ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ασκήσεις: 04

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θέμα 1, Σεπτέμβριος 2012

α) OLS εκτιμητής του β:

$$\widehat{\beta} = (X^{'}X)^{-1}X^{'}Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 0,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Εκτιμώμενη γραμμή/εξίσωση παλινδρόμησης:

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 S_i + \widehat{\beta}_2 E_i = 8 + 2S_i + 4E_i$$

Ερμηνεία εκτιμώμενων συντελεστών παλινδρόμησης:

$\widehat{\beta}_0$=8 : Αν η εκπαίδευση και η προϋπηρεσία είναι μηδενικές, το (μέσο) ωρομίσθιο είναι 8€.

$\widehat{\beta}_1$=2 : Αν η εκπαίδευση αυξηθεί κατά ένα έτος, ενώ η προϋπηρεσία παραμείνει σταθερή, τότε το (μέσο) ωρομίσθιο θα αυξηθεί κατά 2€.

$\widehat{\beta}_2$=4 : Αν η προϋπηρεσία αυξηθεί κατά ένα έτος, ενώ η εκπαίδευση παραμείνει σταθερή, τότε το (μέσο) ωρομίσθιο θα αυξηθεί κατά 4€.

β) OLS εκτιμητής του $V(\widehat{\beta})$:

$$\widehat{V}(\widehat{\beta}) = s^2(X^{'}X)^{-1} = s^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

όπου

$$s^2 = \frac{1}{T-K-1}SSE = \frac{1}{43-2-1}40 = 1$$

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} \Rightarrow \frac{SSE}{SST} = 1 - R^2 \Rightarrow SSE = (1-R^2)SST = (1-0,6)100 = 40$$

γ) 95% διάστημα πρόβλεψης για το μέσο ωρομίσθιο ($E(Y_f)$) εργαζόμενου με 8 έτη εκπαίδευσης ($S_f = 8$) και 4 έτη προϋπηρεσίας ($E_f = 4$):

$$\Delta\Pi_{E(Y_f)}(95\%) = \left[\widehat{E(Y_f)} \pm t_{T-K-1,\frac{0,05}{2}}\, s_{\widehat{E(Y_f)}}\right] = [40 \pm 1,96 \cdot 17] = [6,68\ , 73,32]$$

όπου

$$\widehat{E(Y_f)} = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 S_f + \widehat{\beta}_2 E_f = 8 + 2\cdot 8 + 4 \cdot 4 = 40$$

$$t_{T-K-1,\frac{0,05}{2}} = t_{43-2-1,\,0,025} = t_{40,\,0,025} \simeq Z_{0,025} = 1,96$$

$$s_{\widehat{E(Y_f)}} = \sqrt{X_f' \widehat{V}(\widehat{\beta}) X_f} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{289} = 17$$

$$X_f = \begin{pmatrix} 1 \\ S_f \\ E_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

δ) Έχουμε τα υποδείγματα:

(1) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 S_i + \beta_2 E_i + u_i \;\; (U)$

(2) $Y_i = \alpha_1 (S_i + E_i) + \varepsilon_i = \alpha_1 S_i + \alpha_1 E_i + \varepsilon_i \;\; (R)$

Το υπόδειγμα (2) είναι ειδική περίπτωση του (1) με γραμμικούς περιορισμούς $\beta_0 = 0$ και $\beta_1 = \beta_2$. ($\beta_1 = \alpha_1$ και $\beta_2 = \alpha_1 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2$)
Βάσει των (1) και (2) ελέγχουμε την υπόθεση ότι οι γραμμικοί περιορισμοί $\beta_0 = 0$ και $\beta_1 = \beta_2$ ισχύουν.

Στατιστικός έλεγχος για γραμμικούς περιορισμούς

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_0 = 0$ και $\beta_1 = \beta_2$ έναντι $H_1 : \beta_0 \neq 0$ ή/και $\beta_1 \neq \beta_2$

Στατιστική ελέγχου: $F = \frac{(SSE_R - SSE_U)/q}{SSE_U/(T-K-1)} = \frac{(60-40)/2}{40/(43-2-1)} = 10$

Κρίσιμη περιοχή: $F > F_{q,\, T-K-1,\, \alpha} = F_{2,\, 40,\, 0{,}05} = 3,232$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Οι γραμμικοί περιορισμοί $\beta_0 = 0$ και $\beta_1 = \beta_2$ δεν ισχύουν από κοινού.

