ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Θεωρία: 06

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Βασικές υποθέσεις A.1-A.4

A.1 $Y = X\beta + u$ είναι το σωστό υπόδειγμα και $E(u) = 0$ ή

$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t$, $t = 1, ..., T$, είναι το σωστό υπόδειγμα και $E(u_t) = 0$, $t = 1, ..., T$.

A.2 X είναι πλήρους βαθμού με πιθανότητα 1 και $T > K + 1$ ή

δεν υπάρχουν ακριβής γραμμικές σχέσεις μεταξύ των $X_1, ..., X_K$ με πιθανότητα 1 και $T > K + 1$.

A.3 X και u είναι ανεξάρτητα ή

X_{tj} και u_s είναι ανεξάρτητα, $t, s = 1, ..., T$, $j = 1, ..., K$.

A.3' X και u είναι ταυτόχρονα ασυσχέτιστα ή

X_{tj} και u_t είναι ασυσχέτιστα $t = 1, ..., T$, $j = 1, ..., K$.

A.4 Ισχύει ότι $V(u|X) = \sigma^2 I$ ή

ισχύει ότι $V(u_t|X) = \sigma^2$, $t = 1, ..., T$ και $Cov(u_t, u_s|X) = 0$, $t, s = 1, ..., T$, $t \neq s$.

Ετεροσκεδαστικότητα/Αυτοσυσχέτιση

Υπόδειγμα παλινδρόμησης:

$$Y = X\beta + u \quad ή \quad Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t, t = 1, ..., T$$

Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης γίνεται η υπόθεση Α.4:

<u>Ομοσκεδαστικότητα και όχι αυτοσυσχέτιση</u>

Α.4 Ισχύει ότι $V(u) = \sigma^2 I$ ή
ισχύει ότι $V(u_t) = \sigma^2$, $t = 1, ..., T$ και $Cov(u_t, u_s) = 0$, $t, s = 1, ..., T$, $t \neq s$.

Ορισμός: Ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των σφαλμάτων $u = (u_1, ..., u_T)'$

$$V(u) = \begin{pmatrix} V(u_1) & Cov(u_1, u_2) & \cdots & \cdots & Cov(u_1, u_T) \\ Cov(u_1, u_2) & V(u_2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & V(u_{T-1}) & Cov(u_{T-1}, u_T) \\ Cov(u_1, u_T) & \cdots & \cdots & Cov(u_{T-1}, u_T) & V(u_T) \end{pmatrix}$$

Ετεροσκεδαστικότητα

- Αν η διακύμανση των σφαλμάτων είναι σταθερή για όλες τις παρατηρήσεις, $V(u_t) = \sigma^2$ για κάθε $t = 1, ..., T$, τότε υπάρχει ομοσκεδαστικότητα (homoskedasticity).

- Αν η διακύμανση των σφαλμάτων δεν είναι σταθερή για όλες τις παρατηρήσεις, $V(u_t) = \sigma_t^2 \neq \sigma^2$ για κάποια $t = 1, ..., T$, τότε υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα (heteroskedasticity).

  π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

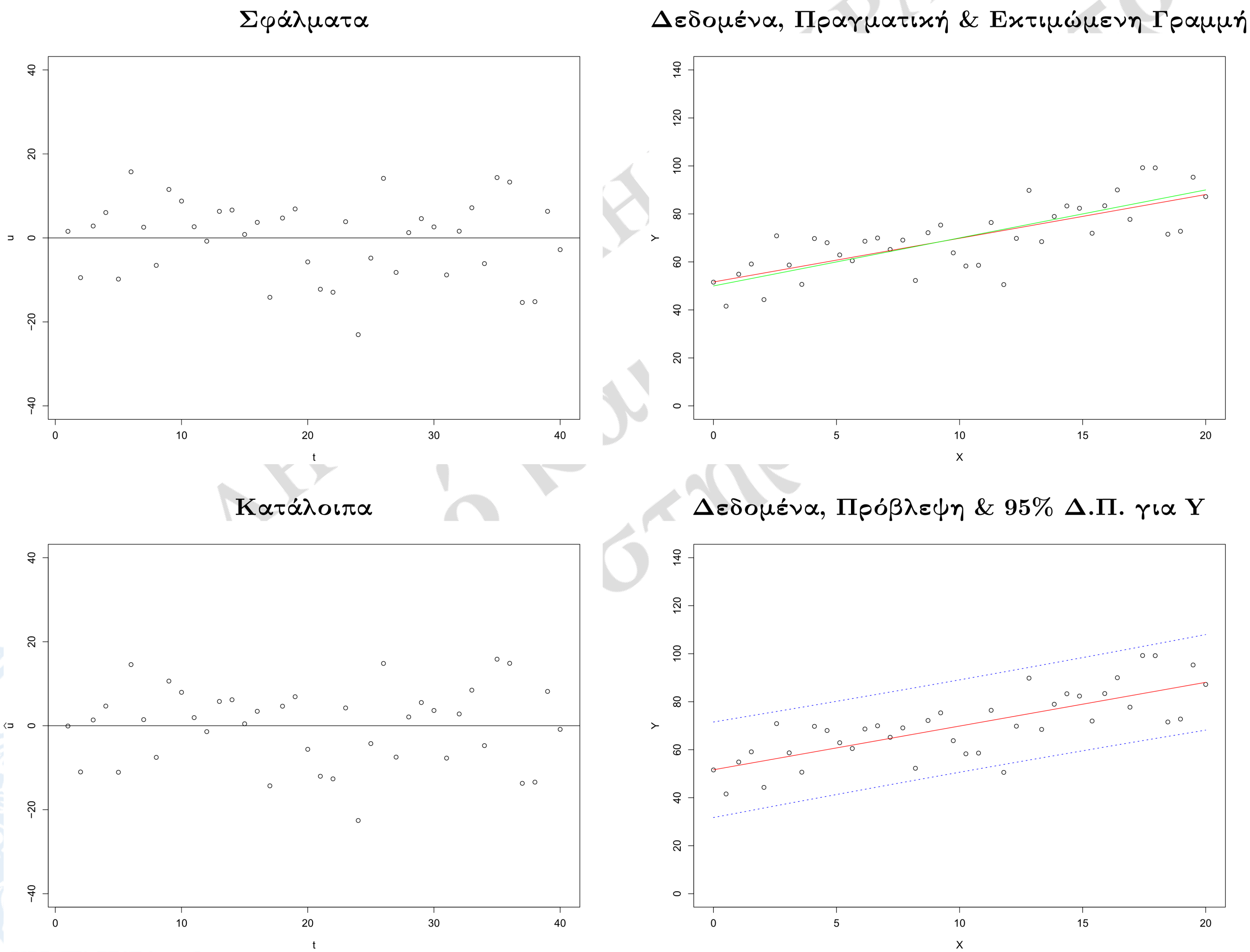
(i) $V(u_t) = \alpha_0 + \alpha_1 |X_t|,\ t = 1, ..., T \Rightarrow V(u_t) \neq \sigma^2,\ t = 1, ..., T$

(ii) $V(u_t) = \begin{cases} \sigma_1^2, & \text{αν } t = 1, ..., T^* \\ \sigma_2^2, & \text{αν } t = T^* + 1, ..., T \end{cases}$ με $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \Rightarrow V(u_t) \neq \sigma^2,\ t = 1, ..., T$

π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t + u_t$, $t = 1, \ldots, 40$

