



## Θεωρία Οικονομικής Μεγέθυνσης

Νίκος Θεοχαράκης

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών  
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Απρίλιος 2022

### Ερωτήσεις στις οποίες θα πρέπει να μπορείτε να απαντήσετε για την πρόοδο της 3<sup>ης</sup> Μαΐου 2022

1. Το ΑΕΠ μιας χώρας μεγεθύνεται με σταθερό ρυθμό μεγέθυνσης 10% τον χρόνο. Υποθέτουμε ότι το ΑΕΠ είναι μια συνεχής χρονική μεταβλητή  $y(t)$ . Σε πόσα χρόνια θα δεκαπλασιασθεί το ΑΕΠ; Σε πόσα χρόνια θα εκατονταπλασιασθεί; Δίνεται ότι  $\ln(10)=2,3$
2. Έστω μια επιδημία η οποία μεταδίδεται με τρόπο που τα κρούσματα σωρευτικά αυξάνονται με σταθερό ρυθμό τον πρώτο χρόνο. Το πρώτο κρούσμα εμφανίστηκε την 1/1/2020 και μέχρι το τέλος του έτους είχαμε τρία εκατομμύρια κρούσματα. Το πρώτο τρίμηνο του 2021 παρατηρήθηκε αύξηση των κρουσμάτων κατά ένα εκατομμύριο. Ποιος ήταν ο ρυθμός αύξησης το 2020; Ποιος ήταν ο ρυθμός αύξησης το α τρίμηνο του 2021; Αν είχε διατηρηθεί ο ρυθμός αύξησης του 2020 και το 2021 ποια θα ήταν τα συνολικά κρούσματα στο τέλος του α τριμήνου του 2021; (Μπορείτε να μην κάνετε τις πράξεις, αλλά να γράψετε τους τύπους).
3. Έστω ότι μια διακριτή χρονική μεταβλητή λαμβάνει τις τιμές  $Y_0, Y_1, \dots, Y_t, \dots, Y_T$  στις χρονικές περιόδους. Υπολογίστε τον μέσο ρυθμό μεγέθυνσης ανά χρονική περίοδο για το διάστημα από 0 έως  $T$ .
4. Αν η μεταβλητή αυτή ήταν συνεχής πως θα υπολογίζατε τον μέσο ρυθμό μεγέθυνσης από  $Y_0$  έως  $Y_T$ ; Ποιος ρυθμός μεγέθυνσης από τους δύο είναι ο μεγαλύτερος; Μπορείτε να το εξηγήσετε;
5. Έστω μία συνεχής χρονική μεταβλητή που μεγεθύνεται με σταθερό ρυθμό  $g$ . Κατασκευάστε το διάγραμμα της εξέλιξης στο χρόνο του λογαριθμικού της μετασχηματισμού.
6. Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης μιας συνεχούς χρονικής μεταβλητής ισούται με την πρώτη παράγωγο του φυσικού λογαρίθμου της μεταβλητής ως προς τον χρόνο.
7. Εφαρμόστε τον κανόνα γραμμικής προσέγγισης πρώτου βαθμού του Taylor  $[f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)]$  προκειμένου να αποδείξετε ότι  $e^x \approx 1 + x$ , για μικρά  $x$ , δηλαδή κοντά στο μηδέν.

8. Ποια είναι η θεμελιώδης εξίσωση του υποδείγματος Harrod;
9. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ πραγματικού και συστημικού ρυθμού μεγέθυνσης στο υπόδειγμα Harrod;
10. Είναι το υπόδειγμα Harrod ευσταθές; Είναι δυνατή η ύπαρξη ανεργίας στο υπόδειγμα Harrod;
11. Ποια είναι η βασική διαφορά του υποδείγματος Harrod με το υπόδειγμα Solow-Swan;
12. Χρησιμοποιείτε το παραπάνω θεώρημα για να υπολογίσετε τον ρυθμό μεγέθυνσης της μεταβλητής  $Y(t)$  συναρτήσει των ρυθμών μεγέθυνσης των  $K(t)$  και  $L(t)$  – οι οποίοι δίδονται εξωγενώς και είναι σταθεροί – και των λοιπών παραμέτρων της εξίσωσης  $Y(t) = AK^\alpha(t)L^\beta(t)$
13. Αν  $\hat{L}(t) \equiv \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n$  και  $\hat{A}(t) \equiv \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g$  υπολογίστε τους ρυθμούς μεγέθυνσης των  $K(t)$  και  $\tilde{k}(t)$  όπου  $k(t) \equiv \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$ ,  $\tilde{k}(t) \equiv \frac{K(t)}{L(t)}$ , όταν  $\dot{k}(t) = 0$
14. Έστω ένα υπόδειγμα Solow-Swan με τις συνήθεις υποθέσεις και σύμβολα των μεταβλητών. Η συνάρτηση παραγωγής στην εντατική μορφή είναι  $y(t) = k(t)^\alpha$  όπου  $y(t)$  είναι το προϊόν και  $k(t)$  το κεφάλαιο ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας  $A(t)L(t)$  αντίστοιχα.
  - a. Ποια είναι η εξίσωση η οποία μας δίνει το διάγραμμα φάσης του υποδείγματος; Μπορείτε να την εξαγάγετε από τις βασικές παραδοχές του υποδείγματος;
  - b. Υπολογίστε τα σημεία ισορροπίας  $k^*$ ,  $y^*$  για το υπόδειγμα.
  - c. Αποδείξτε ότι το υπόδειγμα είναι ευσταθές στα σημεία αυτά.
  - d. Ποιοι είναι οι ρυθμοί μεγέθυνσης σε σταθερή κατάσταση του κεφαλαίου  $K^*$  και του προϊόντος  $Y^*$ , καθώς και του κατά κεφαλήν κεφαλαίου και προϊόντος  $\tilde{k}^*$ ,  $\tilde{y}^*$  αντίστοιχα;
  - e. Κατασκευάστε το σχετικό διάγραμμα που δείχνει το σημείο ισορροπίας και το διάγραμμα φάσης.
  - f. Κατασκευάστε το διάγραμμα που δείχνει τον ρυθμό μεγέθυνσης του  $k(t)$ . Τι συμπεράσματα εξαγάγετε από το διάγραμμα αυτό ως προς την υπόθεση της απόλυτης σύγκλισης των οικονομιών;
15. Ποιο είναι το ποσοστό αποταμίευσης στον Χρυσό Κανόνα; Αποδείξτε το στη γενική περίπτωση και στην ειδική περίπτωση όπου  $y(t) = k(t)^\alpha$ .
16. Η μετάβαση από την κατάσταση ισορροπίας στην κατάσταση ισορροπίας του Χρυσού Κανόνα είναι κυρίαρχη κατά Pareto;
17. Τι συμβαίνει στο υπόδειγμα όταν μεταβάλλεται το ποσοστό αποταμίευσης; Μεταβάλλονται οι ρυθμοί μεγέθυνσης;
18. Ποιος είναι ο ρόλος του social planner στο υπόδειγμα Solow-Swan και στο υπόδειγμα Ramsey-Cass-Koopmans;