Θέμα 1, Σεπτέμβριος 2019

α) OLS εκτιμητής του β:

$$\widehat{\beta} = (X^{'}X)^{-1}X^{'}Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Εκτιμώμενη γραμμή/εξίσωση παλινδρόμησης:

$$\widehat{Y}_t = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\gamma}_0 M_t + \widehat{\beta}_1 S_t + \widehat{\gamma}_1 (S_t \cdot M_t) = 3 + 2,5M_t + 2,5S_t - 0,5(S_t \cdot M_t)$$

Πρόβλεψη για ωρομίσθιο (Y_f^A) άνδρα ($M_f = 1$) με 4 έτη εκπαίδευσης ($S_f = 4$):

$$\widehat{Y}_f^A = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\gamma}_0 M_f + \widehat{\beta}_1 S_f + \widehat{\gamma}_1 (S_f \cdot M_f) = 3 + 2,5 \cdot 1 + 2,5 \cdot 4 - 0,5(4 \cdot 1) = 13,5$$

Πρόβλεψη για ωρομίσθιο (Y_f^Γ) γυναίκας ($M_f = 0$) με 6 έτη εκπαίδευσης ($S_f = 6$):

$$\widehat{Y}_f^\Gamma = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\gamma}_0 M_f + \widehat{\beta}_1 S_f + \widehat{\gamma}_1 (S_f \cdot M_f) = 3 + 2,5 \cdot 0 + 2,5 \cdot 6 - 0,5(6 \cdot 0) = 18$$

$\widehat{Y}_f^A < \widehat{Y}_f^\Gamma \Rightarrow$ η πρόβλεψη για το ωρομίσθιο είναι υψηλότερη για γυναίκα με 6 έτη εκπαίδευσης σε σχέση με άνδρα με 4 έτη εκπαίδευσης.

β) OLS εκτιμητής του $V(\widehat{\beta})$:

$$\widehat{V}(\widehat{\beta}) = s^2(X^{'}X)^{-1} = s^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} = 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0 & -0,05 \\ 0,05 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & -0,05 & 0 & 0,05 \end{pmatrix}$$

όπου

$$s^2 = \frac{1}{T-K-1} SSE = \frac{1}{24-3-1} 2 = 0,1$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \Rightarrow SST = \frac{SSR}{R^2} = \frac{3}{0,6} = 5$$
$$SST = SSR + SSE \Rightarrow SSE = SST - SSR = 5 - 3 = 2$$

γ) Στατιστικός έλεγχος για σημαντικότητα υποδείγματος

Υποθέσεις: $H_0 : \gamma_0 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ έναντι $H_1 : \gamma_0 \neq 0$ ή/και $\beta_1 \neq 0$ ή/και $\gamma_1 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $F = \frac{R^2/K}{(1-R^2)/(T-K-1)} = \frac{0{,}6/3}{(1-0{,}6)/(24-3-1)} = 10$

Κρίσιμη περιοχή: $F > F_{K,\,T-K-1,\,\alpha} = F_{3,\,20,\,0{,}05} = 3,098$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Το υπόδειγμα είναι σημαντικό.

δ) Μέσο ωρομίσθιο: $E(Y_t) = \beta_0 + \gamma_0 M_t + \beta_1 S_t + \gamma_1 (S_t \cdot M_t)$

Μέσο ωρομίσθιο των γυναικών είναι μεγαλύτερο των 2€ όταν η εκπαίδευση είναι 5 έτη

$\Leftrightarrow E(Y_t) > 2$ όταν $M_t = 0$ και $S_t = 5 \Leftrightarrow$

$\beta_0 + \gamma_0 M_t + \beta_1 S_t + \gamma_1 (S_t \cdot M_t) > 2$ όταν $M_t = 0$ και $S_t = 5 \Leftrightarrow$

$\beta_0 + \gamma_0 \cdot 0 + \beta_1 \cdot 5 + \gamma_1 (5 \cdot 0) > 2 \Leftrightarrow$

$\beta_0 + 5\beta_1 > 2$

Στατιστικός έλεγχος για γραμμικό περιορισμό

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_0 + 5\beta_1 = 2$ έναντι $H_1 : \beta_0 + 5\beta_1 > 2$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\delta' \widehat{\beta} - \pi}{s_{\delta' \widehat{\beta}}} = \frac{\widehat{\beta}_0 + 5\widehat{\beta}_1 - 2}{s_{\widehat{\beta}_0 + 5\widehat{\beta}_1}} = \frac{3 + 5 \cdot 2{,}5 - 2}{1{,}789} = 7,546$

όπου

$$s_{\widehat{\beta}_0 + 5\widehat{\beta}_1} = \sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_0 + 5\widehat{\beta}_1)} = \sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_0) + 5^2 \cdot \widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + 2 \cdot 5 \cdot \widehat{Cov}(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)}$$
$$= \sqrt{0,2 + 25 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,05} = \sqrt{3,2} = 1,789$$

Κρίσιμη περιοχή: $t > t_{T-K-1,\,\alpha} = t_{24-3-1,\,0{,}05} = t_{20,\,0{,}05} = 1,725$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Μέσο ωρομίσθιο των γυναικών είναι μεγαλύτερο των 2€ όταν η εκπαίδευση είναι 5 έτη.