με $V(u_t) = 100$ και $Corr(u_t, u_s) = 0$, $t, s = 1, \ldots, 40$, $t \neq s$

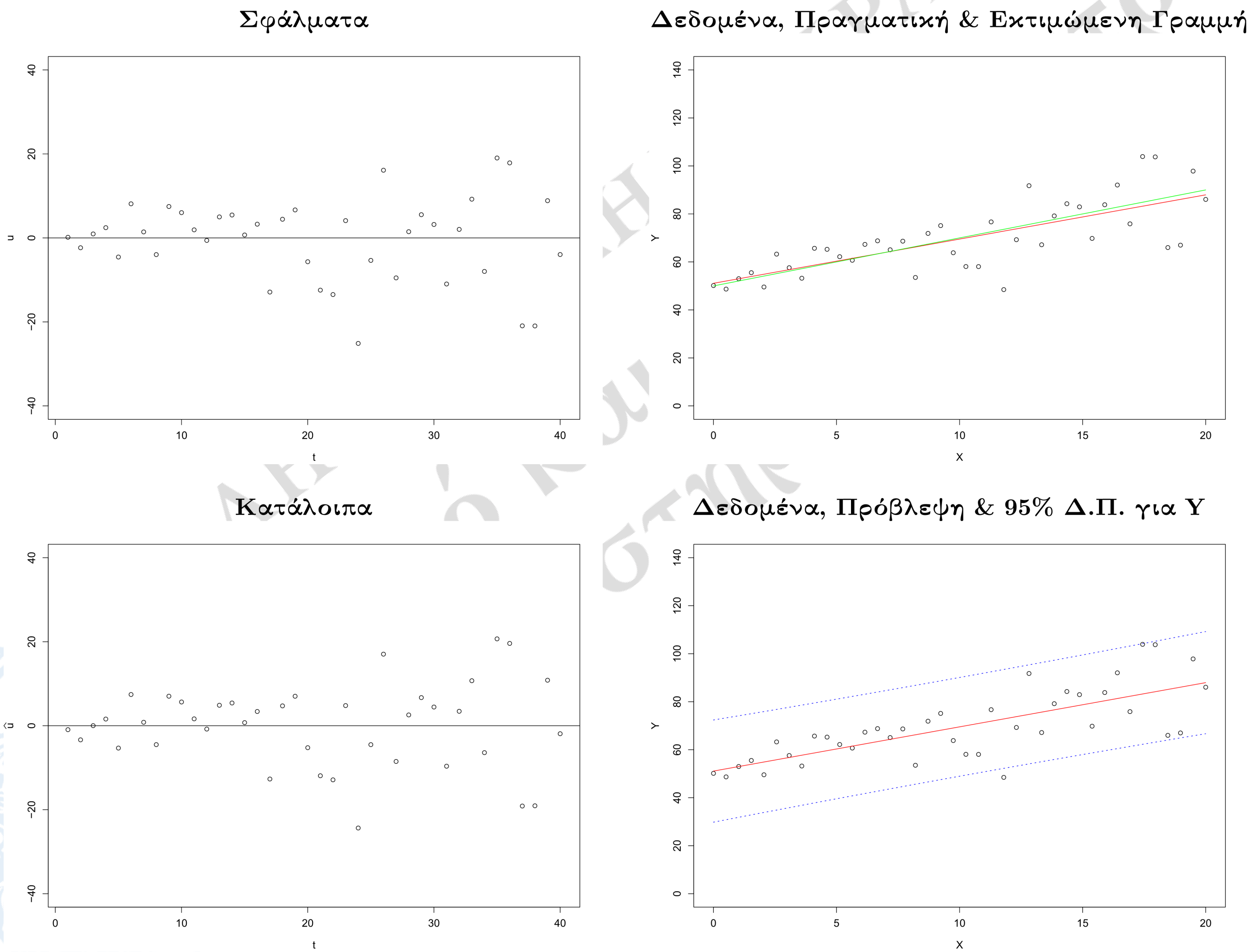
Μέθοδος εκτίμησης: OLS



π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t + u_t$, $t = 1, ..., 40$

με $V(u_t) = 1 + 10|X_t|$ και $Corr(u_t, u_s) = 0$, $t, s = 1, ..., 40$, $t \neq s$

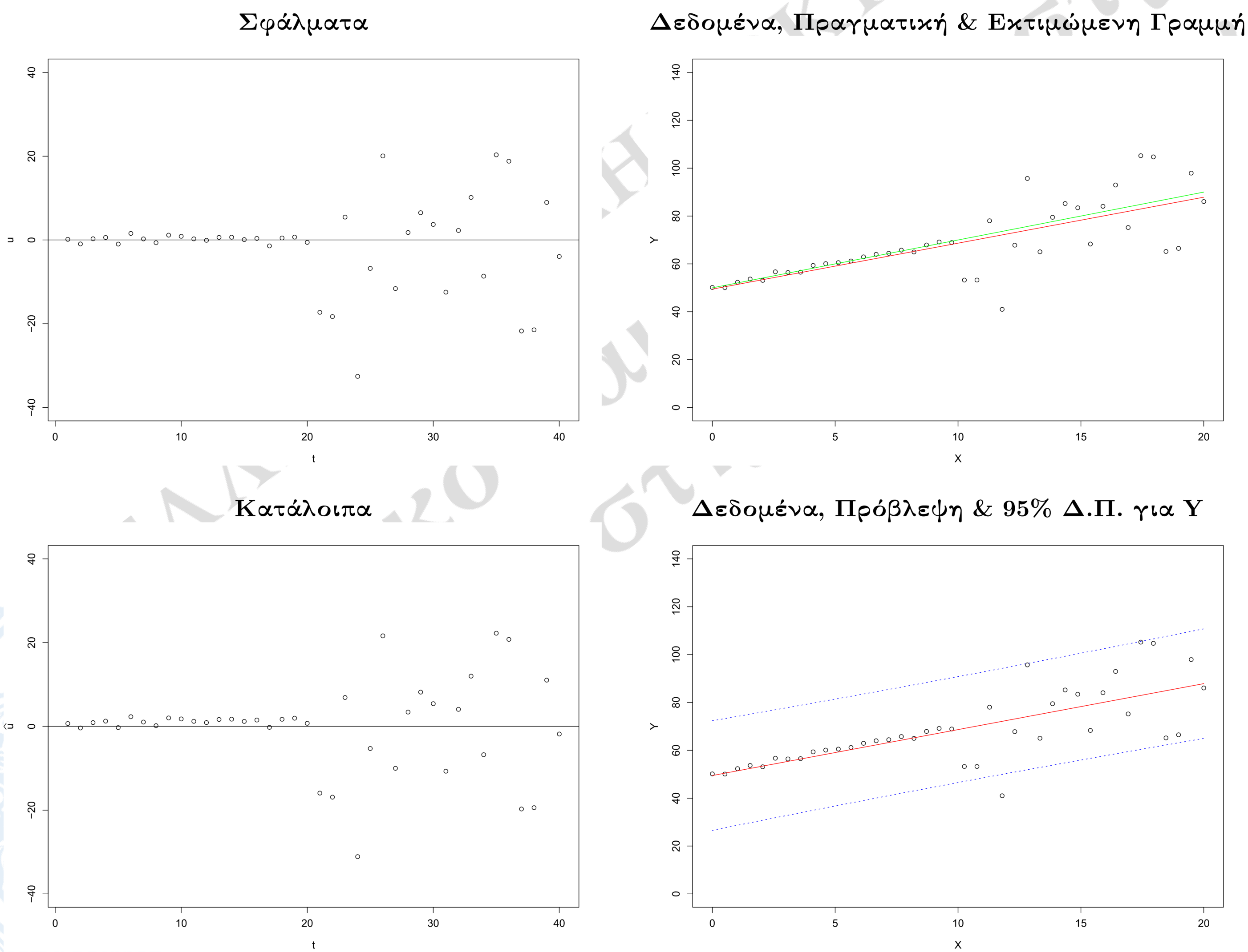
Μέθοδος εκτίμησης: OLS



π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t + u_t,\ t = 1, \ldots, 40$

$$\text{με } V(u_t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t = 1, \ldots, 20 \\ 200, & \text{αν } t = 21, \ldots, 40 \end{cases} \quad \text{και } Corr(u_t, u_s) = 0,\ t, s = 1, \ldots, 40,\ t \neq s$$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS



- Συμβολισμός για ετεροσκεδαστικότητα: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \sigma^2 \delta_t$ με $\delta_t > 0$

π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

(i) $V(u_t) = \alpha_0 + \alpha_1 |X_t| = \sigma^2 \delta_t$

όπου $\sigma^2 = \alpha_0$ και $\delta_t = 1 + \delta |X_t|$ με $\delta = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$

(ii) $V(u_t) = \begin{cases} \sigma_1^2, & \text{αν } t = 1, ..., T^* \\ \sigma_2^2, & \text{αν } t = T^* + 1, ..., T \end{cases} = \sigma^2 \delta_t$

όπου $\sigma^2 = \sigma_1^2$ και $\delta_t = \begin{cases} 1, & \text{αν } t = 1, ..., T^* \\ \sigma_2^2 / \sigma_1^2, & \text{αν } t = T^* + 1, ..., T \end{cases}$

Αυτοσυσχέτιση

- Αν τα σφάλματα δεν συσχετίζονται μεταξύ τους για όλες τις παρατηρήσεις, $Cov(u_t, u_s) = Corr(u_t, u_s) = 0$ για κάθε $t, s = 1, ..., T$, $t \neq s$, τότε δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση.

- Αν τα σφάλματα συσχετίζονται μεταξύ τους για κάποιες παρατηρήσεις, $Corr(u_t, u_s) \neq 0$ για κάποια $t, s = 1, ..., T$, $t \neq s$, τότε υπάρχει αυτοσυσχέτιση (autocorrelation).

