

ΘΕΜΑ 1

Με τη μέθοδο OLS εκτιμήθηκε το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$(1) \quad Y_t = \beta_0 + \beta_1 S_t + \beta_2 S_t^2 + u_t$$

όπου Y είναι το ωρομίσθιο (σε €) και S είναι η εκπαίδευση (σε επίπεδα 0=υποχρεωτική, 1=λυκειακή, 2=προπτυχιακή, 3=μεταπτυχιακή). Με βάση ένα δείγμα 25 ατόμων βρέθηκε ότι

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad XY = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \quad SST = 8, \quad SSR = 5,8$$

α) (βαθμοί: 1) Να βρεθεί η εκτιμώμενη γραμμή παλινδρόμησης. Να βρεθεί και να ερμηνευθεί ο συντελεστής προσδιορισμού.

β) (βαθμοί: 1) Να βρεθεί ο εκτιμώμενος πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών.

γ) (βαθμοί: 1) Να βρεθεί το 95% διάστημα πρόβλεψης για το ωρομίσθιο ενός ατόμου με προπτυχιακή εκπαίδευση.

δ) (βαθμοί: 1,5) Έστω τώρα ότι με βάση το ίδιο δείγμα εκτιμήθηκε με τη μέθοδο OLS η ακόλουθη παλινδρόμηση

$$(2) \quad \hat{Y}_t = 2,5 - 1,5F_t + 6,6S_t + 0,8(S_t \cdot F_t) + 2,7S_t^2 + 0,4(S_t^2 \cdot F_t), \quad SSR = 7,05$$

όπου F είναι το φύλο (με $F_t = 1$ αν το άτομο t είναι γυναίκα και $F_t = 0$ αλλού). Ποια υπόθεση μπορεί να ελεγχθεί με βάση τις παλινδρομήσεις (1) και (2); Να γίνει ο σχετικός στατιστικός έλεγχος. ($\alpha=0,05$). Τι συμπεραίνετε για τις ιδιότητες των OLS εκτιμητών των συντελεστών και του εκτιμώμενου πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων τους στο υπόδειγμα (1);

ε) (βαθμοί: 0,5) Θα υπήρχε πρόβλημα στην εκτίμηση του υποδείγματος (1) αν 5 άτομα στο δείγμα είχαν υποχρεωτική εκπαίδευση και τα άλλα 20 άτομα στο δείγμα είχαν λυκειακή εκπαίδευση; Αιτιολογήστε.

ΘΕΜΑ 2

Με τη μέθοδο OLS εκτιμήθηκε το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$(1) \quad C_t = \beta_0 + \beta_1 G_t + \beta_2 P_t + u_t$$

όπου C είναι οι εκπομπές CO₂ (σε χιλιάδες kt), G είναι το ΑΕΠ (σε δισεκατομμύρια €) και P είναι ο πληθυσμός (σε εκατομμύρια άτομα). Με βάση ένα δείγμα 24 τριμήνων βρέθηκε ότι

$$(1) \quad \hat{C}_t = \underset{(0,8)}{-8,4} + \underset{(0,6)}{2,2} G_t + \underset{(0,3)}{1,6} P_t, \quad SST = 100, \quad R^2 = 0,58$$

$$(2) \quad \hat{u}_t^2 = 0,12 + 0,02 \left(\frac{G_t}{P_t} \right), \quad R^2 = 0,1$$

$$(3) \quad \hat{u}_t = 0,02 - 0,01G_t + 0,03P_t + 0,34\hat{u}_{t-1}, \quad R^2 = 0,5$$

όπου οι αριθμοί σε () είναι τυπικά σφάλματα.

α) (βαθμοί: 0,5) Ποια είναι η πρόβλεψη για τις εκπομπές CO₂ όταν το ΑΕΠ είναι 500 εκατομμύρια € και ο πληθυσμός είναι 50 εκατομμύρια άτομα;

β) (βαθμοί: 1) Να ελεγχθεί στατιστικά η σημαντικότητα του υποδείγματος (1). ($\alpha=0,05$).

γ) (βαθμοί: 2) Ποιές υποθέσεις μπορούν να ελεγχθούν με βάση τα υποδείγματα (2) και (3); Να γίνουν οι σχετικοί στατιστικοί έλεγχοι. ($\alpha=0,05$). Τι συμπεραίνετε για τις ιδιότητες των εκτιμητών των συντελεστών και του εκτιμώμενου πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων τους στο υπόδειγμα (1); Αιτιολογείστε.

δ) (βαθμοί: 1,5) Με βάση το ίδιο δείγμα βρέθηκε ότι

$$(4) \quad \hat{C}_t = \underset{(0,4)}{-7,4} + \underset{(0,1)}{0,4} C_{t-1} + \underset{(0,3)}{1,2} G_t + \underset{(0,2)}{0,8} P_t, \quad DW = 1,4, \quad R^2 = 0,77$$

όπου οι αριθμοί σε () είναι τυπικά σφάλματα. Με χρήση κατάλληλων στατιστικών ελέγχων, τι συμπεραίνετε για τις ιδιότητες των εκτιμητών των συντελεστών και του εκτιμώμενου πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων τους στο υπόδειγμα (1); ($\alpha=0,05$). Ποιά είναι η αιτία του προβλήματος που προκύπτει στο ερώτημα γ); Αιτιολογείστε.

