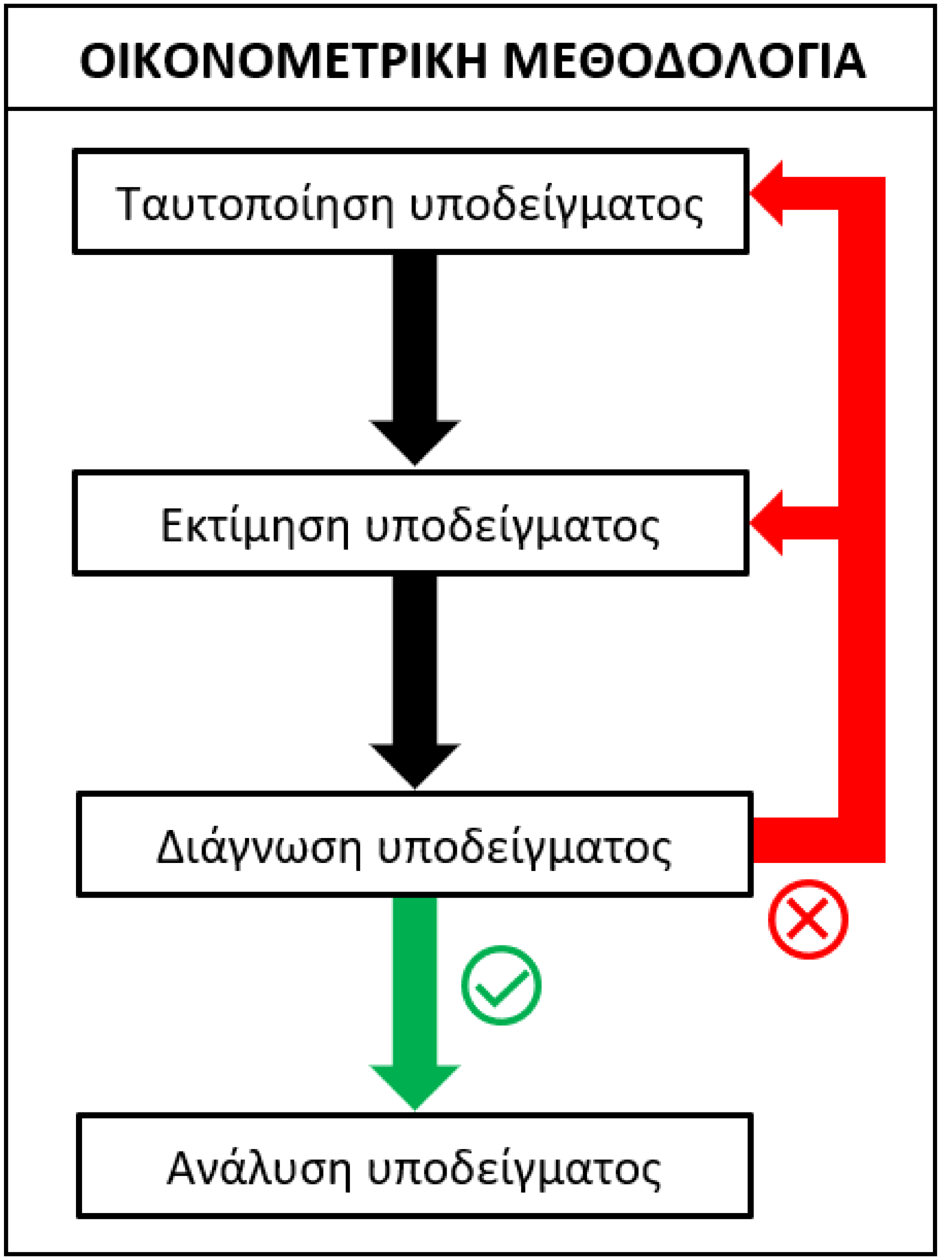
ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Θεωρία: 05

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών


ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ
Ταυτοποίηση υποδείγματος
Εκτίμηση υποδείγματος
Διάγνωση υποδείγματος
Ανάλυση υποδείγματος

Βασικές υποθέσεις Α.1-Α.4

Α.1 $Y = X\beta + u$ είναι το σωστό υπόδειγμα και $E(u) = 0$ ή
$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t$, $t = 1, ..., T$, είναι το σωστό υπόδειγμα και $E(u_t) = 0$, $t = 1, ..., T$.