  π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

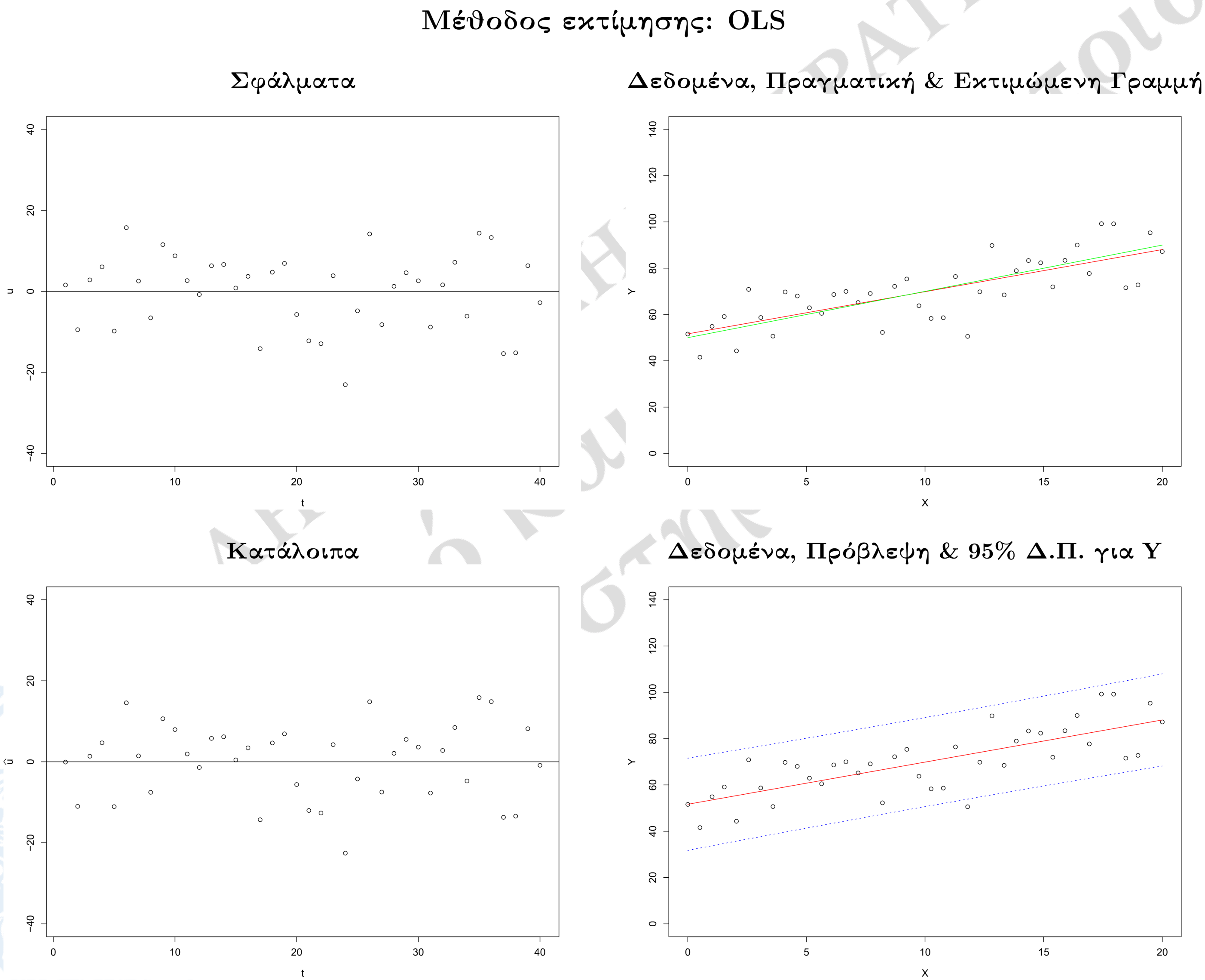
  (i) $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow Corr(u_t, u_s) = \rho^{|t-s|} \neq 0$, $t, s = 1, ..., T$

  (ii) $u_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \Rightarrow Corr(u_t, u_{t-1}) = \frac{\theta}{1+\theta^2} \neq 0$, $t = 1, ..., T$

  όπου $E(\varepsilon_t) = 0$, $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ και $Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, $t, s = 1, ..., T$, $t \neq s$.

π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t + u_t$, $t = 1, \ldots, 40$

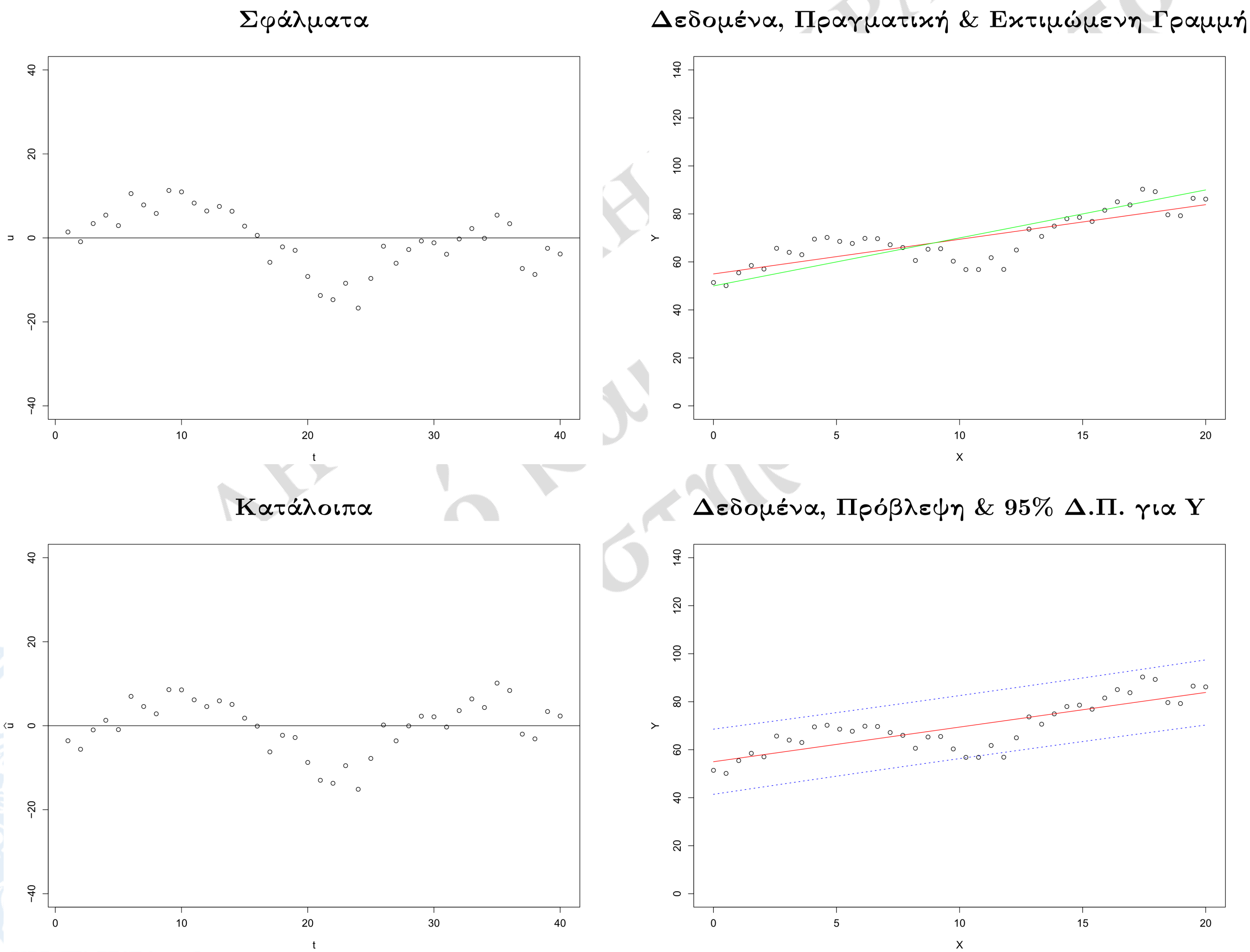
με $V(u_t) = 100$ και $Corr(u_t, u_s) = 0$, $t, s = 1, \ldots, 40$, $t \neq s$



π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t + u_t$, $t = 1, ..., 40$

με $V(u_t) = 100$ και $Corr(u_t, u_s) = 0.9^{|t-s|}$, $t, s = 1, ..., 40$, $t \neq s$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS

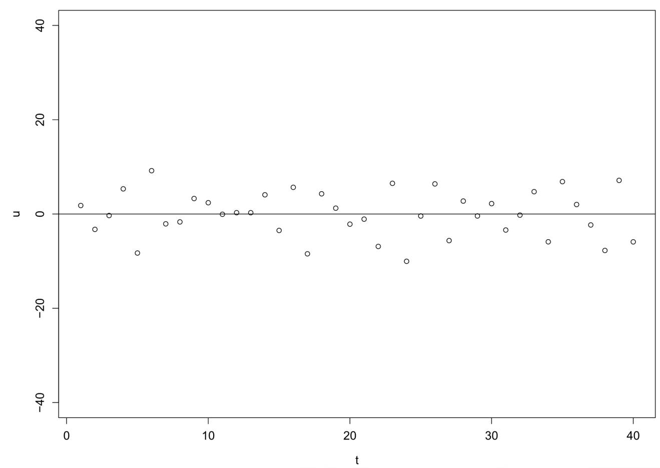


π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t + u_t$, $t = 1, ..., 40$

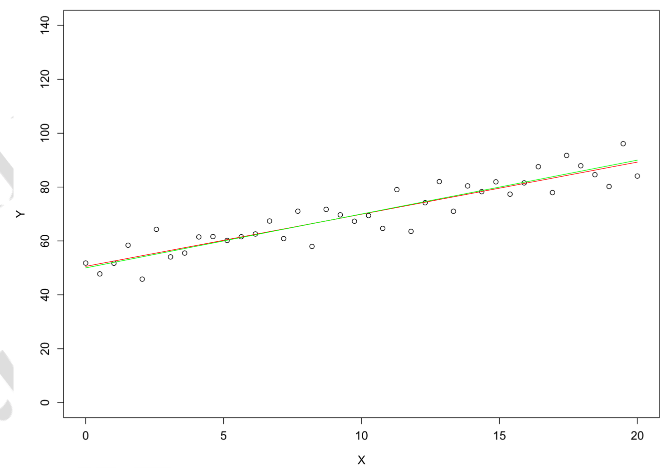
με $V(u_t) = 100$ και $Corr(u_t, u_s) = (-0.9)^{|t-s|}$, $t, s = 1, ..., 40$, $t \neq s$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS

