

ΕΚΠΑ-ΝΟΠΕ-ΤΟΕ

# ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διδάσκων: Στ. Κώτσιος

Άνοιξη 2013

## *ΕΡΓΑΣΙΑ 2<sup>η</sup>*

<b>ΑΜ:</b>	
<b>ΕΠΩΝΥΜΟ:</b>	
<b>ΟΝΟΜΑ:</b>	
<b>ΒΑΘΜΟΣ:</b>	

**Άσκηση 1<sup>η</sup>:** Να διερευνηθεί με την μέθοδο των οριζουσών, το σύστημα:

$$x - by = c - b$$

$$ax - (b + 2c)y = a$$

Για τις διάφορες τιμές των a,b,c.

**Άσκηση 2<sup>η</sup>:** Να επιλυθεί με γραμμοπράξεις το σύστημα:

$$x - y + z = 1$$

$$3x + y - z = 2$$

$$5x - y + z = 4$$

**Άσκηση 3<sup>η</sup>:** Να μελετηθεί και επιλυθεί το σύστημα:

$$x + y = 2$$

$$2x - y = 1$$

$$4x - 5y = -1$$

$$7x - 11y = -4$$

**Άσκηση 4<sup>η</sup>:** Να μελετηθεί και επιλυθεί το σύστημα:

$$5x - 2y + 8z + w = 12$$

$$x + y + z - w = 2$$

$$3x - 4y + 6z + 3w = 8$$

$$7x - 7y + 13z + 5w = 18$$

**Άσκηση 5<sup>η</sup>:** Να μελετηθεί και επιλυθεί το σύστημα:

$$2x + 3y - z + w = 0$$

$$8x + 12y - 9z + 8w = 0$$

$$4x + 6y + 3z - 2w = 0$$

$$2x + 3y + 9z - 7w = 0$$

**Άσκηση 6<sup>η</sup>:** Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος  $\vec{u} = (1, -1, 0, 3)$  πάνω στο διάνυσμα  $\vec{v} = (0, 1, 1, -4)$ .

**Άσκηση 7<sup>η</sup>:** Ποια από τα επόμενα σύνολα είναι γραμμικοί υπόχωροι του συνόλου όλων των πραγματικών ακολουθιών;

- 1) Όλες οι ακολουθίες που είναι ίσες με μηδέν από ένα n και μετά.
- 2) Όλες οι φθίνουσες ακολουθίες.
- 3) Όλες οι συγκλίνουσες ακολουθίες.
- 4) Όλες οι αριθμητικές πρόοδοι.
- 5) Όλες οι γεωμετρικές πρόοδοι.

**Άσκηση 8<sup>η</sup>:** Ναδειχθεί ότι τα διανύσματα  $u_1, u_2, \dots, u_n$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνον αν τα διανύσματα  $u_1, u_2 + a_2 u_1, u_3 + a_3 u_1, \dots, u_n + a_n u_1$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

**Άσκηση 9<sup>η</sup>:** Ναδειχθεί ότι τα διανύσματα  $(1, 0, 0, 4), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 2)$  αποτελούν βάση στο  $R^4$  και να βρεθούν οι συντεταγμένες ενός τυχαίου διανύσματος ως προς αυτή την βάση.

**Άσκηση 10<sup>η</sup>:** Εξετάσατε εάν υπάρχει αριθμός  $a$  τέτοιος ώστε τα διανύσματα  $(1, 1, 1)$  και  $(1, a, a^2)$  να αποτελούν βάση του  $R^3$ . (προσοχή ο εκθέτης είναι 3)

**Άσκηση 11<sup>η</sup>:** Έστωσαν οι υπόχωροι:

$$U = \{(x, y, z, w), \quad y + z + w = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, w)\}, \quad x + y = 0, \quad y - 2w = 0\}$$

Βρείτε μία βάση και την διάσταση της τομής τους και του αθροίσματος τους.

**Άσκηση 12<sup>η</sup>:** Να βρείτε μία βάση και την διάσταση του υπόχωρου που παράγεται από τα διανύσματα  $(1, 2, 0), (4, 0, -7)$  και  $(0, 1, 3)$ .

**Άσκηση 13<sup>η</sup>:** Δίδεται ο γραμμικός χώρος των  $2 \times 2$  πινάκων  $M_2(R)$  και το σύνολο  $U$ :

$$U = \left\{ A \in M_2(R) : A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A \right\}$$

Δείξατε ότι το  $U$  είναι υπόχωρος. Να βρείτε μία βάση και την διάσταση αυτού του υπόχωρου.

**Άσκηση 14<sup>η</sup>:** Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  έτσι, ώστε

$$T(1, 1, 1) = T(1, 1, -1) = (0, 0, 0) \text{ και } T(-1, 0, 1) = (2, 0, -2).$$

(i) Προσδιορίστε τον τύπο του γραμμικού μετασχηματισμού  $T$ . (ii) Να βρεθεί μία βάση της εικόνας και μία βάση του πυρήνα του  $T$ .

**Άσκηση 15<sup>η</sup>:** Θεωρείστε τον γραμμικό μετασχηματισμό αναστροφής κάθε 2 επί 2 πίνακα και βρείτε τον πίνακα του, ως προς την κανονική βάση των πινάκων.

**Άσκηση 16<sup>η</sup>:** Δίδεται η γραμμική απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, 3y - z, x - y + 2z)$$

Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της. Είναι η  $f$  αντιστρέψιμη; Αν ναι να υπολογισθεί η αντίστροφος της.

# ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΗ
2. Η ΕΡΓΑΣΙΑ ΘΑ ΠΑΡΑΔΟΘΕΙ ΤΗΝ ΗΜΕΡΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ
3. ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΘΑ ΛΑΒΕΙ ΧΩΡΑ ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΡΟΦΟΡΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ.
4. Η ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΘΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΘΕΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΤΥΠΟ

$$B = \begin{cases} \Gamma\rho, & \Gamma\rho < 5 \\ \max\left\{\Gamma\rho, \frac{\Gamma\rho + E\rho}{2}\right\} & \Gamma\rho \geq 5 \end{cases}$$

ΟΠΟΥ  $\Gamma\rho$  Ο ΒΑΘΜΟΣ ΤΩΝ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ  $E\rho$  Ο ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ ΤΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