Α.2 X είναι πλήρους βαθμού με πιθανότητα 1 και $T > K + 1$ ή
δεν υπάρχουν ακριβής γραμμικές σχέσεις μεταξύ των $X_1, ..., X_K$ με πιθανότητα 1 και $T > K + 1$.

Α.3 X και u είναι ανεξάρτητα ή
X_{tj} και u_s είναι ανεξάρτητα, $t, s = 1, ..., T$, $j = 1, ..., K$.

Α.3' X και u είναι ταυτόχρονα ασυσχέτιστα ή
X_{tj} και u_t είναι ασυσχέτιστα $t = 1, ..., T$, $j = 1, ..., K$.

Α.4 Ισχύει ότι $V(u|X) = \sigma^2 I$ ή
ισχύει ότι $V(u_t|X) = \sigma^2$, $t = 1, ..., T$ και $Cov(u_t, u_s|X) = 0$, $t, s = 1, ..., T$, $t \neq s$.

Πολυσυγγραμμικότητα

Υπόδειγμα παλινδρόμησης:

$$Y = X\beta + u \quad \acute{\eta} \quad Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t, t = 1, ..., T$$

Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης γίνεται η υπόθεση A.2:

<u>Όχι τέλεια πολυσυγγραμμικότητα</u>

A.2 X είναι πλήρους βαθμού και $T > K + 1$ ή

δεν υπάρχουν ακριβείς γραμμικές σχέσεις μεταξύ των $X_1, ..., X_K$ και $T > K + 1$.

- Ακριβείς/τέλειες γραμμικές σχέσεις ανάμεσα σε κάποιες από τις ερμηνευτικές μεταβλητές (συμπεριλαμβανόμενης της μοναδιαίας μεταβλητής του σταθερού όρου $\mathbb{1}_t = 1$) π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 3$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + u_t \qquad (*)$$

(i) $X_{t1} = 20$, $t = 1, ..., T \Rightarrow$ τέλεια γραμμική σχέση ανάμεσα σε X_1 και $\mathbb{1}$

(ii) $X_{t1} + X_{t2} = 1$, $t = 1, ..., T \Rightarrow$ τέλεια γραμμική σχέση ανάμεσα σε X_1 και X_2

(iii) $5X_{t1} + 2,5X_{t2} - 0,4X_{t3} = 10$, $t = 1, ..., T \Rightarrow$ τέλεια γραμμική σχέση ανάμεσα σε X_1, X_2 και X_3

Αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις ακριβείς/τέλειες γραμμικές σχέσεις (i)-(iii), τότε ο πίνακας X των ερμηνευτικών μεταβλητών έχει βαθμό $r(X) < K + 1 = 4$ και άρα δεν είναι πλήρους βαθμού.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{T1} & X_{T2} & X_{T3} \end{pmatrix}$$

- Αν δεν υπάρχουν ακριβείς/τέλειες γραμμικές σχέσεις ανάμεσα σε κάποιες από τις ερμηνευτικές μεταβλητές (συμπεριλαμβανόμενης της μοναδιαίας μεταβλητής του σταθερού όρου $\mathbb{1}_t = 1$), τότε δεν υπάρχει τέλεια πολυσυγγραμμικότητα.

- Αν υπάρχει τουλάχιστον μία ακριβής/τέλεια γραμμική σχέση ανάμεσα σε κάποιες από τις ερμηνευτικές μεταβλητές (συμπεριλαμβανόμενης της μοναδιαίας μεταβλητής του σταθερού όρου $\mathbb{1}_t = 1$), τότε υπάρχει τέλεια πολυσυγγραμμικότητα (perfect multicollinearity).

- Αν δεν υπάρχει τέλεια πολυσυγγραμμικότητα $\Rightarrow$ ο πίνακας X είναι πλήρους βαθμού και η υπόθεση Α.2 ισχύει $\Rightarrow$ ο πίνακας $X'X$ είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ οι OLS εκτιμητές υπολογίζονται και οι στατιστικές ιδιότητες τους δεν επηρεάζονται (εφόσον υπόλοιπες βασικές υποθέσεις ισχύουν).