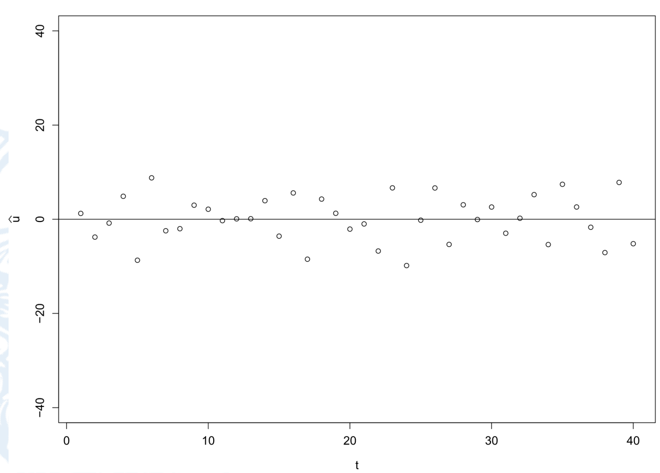
Σφάλματα



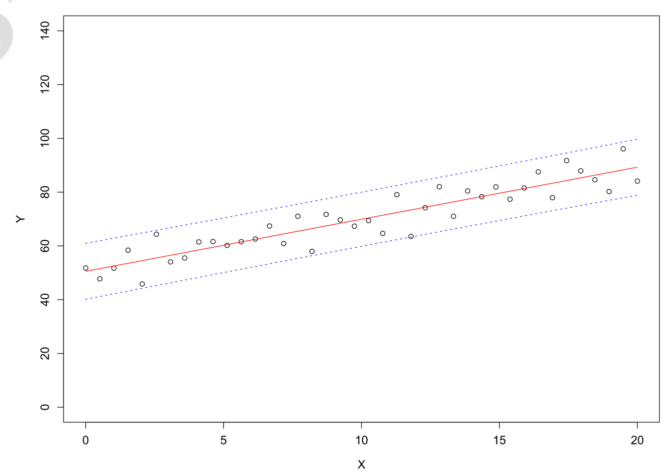
Δεδομένα, Πραγματική & Εκτιμώμενη Γραμμή



Κατάλοιπα



Δεδομένα, Πρόβλεψη & 95% Δ.Π. για Υ



- Υπόδειγμα για αυτοσυσχέτιση:

  Υπόδειγμα αυτοπαλινδρόμησης $p^{ης}$-τάξης AR(p) (autoregression model of p^{th}-order)

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + ... + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$$

  - $\rho_1, ..., \rho_p$ είναι οι συντελεστές αυτοπαλινδρόμησης (autoregression coefficients)
  - ε_t είναι το σφάλμα της αυτοπαλινδρόμησης με $E(\varepsilon_t) = 0$, $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ και $Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ για $t, s = 1, ..., T, t \neq s$.

  Όταν $p = 1$, στο υπόδειγμα AR(1)

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

  για $|\rho| < 1$ ισχύει ότι

$$E(u_t) = 0, \quad V(u_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}, \quad Corr(u_t, u_s) = \rho^{|t-s|}$$

- Αυτοσυσχέτιση $p^{ης}$-τάξης: $Corr(u_t, u_{t-p})$

  π.χ. Αυτοσυσχέτιση $1^{ης}$-τάξης: $Corr(u_2, u_1), Corr(u_3, u_2), ..., Corr(u_T, u_{T-1})$

  π.χ. Αυτοσυσχέτιση $2^{ης}$-τάξης: $Corr(u_3, u_1), Corr(u_4, u_2), ..., Corr(u_T, u_{T-2})$

Ετεροσκεδαστικότητα/Αυτοσυσχέτιση

- Αν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα, η υπόθεση Α.4 δεν ισχύει αφού

$$V(u) = \begin{pmatrix} V(u_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & V(u_2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & V(u_{T-1}) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & V(u_T) \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \delta_{T-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \delta_T \end{pmatrix} \neq \sigma^2 I$$

- Αν υπάρχει αυτοσυσχέτιση, η υπόθεση Α.4 δεν ισχύει αφού

$$V(u) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & Cov(u_1,u_2) & \cdots & \cdots & Cov(u_1,u_T) \\ Cov(u_1,u_2) & \sigma^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \sigma^2 & Cov(u_{T-1},u_T) \\ Cov(u_1,u_T) & \cdots & \cdots & Cov(u_{T-1},u_T) & \sigma^2 \end{pmatrix} \neq \sigma^2 I$$

- Αν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα ή/και αυτοσυσχέτιση και εφόσον οι υπόλοιπες υποθέσεις Α.1-Α.3 και Α.5 ισχύουν:
  - Ο OLS εκτιμητής $\widehat{\beta}$ είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής του β αλλά δεν είναι άριστος.
  - Ο OLS εκτιμητής s^2 είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής του σ_t^2 (όταν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα).
  - Ο OLS εκτιμητής $\widehat{V}(\widehat{\beta})$ είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής του $V(\widehat{\beta})$.
  - Οι προβλέψεις $\widehat{Y}_f$ και $\widehat{E(Y_f)}$ είναι αμερόληπτες και συνεπείς προβλέψεις των Y_f και $E(Y_f)$, αλλά δεν είναι άριστες.
  - Οι στατιστικοί έλεγχοι t και F, τα διαστήματα εμπιστοσύνης και προβλέψεων είναι αναξιόπιστα.

- Υπάρχουν περιπτώσεις που αν η υπόθεση Α.4 δεν ισχύει τότε και η υπόθεση Α.3/Α.3' δεν ισχύει: π.χ. όταν στο υπόδειγμα παλινδρόμησης περιλαμβάνεται ως ερμηνευτική μεταβλητή s^{η}-υστέρηση της εξαρτημένης μεταβλητής, Y_{t-s}, και υπάρχει αυτοσυσχέτιση $s^{\eta\varsigma}$-τάξης.

π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + u_t \quad \text{με } u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ισχύει ότι $Corr(Y_{t-1}, u_t) \neq 0 \Rightarrow$ υπόθεση A.3/A.3' δεν ισχύει.

- Υπάρχουν περιπτώσεις που η υπόθεση A.4 δεν ισχύει επειδή η υπόθεση A.1 δεν ισχύει.

  π.χ. Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$:

  $$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + u_t \quad \text{με } V(X_{t2}) \neq \text{σταθερή ή/και } Corr(X_{t2}, X_{s2}) \neq 0$$

  Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$:

  $$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \eta_t$$

  Ισχύει ότι $\eta_t = u_t + \beta_2 X_{t2} \Rightarrow$ υπόθεση A.4 δεν ισχύει.

- Εντοπισμός ετεροσκεδαστικότητας ή/και αυτοσυσχέτισης στα σφάλματα u:
  - Γραφήματα καταλοίπων $\widehat{u}$
  - Στατιστικοί έλεγχοι στα κατάλοιπα $\widehat{u}$

Στατιστικός έλεγχος: Breusch-Pagan-Godfrey για ετεροσκεδαστικότητα

Ετεροσκεδαστικότητα: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{t1} + ... + \alpha_m Z_{tm}$, όπου $Z_1, ..., Z_m$ μεταβλητές

Υποθέσεις: $H_0 : \alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$ έναντι H_1 : τουλάχιστον ένα $\alpha_j \neq 0, j = 1, ..., m$

Στατιστική ελέγχου: $BPG = TR^2$

όπου R^2 είναι ο συντελεστής προσδιορισμού του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης

$$\widehat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{t1} + ... + \alpha_m Z_{tm} + \varepsilon_t, t = 1, ..., T$$

Κρίσιμη περιοχή: $BPG > \chi^2_{m,\alpha}$

Στατιστικός έλεγχος: White για ετεροσκεδαστικότητα

Ετεροσκεδαστικότητα: $V(u_t) = \sigma_t^2 = f(X_{t1}, ..., X_{tK}) \simeq \alpha_0 + \alpha_1 X_{t1} + ... + \alpha_K X_{tK} + \gamma_1 X_{t1}^2 + ... + \gamma_K X_{tK}^2 + \delta_1 X_{t1} X_{t2} + \delta_2 X_{t1} X_{t3} + ... + \delta_{\frac{K(K-1)}{2}} X_{t,K-1} X_{tK}$

Υποθέσεις: $H_0 : \alpha_1 = ... = \alpha_K = \gamma_1 = ... = \gamma_K = \delta_1 = ... = \delta_{\frac{K(K-1)}{2}} = 0$ έναντι H_1 : τουλάχιστον ένα $\alpha_{j_1}, \gamma_{j_2}, \delta_{j_3} \neq 0$, $j_1, j_2 = 1, ..., K$, $j_3 = 1, ..., \frac{K(K-1)}{2}$

Στατιστική ελέγχου: $W = TR^2$

όπου R^2 είναι ο συντελεστής προσδιορισμού του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης

$$\widehat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t1} + ... + \alpha_K X_{tK} + \gamma_1 X_{t1}^2 + ... + \gamma_K X_{tK}^2 + \delta_1 X_{t1} X_{t2} + \delta_2 X_{t1} X_{t3} + ... + \delta_{\frac{K(K-1)}{2}} X_{t,K-1} X_{tK} + \varepsilon_t, t = 1, ..., T$$

Κρίσιμη περιοχή: $W > \chi^2_{m,\alpha}$

όπου $m = \frac{(K+1)(K+2)}{2} - 1$.

Σημείωση:

- Η εφαρμογή του στατιστικού ελέγχου BPG προϋποθέτει γνώση των μεταβλητών $Z_1, ..., Z_m$.

- Συχνά επιλέγονται οι ερμηνευτικές μεταβλητές $X_1, ..., X_K$ για τις μεταβλητές $Z_1, ..., Z_m$ και τότε ο στατιστικός έλεγχος BPG είναι ειδική περίπτωση του στατιστικού ελέγχου White.

