενής βαθμού k</u> αν
$$f(tx_1,tx_2,\ldots tx_n) = t^k f(x_1,x_2,\ldots x_n)$$
  - Αν μια συνάρτηση είναι ομογενής πρώτου βαθμού, ένας διπλασιασμός όλων των μεταβλητών διπλασιάζει την τιμή της συνάρτησης
  - Αν μια συνάρτηση είναι ομογενής μηδενικού βαθμού, ένας διπλασιασμός όλων των μεταβλητών αφίνει την τιμή της συνάρτησης αμετάβλητη

89

Ομογενείς συναρτήσεις

- Αν μια συνάρτηση είναι ομογενής βαθμού k, οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης θα είναι ομογενείς βαθμού k-1

90

Το θεώρημα του Euler

- Αν διαφορίσουμε τον ορισμό για την ομογένεια σε σχέση με ένα συντελεστή αναλογικότητας t, έχουμε ότι

$$kt^{k-1}f(x_1,\ldots,x_n) = x_1f_1(tx_1,\ldots,tx_n) + \ldots + x_nf_n(x_1,\ldots,x_n)$$

- Η σχέση αυτή λέγεται <u>θεώρημα του Euler</u>

Το θεώρημα του Euler

- Το θεώρημα του Euler δείχνει ότι,για τις ομογενείς συναρτήσεις, υπάρχει μια σαφής σχέση μεταξύ των τιμών της συνάρτησης και των τιμών των μερικών της παραγώγων

Ομοθετικές συναρτήσεις

- Μια <u>ομοθετική</u> συνάρτηση είναι εκείνη που προέρχεται από το μονοτονικό μετασχηματισμό μιας ομογενούς συνάρτησης
  - Οι συναρτήσεις αυτές δεν έχουν τις ιδιότητες των συναρτήσεων από τις οποίες προέρχονται

Ομοθετικές συναρτήσεις

- Τόσο για τις ομογενείς όσο και οι ομοθετικές συναρτήσεις, οι σχέσεις μεταξύ μεταβλητών εξαρτώνται από το λόγο αυτών των μεταβλητών και όχι από τις απόλυτες τιμές τους

Ομοθετικές συναρτήσεις

- Έστω ότι έχουμε τη συνάρτηση $f(x,y) = 0$
- Η σχέση μεταξύ x και y είναι

$$dy/dx = -f_x/f_y$$

- Αν υποθέσουμε ότι η f είναι ομογενής βαθμού k, οι μερικές της παράγωγοι θα είναι ομογενείς k-1 βαθμού

Ομοθετικές συναρτήσεις

- Η σχέση μεταξύ x και y είναι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{t^{k-1}f_x(tx,ty)}{t^{k-1}f_y(tx,ty)} = -\frac{f_x(tx,ty)}{f_y(tx,ty)}$$

- Αν $t = 1/y$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'f_x\left(\frac{x}{y},1\right)}{F'f_y\left(\frac{x}{y},1\right)} = -\frac{f_x\left(\frac{x}{y},1\right)}{f_y\left(\frac{x}{y},1\right)}$$

Ομοθετικές συναρτήσεις

- Η σχέση δεν μεταβάλλεται από το μονοτονικό μετασχηματισμό και παραμένει συνάρτηση μόνο του λόγου των *x* προς *y*

97