- Αν υπάρχει τέλεια πολυσυγγραμμικότητα $\Rightarrow$ ο πίνακας X δεν είναι πλήρους βαθμού και η υπόθεση Α.2 δεν ισχύει $\Rightarrow$ ο πίνακας $X'X$ δεν είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ οι OLS εκτιμητές δεν υπολογίζονται.

- Για να λυθεί το πρόβλημα της τέλειας πολυσυγγραμμικότητας, αφαιρείται από το υπόδειγμα παλινδρόμησης η ερμηνευτική μεταβλητή ή οι ερμηνευτικές μεταβλητές που δημιουργούν το πρόβλημα.

  π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης $(*)$ με $K = 3$:

  (i) Αφαιρείται ο σταθερός όρος ή η X_1

  (ii) Αφαιρείται η X_1 ή η X_2

  (iii) Αφαιρείται η X_1 ή η X_2 ή η X_3

- Αν δεν υπάρχουν ακριβείς/τέλειες γραμμικές σχέσεις ανάμεσα στις ερμηνευτικές μεταβλητές (συμπεριλαμβανόμενης της μοναδιαίας μεταβλητής του σταθερού όρου $\mathbb{1}_t = 1$), αλλά για κάποιες από αυτές υπάρχει τουλάχιστον μία σχεδόν ακριβής/τέλεια γραμμική σχέση, τότε υπάρχει πολυσυγγραμμικότητα (multicollinearity).

  π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης $(*)$ με $K = 3$:

  (iv) $X_{t1} = 25$, $t = 1$ και $X_{t1} = 20$, $t = 2, ..., T$

  (v) $X_{t1} + X_{t2} = 1 + \eta_t$, $t = 1, ..., T$, όπου η_t τυχαία μεταβλητή που δεν είναι κάποια από τις μεταβλητές του υποδείγματος παλινδρόμησης.

- Αν υπάρχει πολυσυγγραμμικότητα, οι OLS εκτιμητές υπολογίζονται και οι στατιστικές ιδιότητες τους δεν επηρεάζονται από την ύπαρξη της πολυσυγγραμμικότητας (εφόσον υπόλοιπες βασικές υποθέσεις ισχύουν).

- Αν υπάρχει πολυσυγγραμμικότητα, οι διακυμάνσεις και άρα και τα τυπικά σφάλματα των OLS εκτιμητών των συντελεστών παλινδρόμησης μπορεί να είναι μεγάλα, ειδικά σε μικρά δείγματα. Στην περίπτωση αυτή, οι t στατιστικές για τη σημαντικότητα μίας ερμηνευτικής μεταβλητής θα είναι μικρές (ειδικά για τις ερμηνευτικές μεταβλητές που δημιουργούν την πολυσυγγραμμικότητα) και θα συμπεραίναμε πιθανώς λανθασμένα ότι κάθε μία από αυτές δεν είναι σημαντική. Αν λανθασμένα αφαιρούσαμε αυτές τις ερμηνευτικές μεταβλητές θα κάναμε σφάλμα στην εξειδίκευση του υποδείγματος παλινδρόμησης, με αποτέλεσμα η υπόθεση A.1 να μην ισχύει. Συνιστάται να ελεγχθεί η από κοινού σημαντικότητα των ερμηνευτικών μεταβλητών αυτών με F στατιστική για γραμμικούς περιορισμούς προτού αυτές αφαιρεθούν για αν αποφευχθεί πιθανό σφάλμα εξειδίκευσης του υποδείγματος παλινδρόμησης.

Πολυσυγγραμμικότητα και συντελεστής συσχέτισης

- Συχνά, η τέλεια πολυσυγγραμμικότητα ή η πολυσυγγραμμικότητα ανάμεσα στις ερμηνευτικές μεταβλητές εξετάζεται με τη χρήση των δειγματικών συντελεστών συσχέτισης $\widehat{Corr}(X_i, X_j) = r_{X_i,X_j}$ για όλα τα ζευγάρια των ερμηνευτικών μεταβλητών X_i, X_j, $i, j = 1, ..., K$, $i \neq j$.

- Για $K = 2$, $r_{X_1,X_2} = \pm 1$ είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για τέλεια πολυσυγγραμμικότητα λόγω των ερμηνευτικών μεταβλητών.

- Για $K = 2$, r_{X_1,X_2} κοντά στο ± 1 είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για πολυσυγγραμμικότητα λόγω των ερμηνευτικών μεταβλητών.