- Ο στατιστικός έλεγχος White είναι γενικός και αν απορριφθεί η H_0 δεν συνάγεται η μορφή της ετεροσκεδαστικότητας.

- Κατά την εφαρμογή του στατιστικού ελέγχου White χάνονται πολλοί βαθμοί ελευθερίας $m = \frac{(K+1)(K+2)}{2} - 1$.

- Η μη απόρριψη της H_0 βάσει των στατιστικών ελέγχων BPG και White δεν έπεται ότι δεν υπάρχει άλλη μορφή ετεροσκεδαστικότητας.

- Οι στατιστικοί έλεγχοι BPG και White θα μπορούσαν να είχαν βασιστεί στον στατιστικό έλεγχο F για τη σημαντικότητα του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης.

Στατιστικός έλεγχος: Durbin-Watson για αυτοσυσχέτιση $1^{ης}$-τάξης

Αυτοσυσχέτιση: $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$

Στατιστική ελέγχου: $DW = \dfrac{\sum_{t=2}^{T} (\widehat{u}_t - \widehat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \widehat{u}_t^2}$

Υποθέσεις: $H_0 : \rho = 0$ έναντι $H_1 : \rho > 0$

- Αν $DW < d_{L,\alpha}$ απορρίπτουμε H_0.

- Αν $DW > d_{U,\alpha}$, δεν απορρίπτουμε H_0.

- Αν $d_{L,\alpha} \leq DW \leq d_{U,\alpha}$, το αποτέλεσμα του στατιστικού ελέγχου είναι αβέβαιο.

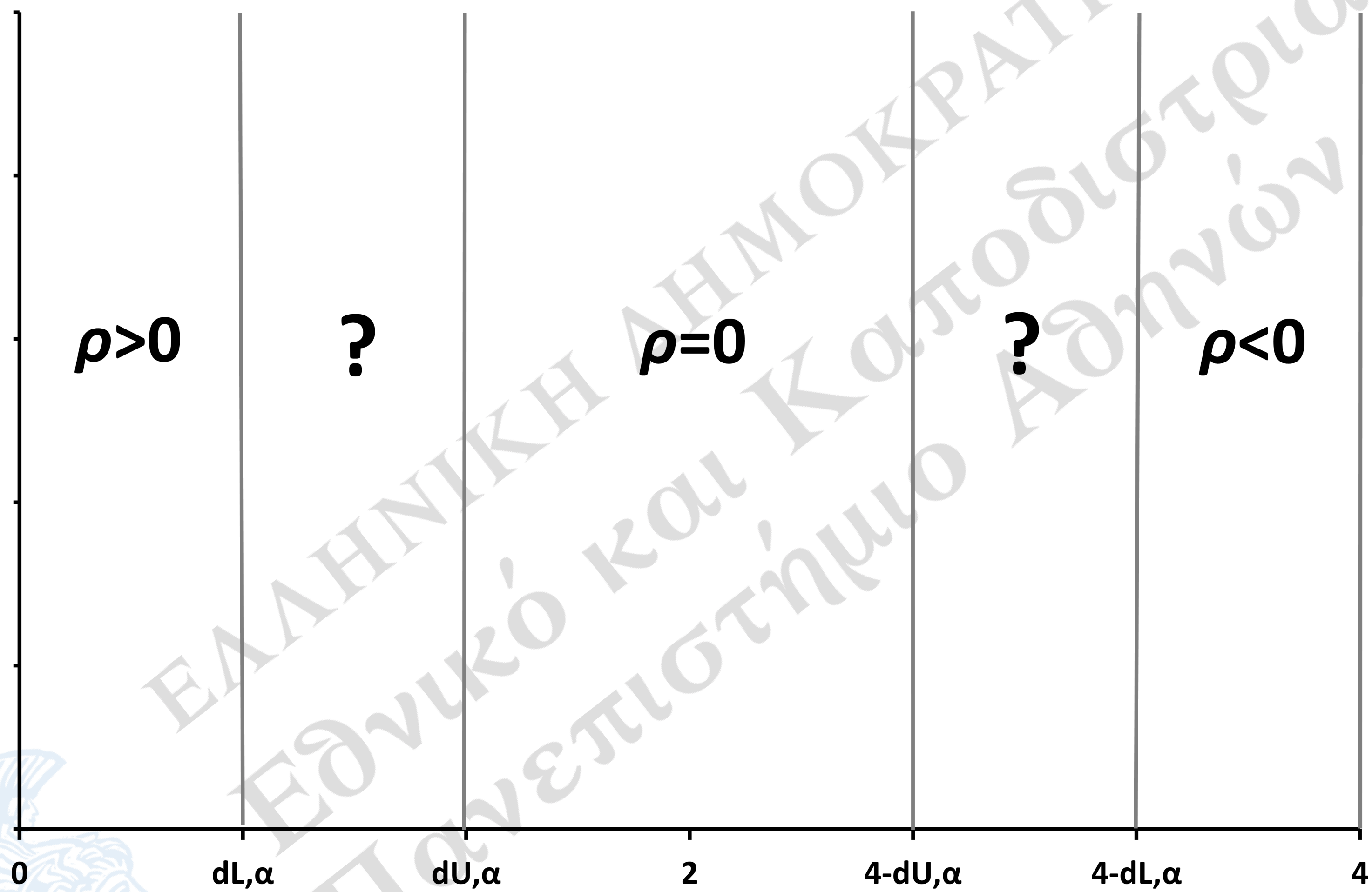
Υποθέσεις: $H_0 : \rho = 0$ έναντι $H_1 : \rho < 0$

- Αν $DW > 4 - d_{L,\alpha}$, απορρίπτουμε H_0.

- Αν $DW < 4 - d_{U,\alpha}$, δεν απορρίπτουμε H_0.

- Αν $4 - d_{U,\alpha} \leq DW \leq 4 - d_{L,\alpha}$, το αποτέλεσμα του στατιστικού ελέγχου είναι αβέβαιο.

Περιοχές του στατιστικού ελέγχου Durbin-Watson



Στατιστικός έλεγχος: h-Durbin για αυτοσυσχέτιση $1^{\eta\varsigma}$-τάξης

Υπόδειγμα παλινδρόμησης με υστέρηση της εξαρτημένης μεταβλητής ως ερμηνευτική μεταβλητή

$$Y_t = \beta_0 + \alpha Y_{t-1} + \beta_2 X_{t2} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t$$

Αυτοσυσχέτιση: $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$

Υποθέσεις: $H_0 : \rho = 0$ έναντι $H_1 : \rho \neq 0$ ή $H_1' : \rho > 0$ ή $H_1'' : \rho < 0$

Στατιστική ελέγχου: $h = \widehat{\rho}\sqrt{\frac{T}{1-Ts^2_{\widehat{\alpha}}}}$

όπου $\widehat{\rho} = 1 - \frac{1}{2}DW$ και $s_{\widehat{\alpha}}$ είναι το τυπικό σφάλμα του OLS εκτιμητή του συντελεστή παλινδρόμησης της $1^{\eta\varsigma}$-υστέρησης της εξαρτημένης μεταβλητής, Y_{t-1}.

Κρίσιμη περιοχή: $|h| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ (H_1) ή $h > Z_\alpha$ (H_1') ή $h < -Z_\alpha$ (H_1'')

Στατιστικός έλεγχος: Breusch-Godfrey για αυτοσυσχέτιση έως $p^{ης}$-τάξης

Αυτοσυσχέτιση: $u_t = \rho_1 u_{t-1} + ... + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$

Υποθέσεις: $H_0 : \rho_1 = ... = \rho_p = 0$ έναντι H_1 : τουλάχιστον ένα $\rho_j \neq 0, j = 1, ..., p$

Στατιστική ελέγχου: $BG = (T - p)R^2$

όπου R^2 είναι ο συντελεστής προσδιορισμού του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης

$$\widehat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_{t1} + ... + \gamma_K X_{tK} + \rho_1 \widehat{u}_{t-1} + ... + \rho_p \widehat{u}_{t-p} + \varepsilon_t, t = p + 1, ..., T$$

Κρίσιμη περιοχή: $BG > \chi^2_{p,\alpha}$

Σημείωση:

- Οι κρίσιμες τιμές $d_{L,\alpha}$ και $d_{U,\alpha}$ του στατιστικού ελέγχου Durbin-Watson εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος T και τον αριθμό των ερμηνευτικών μεταβλητών K.

- Ο στατιστικός έλεγχος Durbin-Watson δεν μπορεί να εφαρμοσθεί αν υστερήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής, Y_{t-s}, περιλαμβάνονται ως ερμηνευτικές μεταβλητές στο υπόδειγμα παλινδρόμησης. Σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να εφαρμοσθεί ο στατιστικός έλεγχος h-Durbin.

- Η εφαρμογή του στατιστικού ελέγχου BG προϋποθέτει γνώση της τάξης p.

- Ο στατιστικός έλεγχος BG εφαρμόζεται και όταν υστερήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής, Y_{t-s}, περιλαμβάνονται ως ερμηνευτικές μεταβλητές στο υπόδειγμα παλινδρόμησης.

- Ο στατιστικός έλεγχος BG θα μπορούσε να είχε βασιστεί στον στατιστικό έλεγχο F για γραμμικούς περιορισμούς στο υπόδειγμα βοηθητικής παλινδρόμησης.