ΘΕΜΑ 3

Έστω ότι η κατανάλωση C προσδιορίζεται από την προσδοκώμενη τιμή Y^* του εισοδήματος Y από το υπόδειγμα

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t^* + u_t$$

Σύμφωνα με το υπόδειγμα των αναπροσαρμοζόμενων προσδοκιών ισχύει ότι

$$Y_t^* - Y_{t-1}^* = \gamma(Y_t - Y_{t-1}^*), \quad 0 < \gamma < 1$$

Εκτιμήθηκε το ακόλουθο υπόδειγμα με τη μέθοδο OLS από δείγμα 40 ετών

$$(1) \quad \hat{C}_t = \underset{(0,01)}{1,25} + \underset{(0,03)}{0,36} Y_t + \underset{(0,05)}{0,25} C_{t-1}, \quad R^2 = 0,4$$

όπου οι αριθμοί σε () είναι τυπικά σφάλματα.

α) (βαθμοί: 2,5) i) Να υπολογισθεί η εκτίμηση του βαθμού προσαρμογής γ και να ελεγχθεί αν ο βαθμός προσαρμογής είναι μεγαλύτερος του 0,7. ($\alpha=0,05$). ii) Να υπολογιστούν ο βραχυχρόνιος και ο μακροχρόνιος πολλαπλασιαστής της κατανάλωσης ως προς το εισόδημα.

β) (βαθμοί: 2,5) Δίνεται ότι

$$(2) \quad I_t = \delta_0 + \delta_1 I_{t-1} + \delta_2 Y_{t-1} + \omega_t$$

$$(3) \quad Y_t = C_t + I_t$$

όπου I είναι η επένδυση και τα σφάλματα u και ω είναι ανεξάρτητα. Τι συμπεράσματα προκύπτουν για τις ιδιότητες των OLS εκτιμητών των συντελεστών στις (1), (2) και (3); Να επιλεγεί μέθοδος για τη συνεπή και (ασυμπτωτικά) άριστη εκτίμηση των συντελεστών στις (1), (2) και (3). Αιτιολογείστε.

Δίνεται ότι: $Z_{0,05}=1,645$, $Z_{0,025}=1,96$, $t_{15,0,05}=1,753$, $t_{15,0,025}=2,131$, $t_{16,0,05}=1,746$, $t_{16,0,025}=2,120$, $t_{17,0,05}=1,74$, $t_{17,0,025}=2,11$, $t_{18,0,05}=1,734$, $t_{18,0,025}=2,101$, $t_{19,0,05}=1,729$, $t_{19,0,025}=2,093$, $t_{20,0,05}=1,725$, $t_{20,0,025}=2,086$, $t_{21,0,05}=1,721$, $t_{21,0,025}=2,08$, $t_{22,0,05}=1,717$, $t_{22,0,025}=2,074$, $F_{1,15,0,05}=4,543$, $F_{1,16,0,05}=4,494$, $F_{1,17,0,05}=4,451$, $F_{1,18,0,05}=4,414$, $F_{1,19,0,05}=4,381$, $F_{1,20,0,05}=4,351$, $F_{1,21,0,05}=4,325$, $F_{1,22,0,05}=4,301$, $F_{2,15,0,05}=3,682$, $F_{2,16,0,05}=3,634$, $F_{2,17,0,05}=3,592$, $F_{2,18,0,05}=3,555$, $F_{2,19,0,05}=3,522$, $F_{2,20,0,05}=3,493$, $F_{2,21,0,05}=3,467$, $F_{2,22,0,05}=3,443$, $F_{3,15,0,05}=3,287$, $F_{3,16,0,05}=3,239$, $F_{3,17,0,05}=3,197$, $F_{3,18,0,05}=3,16$, $F_{3,19,0,05}=3,127$, $F_{3,20,0,05}=3,098$, $F_{3,21,0,05}=3,072$, $F_{3,22,0,05}=3,049$, $F_{1,47,0,05}=4,047$, $F_{1,48,0,05}=4,043$, $F_{1,49,0,05}=4,038$, $F_{1,50,0,05}=4,034$, $F_{2,47,0,05}=3,195$, $F_{2,48,0,05}=3,191$, $F_{2,49,0,05}=3,187$, $F_{2,50,0,05}=3,183$, $F_{3,47,0,05}=2,802$, $F_{3,48,0,05}=2,798$, $F_{3,49,0,05}=2,794$, $F_{3,50,0,05}=2,790$, $\chi^2_{1,0,05}=3,841$, $\chi^2_{2,0,05}=5,991$, $\chi^2_{3,0,05}=7,815$, $\chi^2_{4,0,05}=9,488$, $\chi^2_{5,0,05}=11,07$, $\chi^2_{6,0,05}=12,592$, $d_{L,\alpha}=1,101$, $d_{U,\alpha}=1,656$.

Συμβολισμός: SST =Συνολικό άθροισμα τετραγώνων, SSR =Άθροισμα τετραγώνων παλινδρόμησης, SSE =Άθροισμα τετραγώνων καταλοίπων.