- Για $K > 2$, $r_{X_i,X_j} = \pm 1$ είναι ικανή αλλά όχι και αναγκαία συνθήκη για τέλεια πολυσυγγραμμικότητα λόγω των ερμηνευτικών μεταβλητών.

- Για $K > 2$, r_{X_i,X_j} κοντά στο ± 1 είναι ικανή αλλά όχι και αναγκαία συνθήκη για πολυσυγγραμμικότητα λόγω των ερμηνευτικών μεταβλητών.

Υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + u_t, t = 1, ..., T \qquad (**)$$

- Αν $r_{X_1,X_2} = \pm 1$, τότε υπάρχει τέλεια πολυσυγγραμμικότητα και οι OLS εκτιμητές δεν υπολογίζονται.

  Αφού $r_{X_1,X_2} = \pm 1 \Rightarrow$ υπάρχουν γνωστές σταθερές a, b ώστε $X_{t2} = a + bX_{t1}$, $t = 1, ..., T$.

  Τότε το υπόδειγμα παλινδρόμησης (**) γίνεται

$$(**) \Rightarrow Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 (a + bX_{t1}) + u_t$$
$$\Rightarrow Y_t = \beta_0^* + \beta_1^* X_{t1} + u_t, t = 1, ..., T$$

  όπου

$$\beta_0^* = \beta_0 + a\beta_2 \quad \text{και} \quad \beta_1^* = \beta_1 + b\beta_2$$

  Από τους OLS εκτιμητές των β_0^* και β_1^* δεν είναι εφικτός ο υπολογισμός των OLS εκτιμητών των β_0, β_1 και β_2.

- Αν $r_{X_1,X_2} \neq \pm 1$, τότε δεν υπάρχει τέλεια πολυσυγγραμμικότητα και οι OLS εκτιμητές υπολογίζονται.

- Αν r_{X_1,X_2} είναι πολύ κοντά στο ± 1, τότε υπάρχει πολυσυγγραμμικότητα και οι OLS εκτιμητές υπολογίζονται.

  Ειδικά σε μικρά δείγματα:

  Αφού r_{X_1,X_2} είναι πολύ κοντά στο $\pm 1 \Rightarrow$ οι διακυμάνσεις $V(\widehat{\beta}_j),\ j = 1,2$ θα μπορούσαν να ήταν μεγάλες $\Rightarrow$ τα τυπικά σφάλματα $s_{\widehat{\beta}_j}$, $j = 1,2$ θα μπορούσαν να ήταν μεγάλα $\Rightarrow$ οι t στατιστικές για $H_0 : \beta_j = 0$, $t = \frac{\widehat{\beta}_j}{s_{\widehat{\beta}_j}}$, $j = 1,2$ θα μπορούσαν να ήταν μικρές $\Rightarrow$ πιθανώς λανθασμένα δεν θα απορρίπταμε $H_0 : \beta_j = 0 \Rightarrow$ πιθανώς λανθασμένα θα συμπεραίναμε ότι κάθε ερμηνευτική μεταβλητή $X_j,\ j = 1,2$ δεν είναι σημαντική και θα τις αφαιρούσαμε από το υπόδειγμα $\Rightarrow$ πιθανώς θα κάναμε σφάλμα στην εξειδίκευση του υποδείγματος παλινδρόμησης $\Rightarrow$ πιθανώς η υπόθεση Α.1 δεν θα ίσχυε. Συνιστάται να ελεγχθεί η $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ με F στατιστική για γραμμικούς περιορισμούς προτού αφαιρεθούν οι ερμηνευτικές μεταβλητές X_1, X_2 για να αποφευχθεί πιθανό σφάλμα εξειδίκευσης του υποδείγματος παλινδρόμησης.

- Ισχύει ότι $V(\widehat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ (εφόσον βασικές υποθέσεις A.1-A.4 ισχύουν). Άρα,

$$V(\widehat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{T(1-r^2_{X_1,X_2})s^2_{X_1}} \quad \text{και} \quad V(\widehat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{T(1-r^2_{X_1,X_2})s^2_{X_2}}$$

όπου $s^2_{X_j} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_{tj} - \overline{X}_j)^2$ και $\overline{X}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{tj}$ για $j = 1, 2$.