Μέθοδος γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων (GLS) και μέθοδος εφικτών γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων (FGLS)

Έστω ότι υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα ή/και αυτοσυσχέτιση: $V(u) = \sigma^2\Omega \neq \sigma^2 I$

π.χ. $V(u_t) = \sigma^2\delta_t$ και $Corr(u_t, u_s) = 0,\ t, s = 1, ..., T,\ t \neq s$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \delta_{T-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \delta_T \end{pmatrix}$$

π.χ. $V(u_t) = \sigma^2$ και $Corr(u_t, u_s) = \rho^{|t-s|},\ t, s = 1, ..., T$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \rho \\ \rho^{T-1} & \cdots & \cdots & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Αν ο πίνακας Ω είναι γνωστός:

- Ο εκτιμητής γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων GLS (generalized least squares) του β είναι

$$\widehat{\beta}^{GLS} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$$

με πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων

$$V(\widehat{\beta}^{GLS}) = \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

Ο GLS εκτιμητής του σ^2 είναι

$$s^2_{GLS} = \frac{1}{T-K-1}(Y - X\widehat{\beta}^{GLS})'(Y - X\widehat{\beta}^{GLS})$$

Ο GLS εκτιμητής του $V(\widehat{\beta}^{GLS})$ είναι

$$\widehat{V}(\widehat{\beta}^{GLS}) = s^2_{GLS}(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

- Αν οι Α.1-Α.3 και Α.5 ισχύουν και $V(u) = \sigma^2\Omega$, τότε οι GLS εκτιμητές έχουν τις στατιστικές ιδιότητες (ΣΙπα). Αν οι Α.1-Α.3' και Α.5/Α.5' ισχύουν και $V(u) = \sigma^2\Omega$, τότε οι GLS εκτιμητές έχουν τις στατιστικές ιδιότητες (ΣΙα).

Αν ο πίνακας Ω είναι άγνωστος:

- Έστω ότι υπάρχει συνεπής εκτιμητής $\widehat{\Omega}$ του Ω.
- Ο εκτιμητής εφικτών γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων FGLS (feasible generalized least squares) του β είναι

$$\widehat{\beta}^{FGLS} = (X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\widehat{\Omega}^{-1}Y$$

με πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων

$$V(\widehat{\beta}^{FGLS}) = \sigma^2(X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}$$

Ο FGLS εκτιμητής του σ^2 είναι

$$s^2_{FGLS} = \frac{1}{T-K-1}(Y - X\widehat{\beta}^{FGLS})'(Y - X\widehat{\beta}^{FGLS})$$

Ο FGLS εκτιμητής του $V(\widehat{\beta}^{FGLS})$ είναι

$$\widehat{V}(\widehat{\beta}^{FGLS}) = s^2_{FGLS}(X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}$$

- Αν οι Α.1-Α.3/Α.3' και Α.5/Α.5' ισχύουν και $V(u) = \sigma^2\Omega$ με συνεπή εκτιμητή $\widehat{\Omega}$ του Ω, τότε οι FGLS εκτιμητές έχουν τις στατιστικές ιδιότητες (ΣΙα).

Σημείωση:

- Όταν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα $V(u_t) = \sigma^2\delta_t$ και δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση:
  - Η μέθοδος GLS ή FGLS συμπίπτει με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων με βάρη WLS (weighted least squares), όπου τα βάρη είναι $w_t = \frac{1}{\sqrt{\delta_t}}$ ή $w_t = \frac{1}{\sqrt{\widehat{\delta}_t}}$, $t = 1, ..., T$.
  - Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων WLS (weighted least squares) με βάρη w_t, $t = 1, ..., T$: ελαχιστοποιούμε ως προς $\widetilde{\beta}$ το άθροισμα των τετραγώνων

$$S(\widetilde{\beta}) = \sum_{t=1}^{T} w_t^2 (Y_t - \widetilde{\beta}_0 - \widetilde{\beta}_1 X_{t1} - ... - \widetilde{\beta}_K X_{tK})^2$$

- Αν ο πίνακας Ω δεν είναι σωστά εξειδικευμένος, τότε οι στατιστικές ιδιότητες (ΣΙπα) των GLS εκτιμητών παύουν να ισχύουν.
- Αν ο πίνακας Ω δεν είναι σωστά εξειδικευμένος ή/και ο εκτιμητής $\widehat{\Omega}$ δεν είναι συνεπής, τότε οι στατιστικές ιδιότητες (ΣΙα) των FGLS εκτιμητών παύουν να ισχύουν.

- Εναλλακτικά,
  - Εκτιμάται με OLS το υπόδειγμα παλινδρόμησης και υπολογίζεται ο εκτιμητής $\widehat{\beta}$ του β.
  - Όταν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα αγνώστου μορφής, χρησιμοποιείται ο White εκτιμητής $\widehat{V}_W(\widehat{\beta})$ του $V(\widehat{\beta})$. Η εκτίμηση του $V(\widehat{\beta})$ και οι στατιστικοί έλεγχοι, διαστήματα εμπιστοσύνης και πρόβλεψης που βασίζονται στον White εκτιμητή $\widehat{V}_W(\widehat{\beta})$ είναι γνωστά ως ανθεκτικά στην ετεροσκεδαστικότητα (heteroskedasticity robust).
  - Όταν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα ή/και αυτοσυσχέτιση αγνώστου μορφής, χρησιμοποιείται ο Newey-West εκτιμητής $\widehat{V}_{NW}(\widehat{\beta})$ του $V(\widehat{\beta})$. Η εκτίμηση του $V(\widehat{\beta})$ και οι στατιστικοί έλεγχοι, διαστήματα εμπιστοσύνης και πρόβλεψης που βασίζονται στον Newey-West εκτιμητή $\widehat{V}_{NW}(\widehat{\beta})$ είναι γνωστά ως ανθεκτικά στην ετεροσκεδαστικότητα και την αυτοσυσχέτιση (heteroskedasticity and autocorrelation robust).
- Η μέθοδος GLS ή FGLS βασίζεται στη μέθοδο OLS σε ένα μετασχηματισμένο υπόδειγμα παλινδρόμησης όπου η υπόθεση A.4 ισχύει.

π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης με ετεροσκεδαστικότητα

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t \quad (1) \quad \text{με } V(u_t) = \sigma^2 \delta_t \quad (2)$$

Μετασχηματίζουμε το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$(1) \Rightarrow \frac{Y_t}{\sqrt{\delta_t}} = \beta_0 \frac{1}{\sqrt{\delta_t}} + \beta_1 \frac{X_{t1}}{\sqrt{\delta_t}} + ... + \beta_K \frac{X_{tK}}{\sqrt{\delta_t}} + \frac{u_t}{\sqrt{\delta_t}} \Rightarrow$$

$$Y_t^* = \beta_0 X_{t0}^* + \beta_1 X_{t1}^* + ... + \beta_K X_{tK}^* + u_t^* \qquad (*)$$

όπου $Y_t^* = \frac{Y_t}{\sqrt{\delta_t}}$, $X_{t0}^* = \frac{1}{\sqrt{\delta_t}}$, $X_{t1}^* = \frac{X_{t1}}{\sqrt{\delta_t}}$, ..., $X_{tK}^* = \frac{X_{tK}}{\sqrt{\delta_t}}$ και $u_t^* = \frac{u_t}{\sqrt{\delta_t}}$.

Στο μετασχηματισμένο υπόδειγμα παλινδρόμησης $(*)$ δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα αφού

$$V(u_t^*) = V\left(\frac{u_t}{\sqrt{\delta_t}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta_t}}\right)^2 V(u_t) \overset{(2)}{=} \frac{1}{\delta_t}\sigma^2\delta_t = \sigma^2, t = 1, ..., T$$

- Αν τα δ_t είναι γνωστά: Εκτιμάμε με μέθοδο OLS το υπόδειγμα παλινδρόμησης $(*)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με μέθοδο GLS στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) με ετεροσκεδαστικότητα (2).

- Αν τα δ_t είναι άγνωστα και έχουμε συνεπείς εκτιμήσεις τους $\widehat{\delta_t}$: Αντικαθιστούμε στο (∗) τα δ_t με τα $\widehat{\delta_t}$. Εκτιμάμε με μέθοδο OLS το υπόδειγμα παλινδρόμησης (∗). Αυτό είναι ισοδύναμο με μέθοδο FGLS στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) με ετεροσκεδαστικότητα (2).

π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης με αυτοσυσχέτιση

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t \quad (3) \qquad \text{με } u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4)$$

Μετασχηματίζουμε το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$\left.\begin{aligned} (3) &\Rightarrow Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t \\ (3) &\Rightarrow \rho Y_{t-1} = \rho\beta_0 + \rho\beta_1 X_{t-1,1} + ... + \rho\beta_K X_{t-1,K} + \rho u_{t-1} \end{aligned}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow}$$

$$\begin{aligned} Y_t - \rho Y_{t-1} &= \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t - \\ &\quad - (\rho\beta_0 + \rho\beta_1 X_{t-1,1} + ... + \rho\beta_K X_{t-1,K} + \rho u_{t-1}) \Rightarrow \\ Y_t - \rho Y_{t-1} &= \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_{t1} - \rho X_{t-1,1}) + ... + \beta_K(X_{tK} - \rho X_{t-1,K}) + \\ &\quad + u_t - \rho u_{t-1} \Rightarrow \\ Y_t^* &= \beta_0^* + \beta_1 X_{t1}^* + ... + \beta_K X_{tK}^* + u_t^* \qquad (**) \end{aligned}$$

όπου $Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$, $\beta_0^* = \beta_0(1-\rho)$, $X_{t1}^* = X_{t1} - \rho X_{t-1,1}, ..., X_{tK}^* = X_{tK} - \rho X_{t-1,K}$ και $u_t^* = u_t - \rho u_{t-1}$.

Στο μετασχηματισμένο υπόδειγμα παλινδρόμησης (∗∗) δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση αφού

$$u_t^* = u_t - \rho u_{t-1} \overset{(4)}{=} \varepsilon_t \text{ με } Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, t, s = 1, ..., T, t \neq s$$

- Αν το ρ είναι γνωστό: Εκτιμάμε με μέθοδο OLS το υπόδειγμα παλινδρόμησης (∗∗). Αυτό είναι ισοδύναμο με μέθοδο GLS στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (3) με αυτοσυσχέτιση (4).

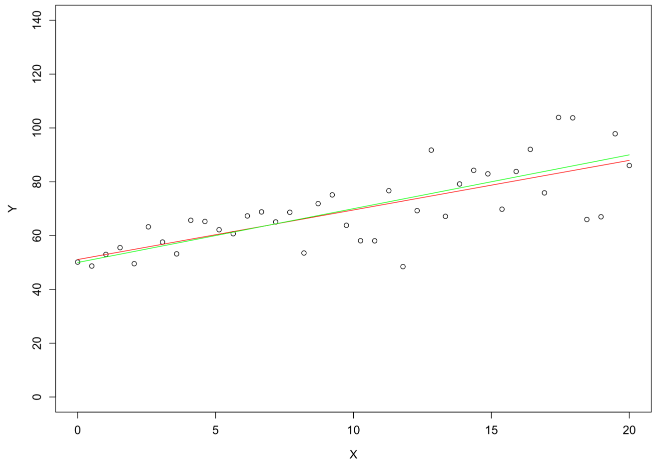
- Αν το ρ είναι άγνωστο και έχουμε συνεπή εκτίμηση του $\widehat{\rho}$: Αντικαθιστούμε στο (∗∗) το ρ με το $\widehat{\rho}$. Εκτιμάμε με μέθοδο OLS το υπόδειγμα παλινδρόμησης (∗∗). Αυτό είναι ισοδύναμο με μέθοδο FGLS στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (3) με αυτοσυσχέτιση (4).

π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t + u_t$, $t = 1, ..., 40$

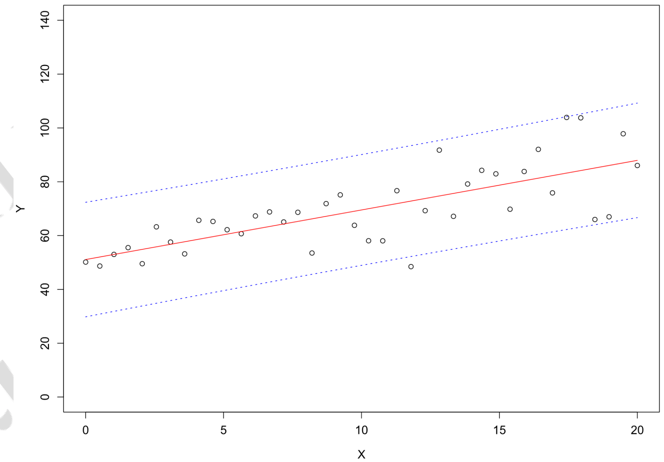
με $V(u_t) = 1 + 10|X_t|$ και $Corr(u_t, u_s) = 0$, $t, s = 1, ..., 40$, $t \neq s$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS

Δεδομένα, Πραγματική & Εκτιμώμενη Γραμμή

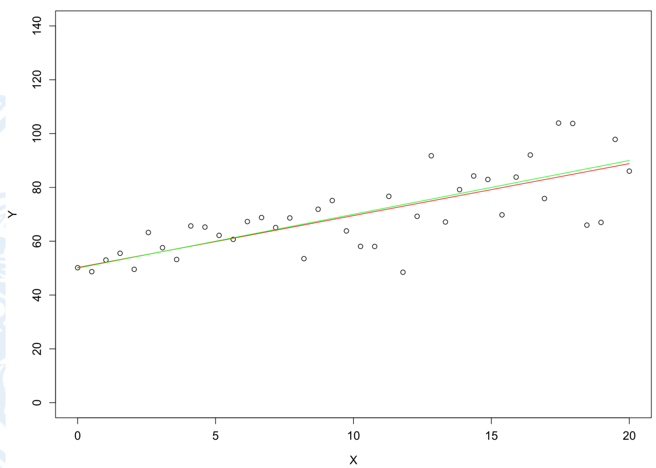


Δεδομένα, Πρόβλεψη & 95% Δ.Π. για Y

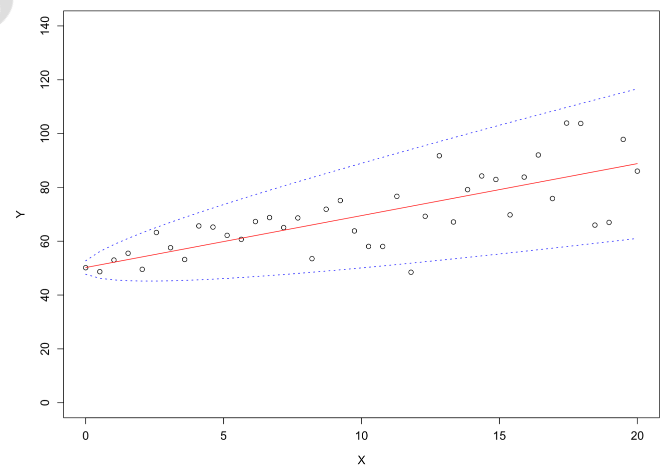


Μέθοδος εκτίμησης: GLS

Δεδομένα, Πραγματική & Εκτιμώμενη Γραμμή



Δεδομένα, Πρόβλεψη & 95% Δ.Π. για Y

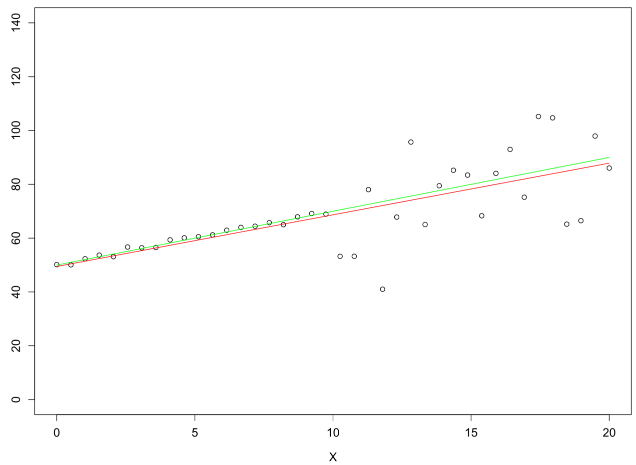


π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t + u_t,\ t = 1, ..., 40$

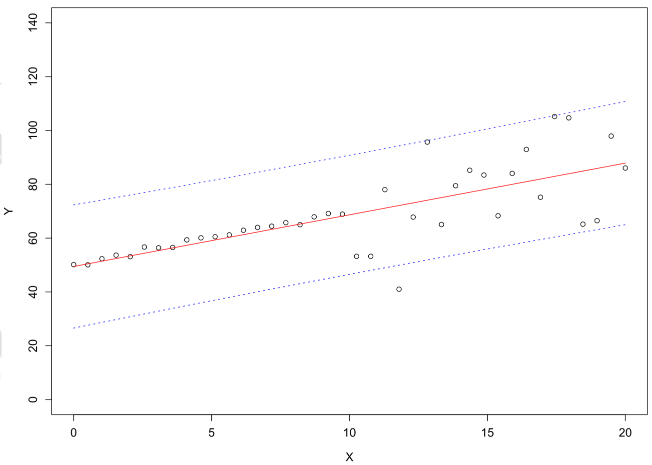
$$\text{με } V(u_t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t = 1, ..., 20 \\ 200, & \text{αν } t = 21, ..., 40 \end{cases} \text{ και } Corr(u_t, u_s) = 0,\ t, s = 1, ..., 40,\ t \neq s$$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS

Δεδομένα, Πραγματική & Εκτιμώμενη Γραμμή

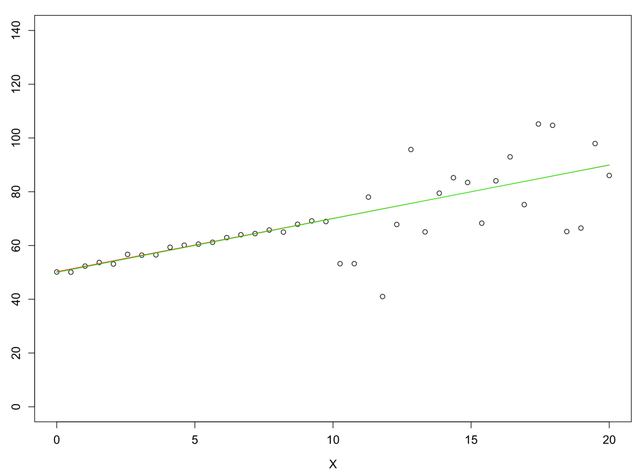


Δεδομένα, Πρόβλεψη & 95% Δ.Π. για Y

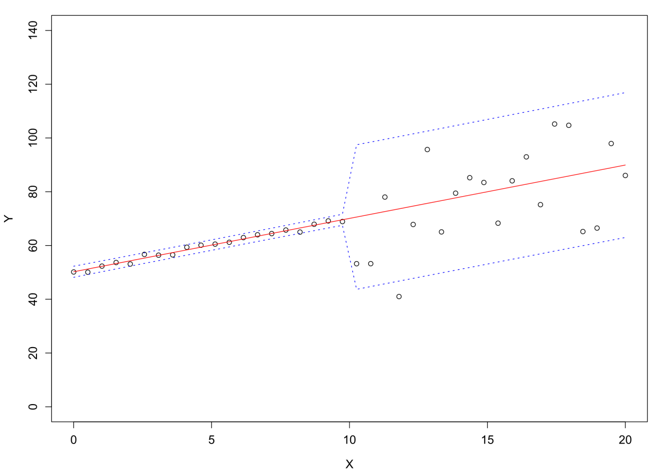


Μέθοδος εκτίμησης: GLS

Δεδομένα, Πραγματική & Εκτιμώμενη Γραμμή



Δεδομένα, Πρόβλεψη & 95% Δ.Π. για Y

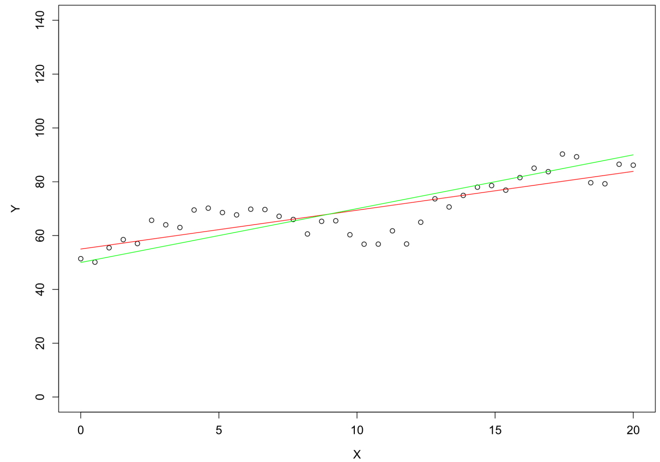


π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t + u_t,\ t = 1, ..., 40$

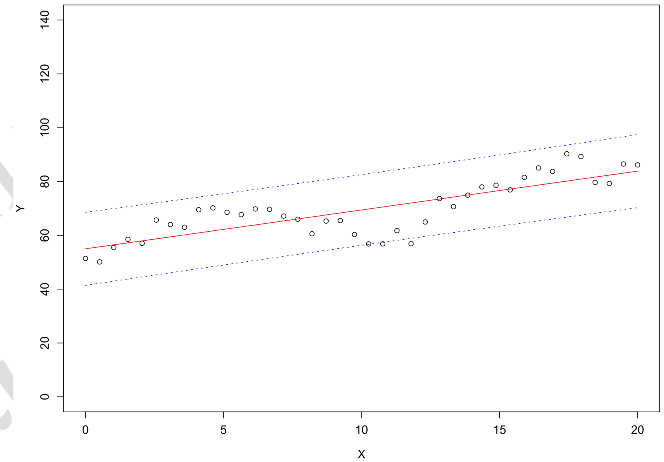
με $V(u_t) = 100$ και $Corr(u_t, u_s) = 0.9^{|t-s|},\ t, s = 1, ..., 40,\ t \neq s$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS

Δεδομένα, Πραγματική & Εκτιμώμενη Γραμμή

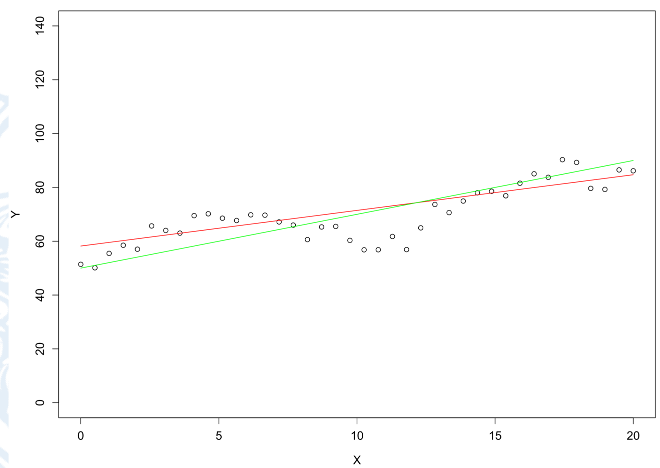


Δεδομένα, Πρόβλεψη & 95% Δ.Π. για Y

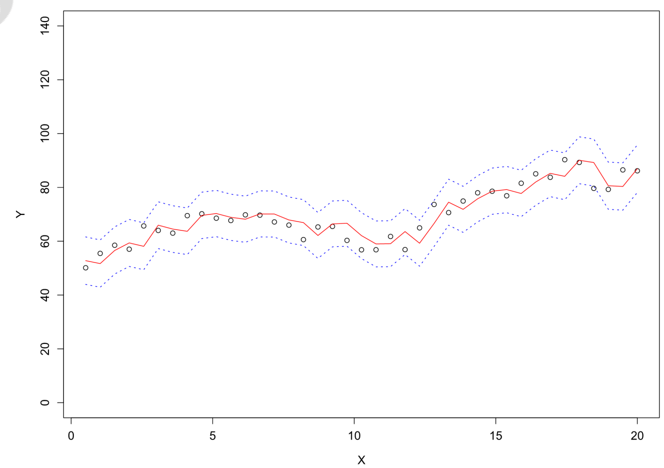


Μέθοδος εκτίμησης: GLS

Δεδομένα, Πραγματική & Εκτιμώμενη Γραμμή



Δεδομένα, Πρόβλεψη & 95% Δ.Π. για Y

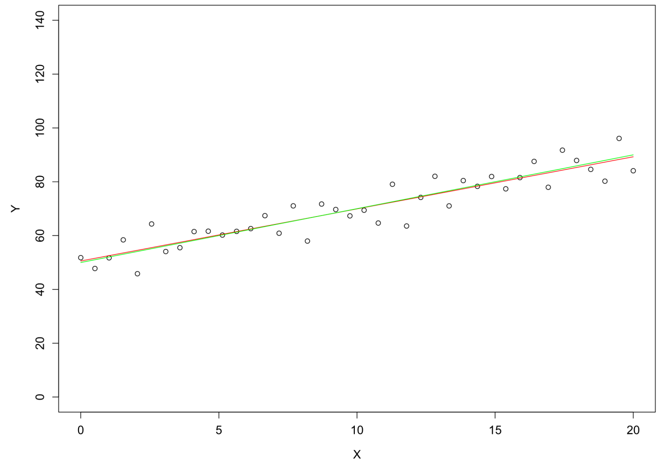


π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t + u_t$, $t = 1, \ldots, 40$

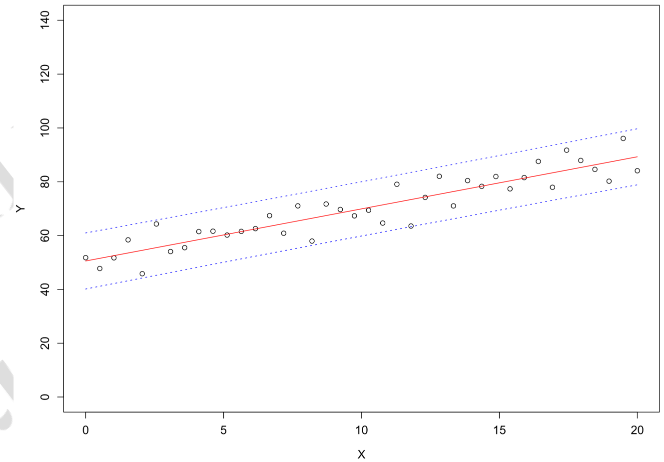
με $V(u_t) = 100$ και $Corr(u_t, u_s) = (-0.9)^{|t-s|}$, $t, s = 1, \ldots, 40$, $t \neq s$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS

Δεδομένα, Πραγματική & Εκτιμώμενη Γραμμή

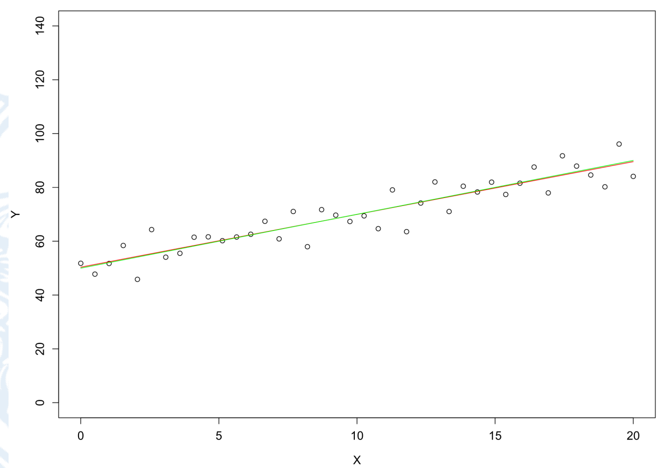


Δεδομένα, Πρόβλεψη & 95% Δ.Π. για Y



Μέθοδος εκτίμησης: GLS

Δεδομένα, Πραγματική & Εκτιμώμενη Γραμμή



Δεδομένα, Πρόβλεψη & 95% Δ.Π. για Y